专题 向量综合

---等和线

引入：下列叙述：

①若 $f(x)=|x-1|+|x+a|$ 为区间 $[-3,b]$ 上的偶函数，则 $a+b=4$；

②若关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+k^2=0$ 有两个大于 1 的实数根，则 k 的取值范围为 $(2,+\infty)$；

③已知函数 $f(x)=x|x|$，若对任意的 $x\in[t,t+2]$，不等式 $f(x+t)\geqslant 2f(x)$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是 $[\sqrt{2},+\infty)$；

④已知 A 和 B 是单位圆 O 上的两点，$\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$，点 C 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，则 $x+y$ 的最大值是 2.

其中正确叙述的个数为

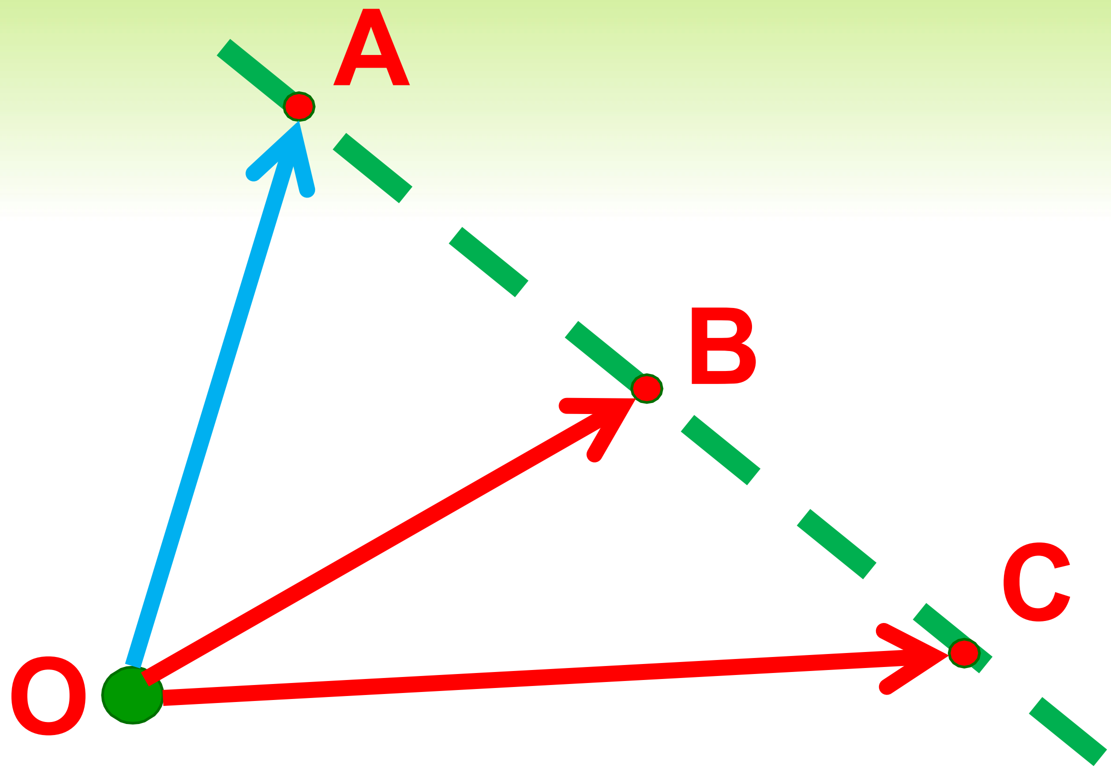
(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

