第9章 中心对称图形——平行四边形(5种模型与解题方法)

01 考点导航

题型一：中点四边形　　　　　　　　　　题型二：正方形中的十字架模型

题型三：四边形中的对角互补模型　　　　题型四：与正方形有关三垂线

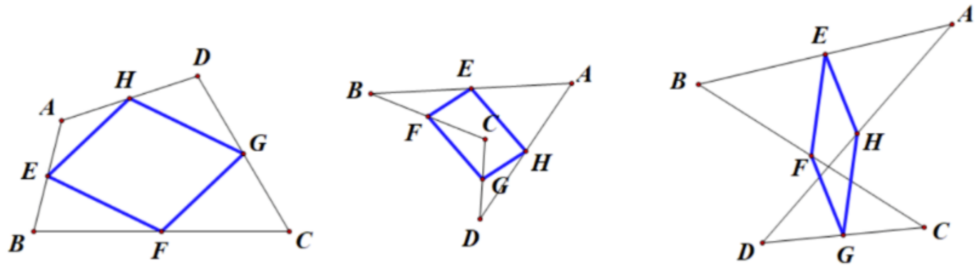
题型五：正方形与45°角的基本图

02 典型例题

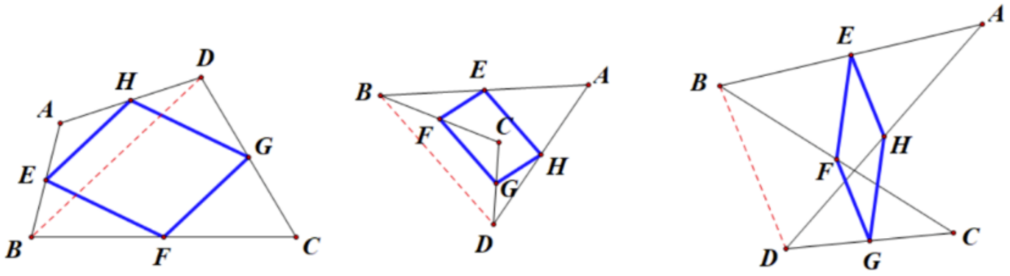
题型一：中点四边形

“中点四边形”，也叫瓦里尼翁平行四边形，是顺次连接四边形各边中点而组成的四边形，是四边形的内接四边形的一种特殊情况，一般有以下三种形态：

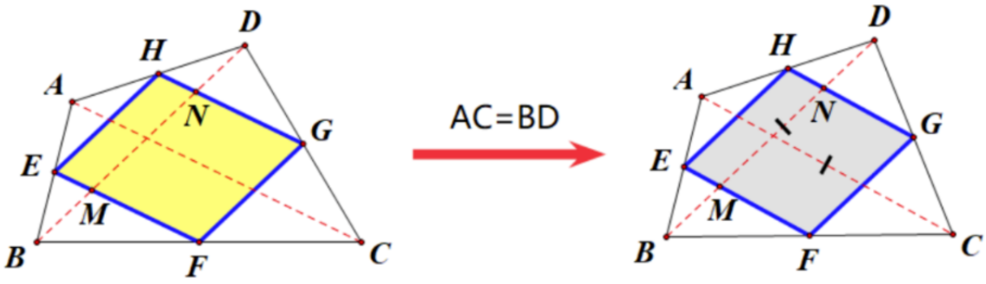
（原四边形 $ABCD$ 依次是：凸四边形，凹四边形，折四边形）



（一）中点四边形一定是平行四边形

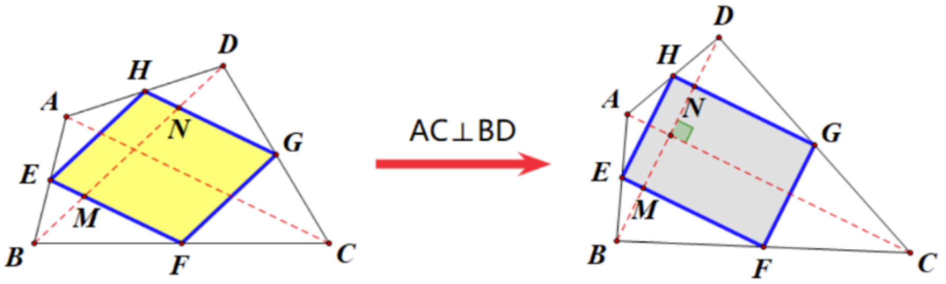


1.当原四边形对角线相等时，其中点四边形为菱形



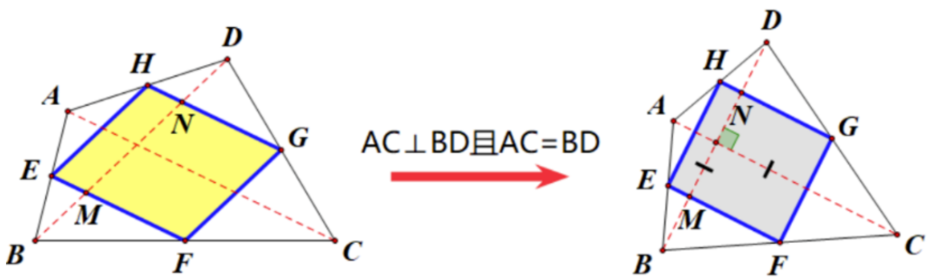
四边形EFGH为平行四边形　　　　　四边形EFGH为菱形

2.当原四边形对角线垂直时，其中点四边形为矩形



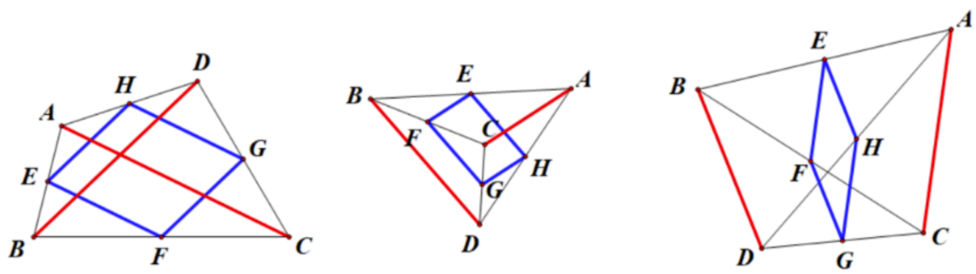
四边形EFGH为平行四边形　　　　　四边形EFGH为矩形

3.当原四边形对角线垂直且相等时，其中点四边形为正方形

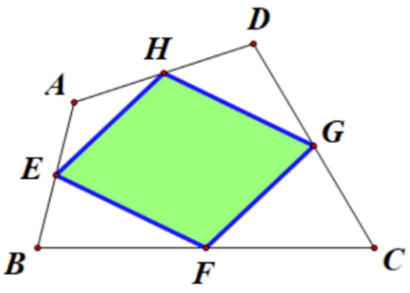


四边形EFGH为平行四边形　　　　　四边形EFGH为正方形

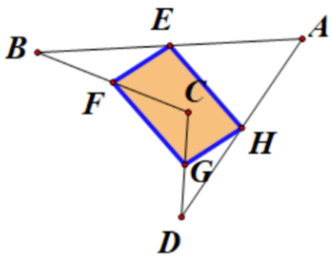
（二）中点四边形的周长等于原四边形对角线之和



（三）中点四边形的面积等于原四边形面积的二分之一