答案：D

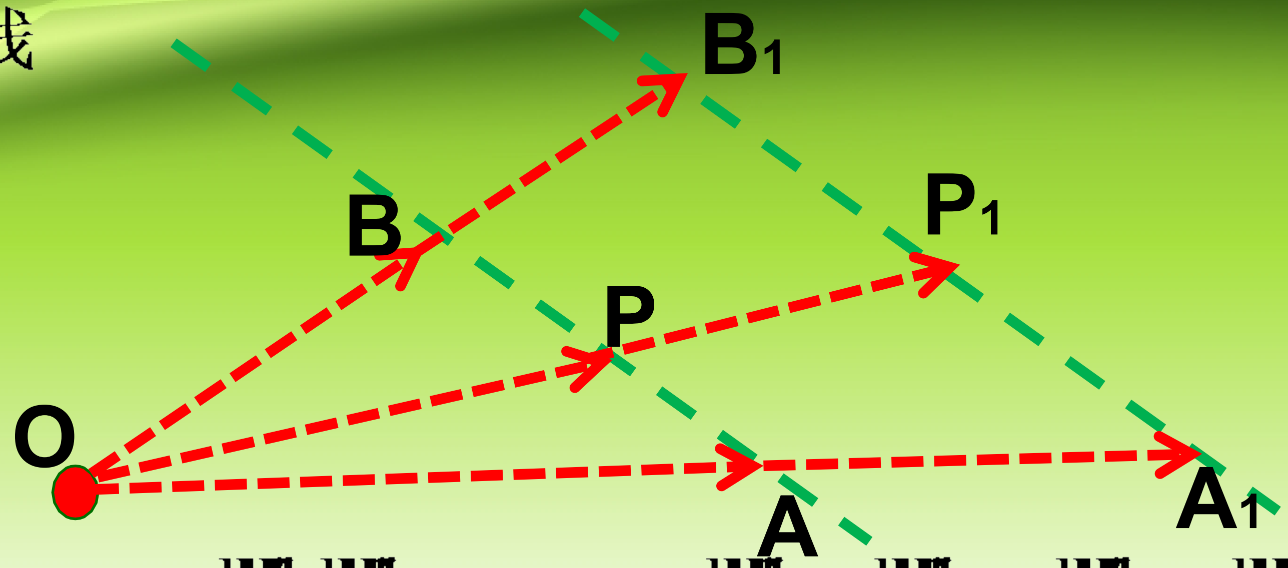
基础知识复习

（一）平面向量共线定理

已知$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$,若$\lambda+\mu=1$，则$A,B,C$三点共线反之亦然。



（二）等和线



平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任意向量$\overrightarrow{OP}$，　$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$,

若点P在直线AB上，或者在平行于AB的直线上，则$\lambda+\mu=k$ 为定值，反之也成立，我们把直线AB以及与直线AB平行的直线称为等和线。

（1）当等和线恰为直线AB时，k=1.