$S_{四边形EFGH}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$

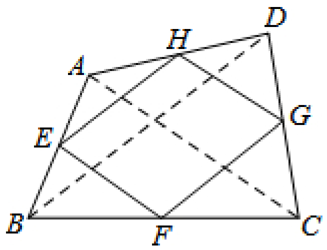


$S_{四边形EFGH}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$

一．选择题（共 2 小题）

（2022•宜兴市校级二模）

1．如图，四边形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点·若四边形 $EFGH$ 为菱形，则对角线 AC、BD 应满足条件是（　　）

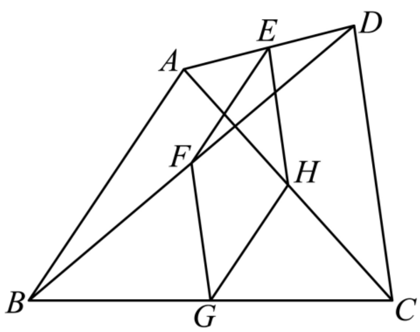


A． $AC\perp BD$　　　　B． $AC=BD$

C． $AC\perp BD$ 且 $AC=BD$　　　　D．不确定

（2024 春•灌南县期中）

2．如图，在四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是线段 AD、BD、BC、AC 的中点，要使四边形 $EFGH$ 是菱形，需要加的条件是（　　）

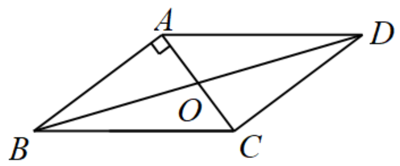


A． $AC=BD$　　B． $AC\perp BD$　　C． $AB=CD$　　D． $AB\perp CD$

二．填空题（共 3 小题）

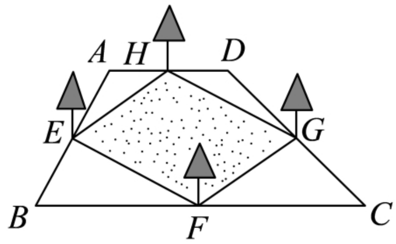
（2023 春•金湖县期中）

3．如图，在$\square ABCD$中，对角线 AC、BD 相交于点 O，$AB\perp AC$，$AB=8$，$AD=10$，则 AO 的长为_____.



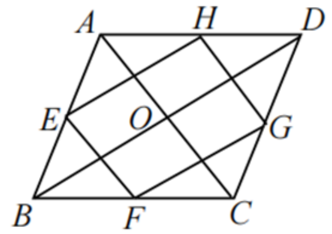
（2023 春•扬州校级期中）

4．杨伯伯家小院子的四棵小树 E 、F 、G 、H 刚好在其梯形院子 $ABCD$ 各边的中点上，若在四边形 $EFGH$ 地上种小草，则这块草地的形状是______．



（2022 春•鼓楼区校级月考）

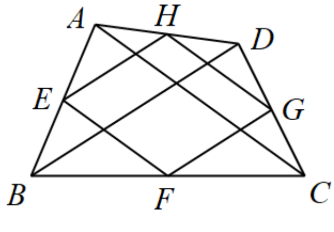
5．如图，菱形 $ABCD$ 中，点 O 为对角线的交点，E、F、G、H 是菱形 $ABCD$ 的各边中点，若 $AC=6$，$BD=8$，则四边形 $EFGH$ 的面积为_____．



三．解答题（共 3 小题）

（2023 春•姜堰区期中）

6．如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、AD 的中点，连接 AC、BD．

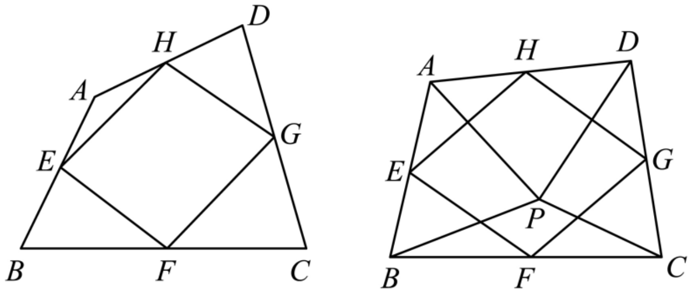


(1)求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

(2)当对角线 AC 与 BD 满足什么关系时，四边形 $EFGH$ 是菱形，并说明理由．

（2022 春•工业园区校级期末）

7．如图，四边形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点，



(图1)　(图2)

(1)求证：中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

(2)如图 2，点 P 是四边形 $ABCD$ 内一点，且满足 $PA=PB,PC=PD,\angle APB=\angle CPD$，点 E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点，猜想中点四边形 $EFGH$ 的形状，并证明你的猜想．

（2023 春•盐城期中）

8．阅读理解，我们把依次连接任意一个四边形各边中点得到的四边形叫中点四边形，如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点，依次连接各边中点得到中点四边形 $EFGH$．

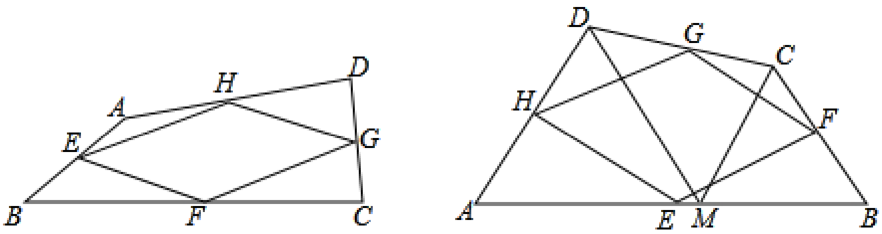


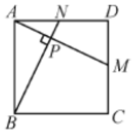
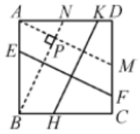
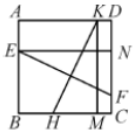
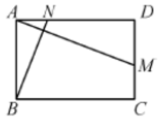
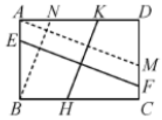
图1　图2

(1)这个中点四边形 $EFGH$ 的形状是_；

(2)如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，点 M 在 AB 上且 $\triangle AMD$ 和 $\triangle MCB$ 为等边三角形，E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、AD 的中点，试判断四边形 $EFGH$ 的形状并证明．