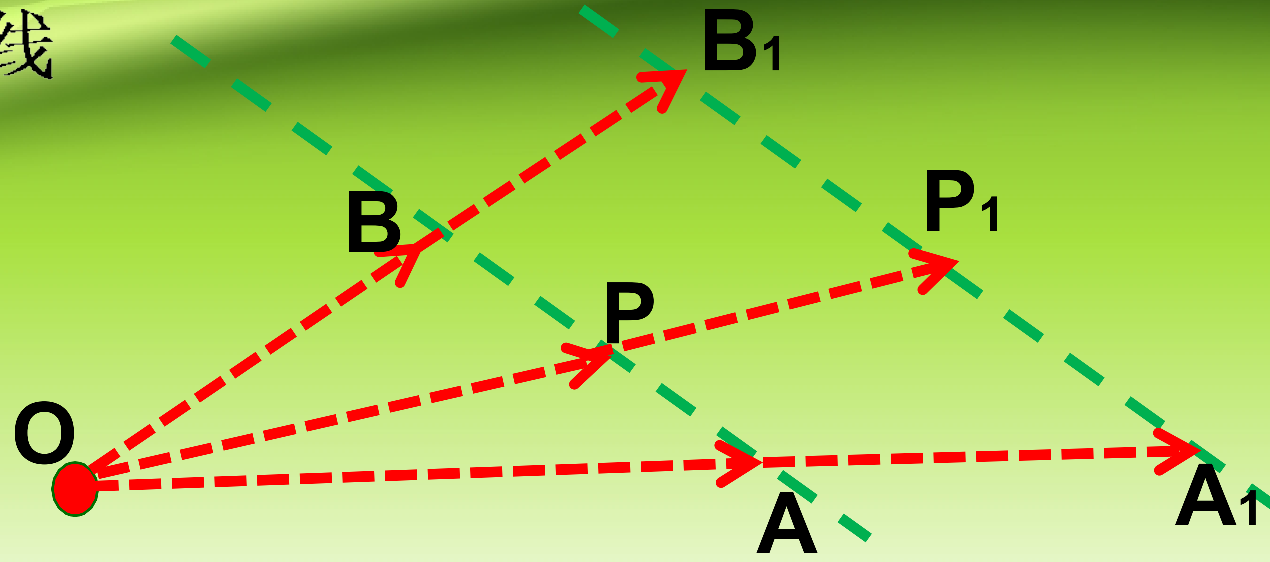
（2）当等和线在O点和直线AB之间时，$k\in(0,\ 1)$

（3）当直线AB在O点和等和线之间时，$k\in(1,\ +\infty)$

（4）当等和线过O点时，k=0.

（5）当两等和线关于O点对称时，则定值k 互为相反数。

（二）等和线



平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任意向量$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$

若点P在直线AB上，或者在平行于AB的直线上，则$\lambda+\mu=k$ 为定值，反之也成立，我们把直线AB以及与直线AB平行的直线称为等和线。

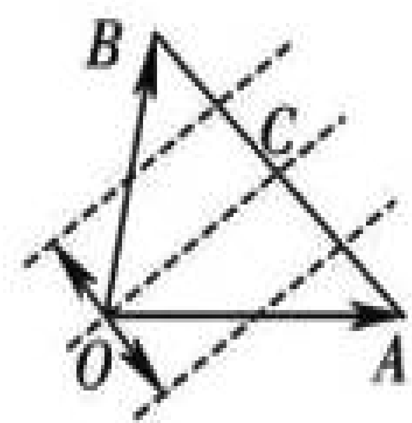
证明：ΔOAB和ΔOA_1B_1相似，即存在k，$\overrightarrow{OP_1}=k\overrightarrow{OP}\Rightarrow$

令:$\overrightarrow{OP_1}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OP}=k(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB})=kx\overrightarrow{OA}+ky\overrightarrow{OB}$

而A, P, B三点共线，$x+y=1$,而$\lambda=kx;\mu=ky\Rightarrow\lambda+\mu=k$

（三）等差线

平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，$C$为线段$AB$的中点，若点$P$在直线$OC$上或在平行于$OC$的直线上，则$\lambda-\mu=k$(定值)，反之也成立，我们把直线$OC$以及与直线$OC$平行的直线称为等差线。



（1）当等差线恰为直线OC时，$k=0$；

（2）当等差线过A点时，$k=1$；

（3）当等差线在直线OC与点A之间时，$k\in(0,1)$；

（4）当等差线与BA延长线相交时，$k\in(1,+\infty)$；

（5）若两等差线关于直线OC对称，则两定值k互为相反数；

（四）等积线

平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，若点$P$在以直线$OA,OB$为渐近线的双曲线上，则$\lambda\mu$为定值$k$，反之也成立，我们把以直线$OA,OB$为渐近线的双曲线称为等积线

（1）当双曲线有一支在$\angle AOB$内时，$k>0$；

（2）当双曲线的两支都不在$\angle AOB$内时，$k<0$；

（3）特别的，若$\overrightarrow{OA}=(a,b),\overrightarrow{OB}=(a,-b)$，点$P$在双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$时，$k=\dfrac{1}{4}$；