题型二：正方形中的十字架模型

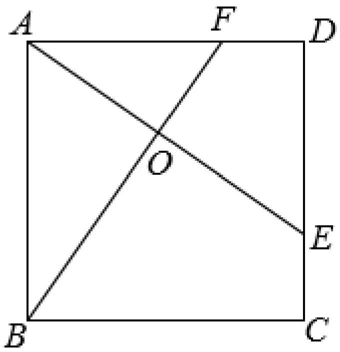
模型展示

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>正方形 $ABCD$ 中，若 $AM\perp BN$，则 $\triangle ADM\cong\triangle BAN$，$\therefore AM=BN$，即 $\frac{BN}{AM}=1$.</td><td>将 AM，BN 如上图进行平移，易得 $HK=BN=AM=EF$. $\therefore\frac{HK}{EF}=1$.</td><td>正方形 $ABCD$ 中，若 $EF=HK$，则过点 E，K 分别作 $EN\perp CD$，$KM\perp BC$，易证 $\triangle ENF\cong\triangle KMH$，从而 $EF\perp HK$.</td><td>矩形 $ABCD$ 中，若 $AM\perp BN$，则 $\triangle ABN\backsim\triangle DAM$. 故 $\frac{BN}{AM}=\frac{AB}{AD}$.</td><td>将 AM，BN 如上图进行平移，易得 $HK=BN$，$AM=EF$，则 $\frac{HK}{EF}=\frac{AB}{AD}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">若正方形的四条边上存在互相垂直的十字架，则十字架长度相等.</td><td>在正方形的两组对边分别各取两点并相连，所得两条线段如果垂直，那么相等.</td><td colspan="2">若矩形的四条边上存在互相垂直的十字架，则十字架长度之比等于矩形邻边之比.</td></tr>
</table>

一．选择题（共 1 小题）

（2024 春•启东市校级月考）

9．如图，E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD、AD 上的点，且 $CE=DF$，AE、BF 相交于点 O，下列结论：



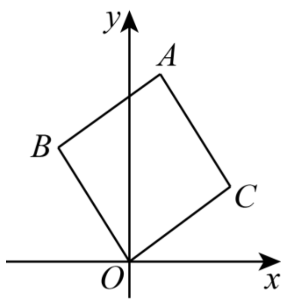
（1）$AE=BF$；（2）$AE\perp BF$；（3）$AO=OE$；（4）$S_{\triangle AOB}=S_{四边形DEOF}$ 中正确的有（ ）

A．4 个　　B．3 个　　C．2 个　　D．1 个

二．填空题（共 3 小题）

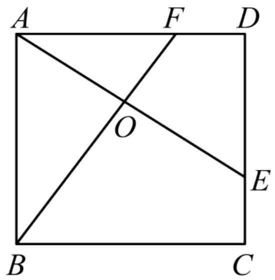
（2023 春•宿豫区期中）

10．如图所示，将正方形 $ABOC$ 放在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，点 B 的坐标为 $(-2,3)$，则点 A 的坐标为__________.



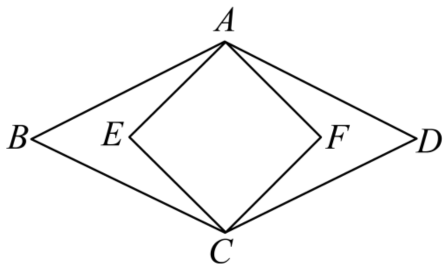
（2021 春•睢宁县月考）

11．如图，E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD，AD 上的点，且 $CE=DF$，AE，BF 相交于点 O，下列结论①$AE=BF$；②$AE\perp BF$；③$AO=OE$；④$S_{\triangle AOB}=S_{四边形DEOF}$ 中，正确结论的是 _____ 填序号．



（2023 春•建邺区校级期末）

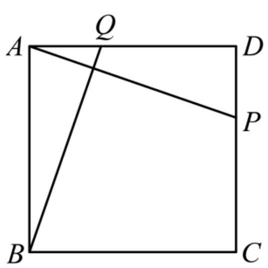
12．如图，四边形 $ABCD$，四边形 $AECF$ 分别是菱形与正方形．若 $\angle BAE=22^{\circ}$，则 $\angle D=$_____°．



三．解答题（共 2 小题）

（2022 春•吴中区校级期中）

13．如图，正方形 $ABCD$ 中，点 P，Q 分别为 CD，AD 边上的点，且 $DQ=CP$，连接 BQ，AP．求证：$BQ\perp AP$．



（2023 春•淮安期末）

14．问题情境：苏科版八年级下册数学教材第 94 页第 19 题第（1）题是这样一个问题：

如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、F 分别在边 BC 、CD 上，且 $AE \perp BF$ ，垂足为 M ．那么 AE 与 BF 相等吗？

（1）直接判断：AE _ BF （填“=”或“≠” ）；

在“问题情境”的基础上，继续探索：

问题探究：

（2）如图 2，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、F 、G 分别在边 BC 、CD 和 DA 上，且 $GE \perp BF$ ，垂足为 M ．那么 GE 与 BF 相等吗？证明你的结论；

问题拓展：

（3）如图 3，点 E 在边 CD 上，且 $MN \perp AE$ ，垂足为 H ，当 H 在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上时，连接 AN ，将 $\triangle AHN$ 沿着 AN 翻折，点 H 落在点 H' 处．

①四边形 $AHNH'$ 是正方形吗？请说明理由；

②若 $AB=6$，点 P 在 BD 上， $BD=3BP$ ，直接写出 $PH'+\frac{\sqrt{2}}{2}AN$ 的最小值为 ____．

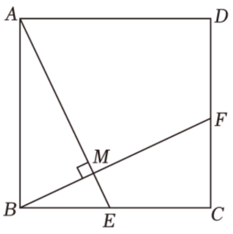


图1

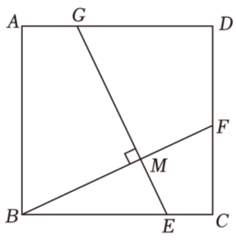


图2

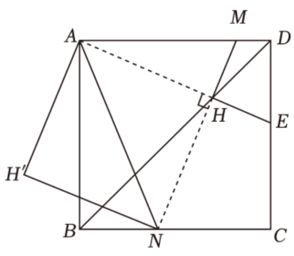
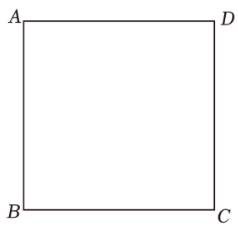


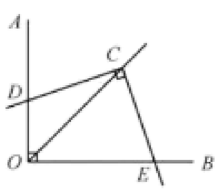
图3

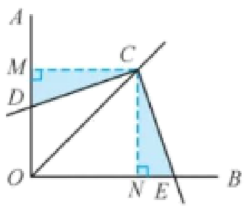


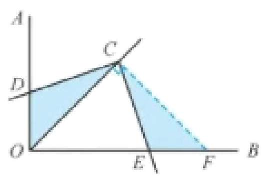
备用图

题型三：四边形中的对角互补模型

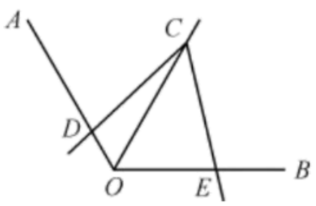
模型 1:全等形一-90°对角互补模型

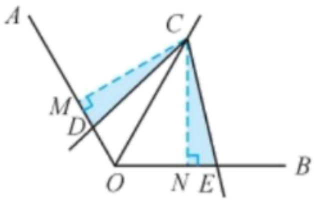


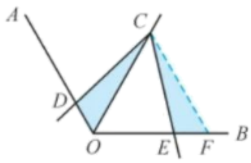




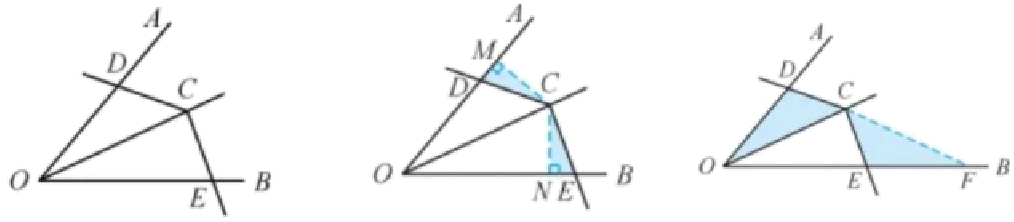
模型 2:全等形--120°对角互补模型







模型 3:全等形一一任意角对角互补模型

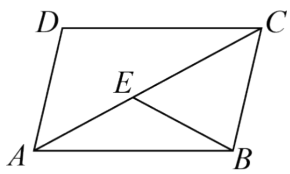


模型 4:相似形一-90°对角互补模型（后面会学到）

一．选择题（共 1 小题）

（2023 春•金湖县期中）

15．如图，AC 是▱$ABCD$ 的对角线，点 E 在 AC 上，$AD=AE=BE$，$\angle D=105°$，则 $\angle BAC$ 是（　）



A．25°　　B．30°　　C．45°　　D．50°

二．填空题（共 1 小题）

（2023 春•通城县期中）

16．如图，正方形 $ABCD$ 的面积为 16，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 分别在边 AB，BC 上运动，$\angle EOF=90°$，OG 平分 $\angle EOF$，与边 BC 交于点 G．则下列结论：