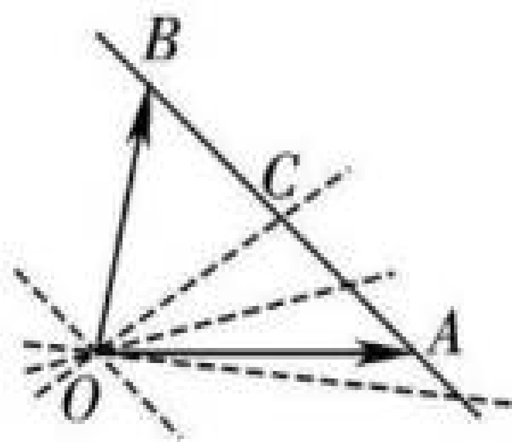
（五）等商线

平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，若点$P$在过$O$点（不与$OA$重合）的直线上，则$\dfrac{\lambda}{\mu}=k$(定值)，反之也成立。我们把过点$O$的直线（除$OA$外）称为等商线。

（1）当等商线过AB中点时，$k=1$；

（2）当等商线与线段AC（除端点）相交时，$k\in(1,+\infty)$；

（3）当等商线与线段BC（除端点）相交时，$k\in(0,1)$；



（4）当等商线即为OB时，$k=0$；

（5）当等商线与线段BA延长线相交时，$k\in(-\infty,-1)$；

（6）当等商线与线段AB延长线相交时，$k\in(-1,0)$；

（7）当等商线与直线AB平行时，$k=-1$；

（六）等平方和线

平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，且$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$，若点$P$在以$\angle AOB$角平分线为半长轴的椭圆上，则$\lambda^2+\mu^2$为定值$k$，反之也成立，我们把以以$\angle AOB$角平分线为半长轴的椭圆称为等平方和线。

特别的，若$\overrightarrow{OA}=(a,b),\overrightarrow{OB}=(a,-b)$，点$P$在双椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$时，$k=\frac{1}{2}$；

三、解题步骤

1、确定等值线为 1 的线；

2、平移（旋转或伸缩）该线，结合动点的可行域，分析何处取得最大值和最小值；

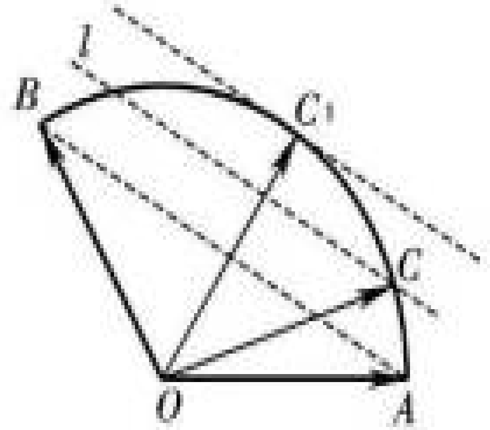
3、从长度比或者点的位置两个角度，计算最大值和最小值；

四、几点补充

1、平面向量共线定理的表达式中的三个向量的起点务必一致，若不一致，本着少数服从多数的原则，优先平移固定的向量；

2、若需要研究的是两系数的线性关系，则需要通过变换基底向量，使得需要研究的代数式为基底的系数和或差；

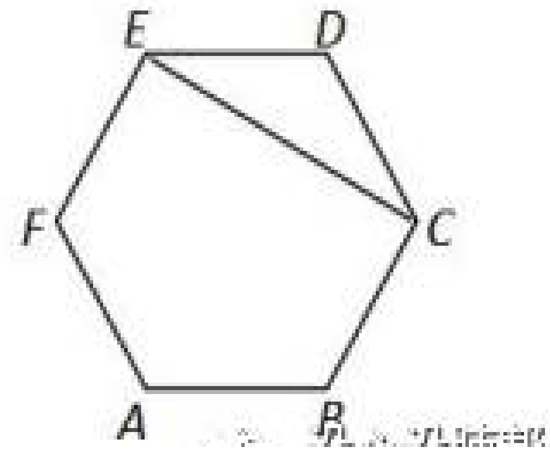
例1 两个长度为 1 的平面向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为 120°，如图所示，点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上变动.若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 x，$y\in R$，则 $x+y$ 的最大值是________.