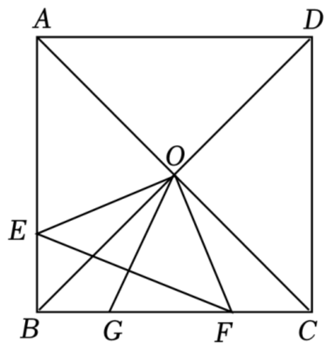
①$OE=OF$；

②四边形 $OEBF$ 的面积保持 4 不变；

③$BG^2+CF^2=GF^2$；

④EF 的最小值为 $2\sqrt{2}$．

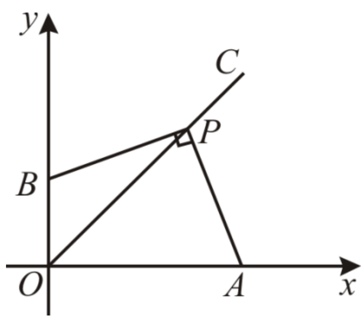
其中正确说法的序号是 ________．（把你认为正确的序号都填上）



三．解答题（共 3 小题）

（2022 春•滨海县期中）

17．如图，点 P（$3m$-1，-$2m$+4）在第一象限的角平分线 OC 上，$AP \perp BP$，点 A 在 x 轴正半轴上，点 B 在 y 轴正半轴上．



(1)求点 P 的坐标．

(2)当$\angle APB$ 绕点 P 旋转时，

①$OA+OB$ 的值是否发生变化？若变化，求出其变化范围；若不变，求出这个定值．

②请求出 OA^2+OB^2 的最小值．

（2023 春•分宜县期末）

18．我们规定：一组邻边相等且对角互补的四边形叫做“完美四边形”．

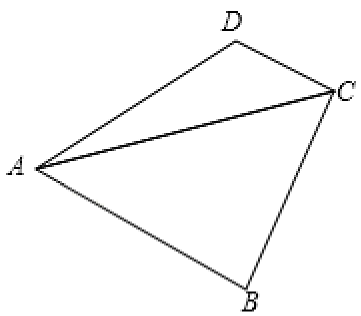


图1

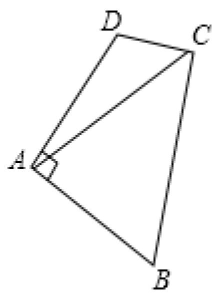


图2

(1)在①平行四边形，②菱形，③矩形，④正方形中，一定为“完美”四边形的是 ____（请填序号）；

(2)在“完美”四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，连接AC．

①如图1，求证：AC平分$\angle BCD$；

小明通过观察、实验，提出以下两种想法，证明AC平分$\angle BCD$:

想法一：通过$\angle B+\angle D=180°$，可延长CB到E，使$BE=CD$，通过证明$\triangle AEB\cong\triangle ACD$，从而可证$AC$平分$\angle BCD$；

想法二：通过$AB=AD$，可将$\triangle ACD$绕点A顺时针旋转，使AD与AB重合，得到$\triangle AEB$，可证C，B，E三点在一条直线上，从而可证AC平分$\angle BCD$．

请你参考上面的想法，帮助小明证明AC平分$\angle BCD$；

②如图2，当$\angle BAD=90°$，用等式表示线段AC，BC，CD之间的数量关系，并证明．

（2021秋•丹阳市期末）

19．四边形$ABCD$若满足$\angle A+\angle C=180°$，则我们称该四边形为“对角互补四边形”．

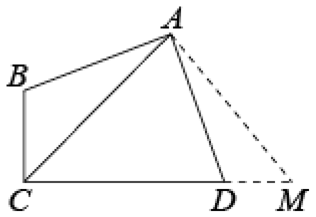


图1

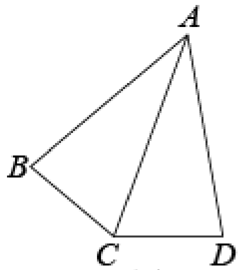


图2

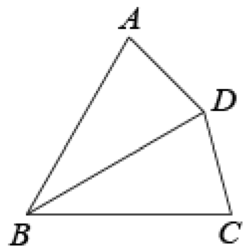


图3

(1)四边形$ABCD$为对角互补四边形，且$\angle B$：$\angle C$：$\angle D$=2：3：4，则$\angle A$的度数为_______；

(2)如图1，四边形$ABCD$为对角互补四边形，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$AB=AD$．

求证：AC平分$\angle BCD$．

小云同学是这么做的：延长CD至M，使得$DM=BC$，连AM，可证明$\triangle ABC\cong\triangle ADM$，得到$\triangle ACM$是等腰直角三角形，由此证明出$AC$平分$\angle BCD$，还可以知道$CB$、$CD$、$CA$三者关系为_______；

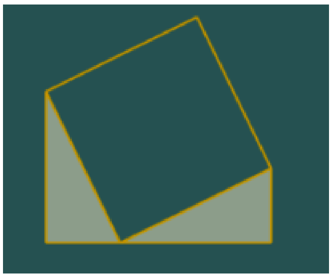
(3)如图2，四边形$ABCD$为对角互补四边形，且满足$\angle BAD$=60°，AB=AD，试证明：

①AC平分$\angle BCD$;

②CA=CB+CD;

(4)如图3，四边形$ABCD$为对角互补四边形，，且满足$\angle ABC$=60°，AD=CD，则BA、BC、BD三者关系为_______．

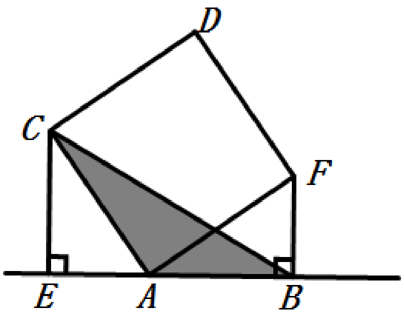
题型四：与正方形有关三垂线



一、单选题

（20-21 八年级上·江苏常州·期中）

20．如图，四边形 AFDC 是正方形，$\angle CEA$ 和 $\angle ABF$ 都是直角，且 E，A，B 三点共线，$AB=4$，则图中阴影部分的面积是（　）

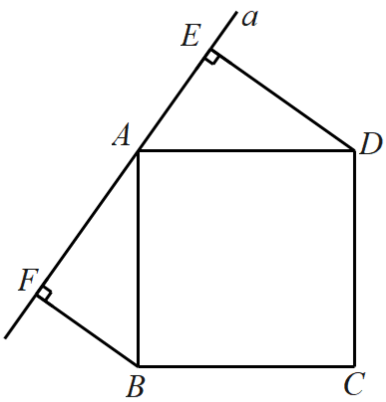


A．12　　B．10　　C．8　　D．6

二、填空题

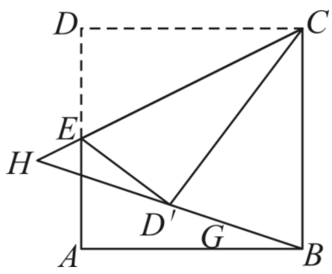
（八年级下·江苏盐城·阶段练习）

21．如图所示，直线 a 经过正方形 $ABCD$ 的顶点 A，分别过正方形的顶点 B、D 作 $BF\perp a$ 于点 F，$DE\perp a$ 于点 E，若 $DE=8$，$BF=5$，则 EF 的长为_________.



（22-23 八年级下·江苏无锡·期中）

22．如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，点 E 是边 AD 的中点，将$\triangle DCE$ 沿着 CE 翻折，得到$\triangle D'CE$，延长 BD' 交 CE 的延长线于点 H，则 EH ＝______.



三、解答题

（2020·江苏盐城·三模）

23．四边形 $ABCD$ 是边长为2的正方形，点 M 在边 AD 所在的直线上，连接 CM，以 M 为直角顶点在 CM 右侧作等腰 $Rt\triangle CMN$，连接 BN.