答案：2

变式1:

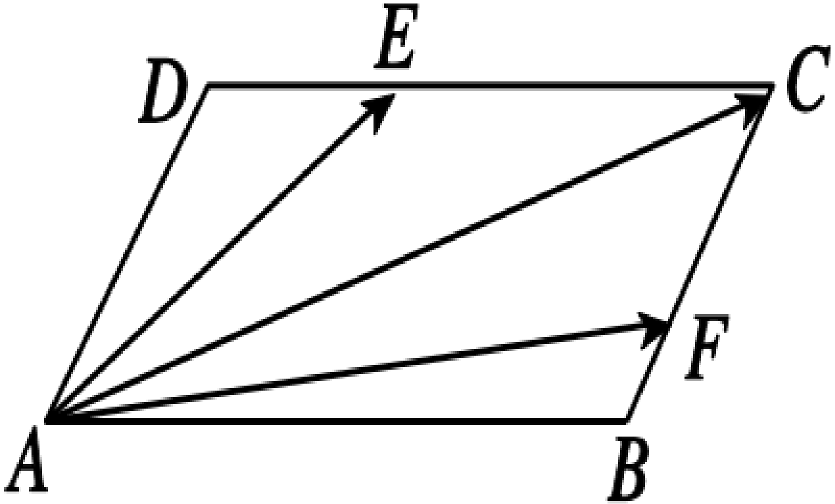
在正六边形 $ABCDEF$ 中，P 是三角形 CDE 内（包括边界）的动点，设 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AF}$，则 $x+y$ 的取值范围__________



答案：[3,4]

变式2：

如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 和 F 分别在边 CD 和 BC 上，且$\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BF}$，若$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AE}+n\overrightarrow{AF}$，其中 m，$n\in\mathbf{R}$，则 $m+n=$__________.



答案：$\dfrac{3}{2}$

例2: 已知O为ΔABC的外心，若$A(0,0), B(2,0), AC=1, \angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，且$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$______

答案：$\lambda=\frac{5}{6}$，$\mu=\frac{4}{3}$

答案：$\frac{13}{6}$

变式1: O为ΔABC的外心，若$\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$，$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$则$(\lambda+\mu)_{\max}=$______

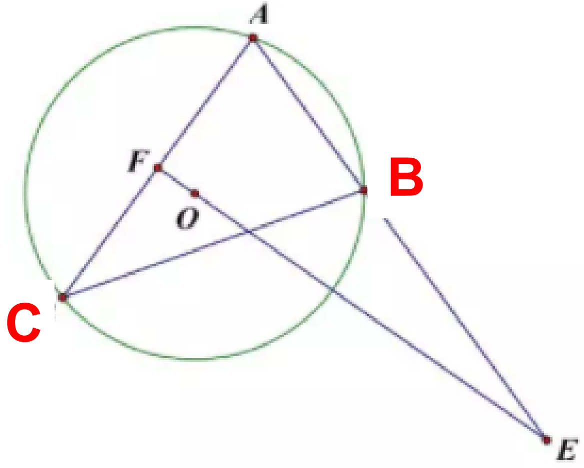
答案：$\frac{3}{4}$

变式2. ΔABC 的外心 O 满足 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$. 若 $AB=6,AC=10$,且 $2x+10y=5$,则 $\cos\angle BAC=$________.

解:当 $x=0$ 时, $y=\dfrac{1}{2}$.此时,由 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

可得 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

故 ΔABC 是以 AC 为斜边的直角三角形,



则 $\cos\angle BAC=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{5}$.

当 $x\neq 0$ 时,由 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 得 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2x}{5}(\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AB})+2y(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC})$.

如图,设$\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}$,$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}$,则$|\overrightarrow{AE}|=15$,$|\overrightarrow{AF}|=5$.

由$\overrightarrow{AO}=\frac{2x}{5}\overrightarrow{AE}+2y\overrightarrow{AF}$,及$\frac{2x}{5}+2y=1$知点$E,O,F$共线.

又由$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$知$F$为$AC$中点,故$OF\perp AC$.

所以,$\cos\angle BAC=\frac{AF}{AE}=\frac{1}{3}$.

综上可知,$\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$,或$\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$.