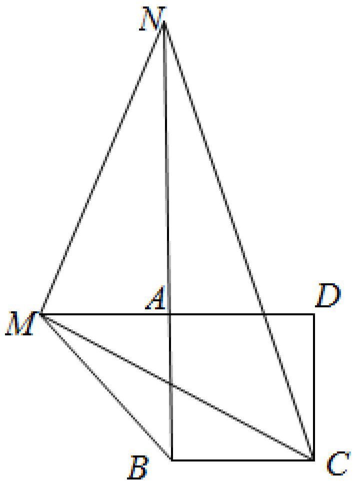


图1

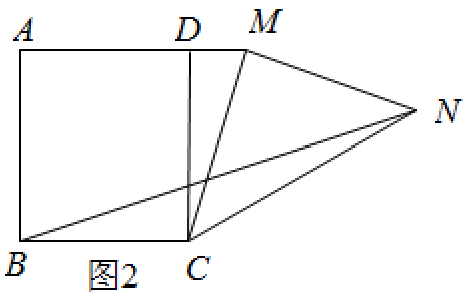


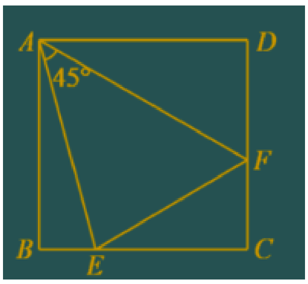
图2

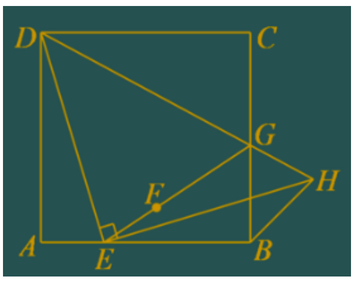
（1）如图1，当点 M 在点A左侧，且 A、B、N 三点共线时，$BN=$______；

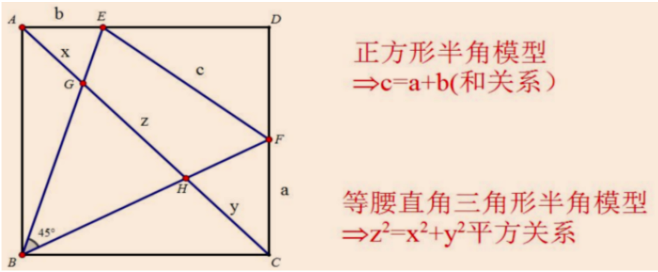
（2）如图2，当点 M 在点A右侧，且 $AM=\frac{5}{2}$ 时，求 BN 的长；

（3）若点 M 在边 AD 所在直线上，且 $BN=\sqrt{26}$，求 AM 的长．

题型五：正方形与45°角的基本图







一、单选题

（20-21 八年级下·天津津南·期中）

24．如图，有一正方形的纸片 $ABCD$，边长为 6，点 E 是 DC 边上一点且 $DC=3DE$，把△ADE 沿 AE 折叠使△ADE 落在△AFE 的位置，延长 EF 交 BC 边于点 G，连接 BF 有以下四个结论：

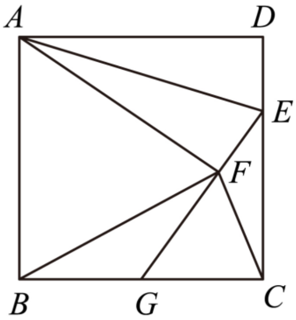
①$\angle GAE=45°$；

②$BG+DE=GE$；

③点 G 是 BC 的中点；

④连接 FC，则 $BF\perp FC$；

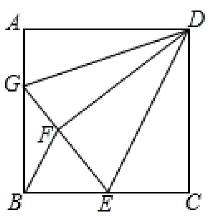
其中正确的结论序号是（　　）



A．①②③④　　B．①②③　　C．①②　　D．②③

（20-21 八年级上·广东广州·期中）

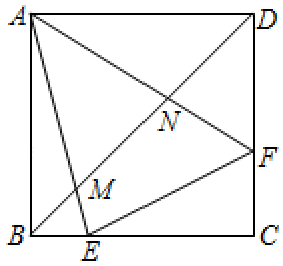
25．如图，已知正方形 ABCD 的边长为 12，BE=EC，将正方形边 CD 沿 DE 折叠到 DF，延长 EF 交 AB 于 G，连接 DG，现在有如下 4 个结论：①AG+EC=GE；②$\angle$GDE＝45°；③$\triangle BGE$ 的周长是一个定值；④连结 FC，$\triangle BFC$ 的面积等于$\frac{1}{2}BF\bullet FC$．在以上 4 个结论中，正确的是（ ）



A．1　　　　　　　　B．2　　　　　　　　C．3　　　　　　　　D．4

（20-21 八年级下·山东济南·期中）

26．如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在线段 BC、CD 上运动，且满足$\angle EAF=45°$，AE、AF 分别与 BD 相交于点 M、N，下列说法中：①$BE+DF=EF$；②点 A 到线段 EF 的距离一定等于正方形的边长；③$BE=2$，$DF=3$，则 $S_{\triangle AEF}=15$；④若 $AB=6\sqrt{2}$，$BM=3$，则 $MN=5$．其中结论正确的个数是（　　）



A．4　　　　　　　　B．3　　　　　　　　C．2　　　　　　　　D．1

二、解答题

（20-21 八年级下·江苏扬州·期末）

27．【问题情境】

在综合实践课上，同学们以“正方形和直线的旋转”为主题分组开展数学探究活动，已知正方形 $ABCD$，直线 PQ 经过点 A，并绕点 A 旋转，作点 B 关于直线 PQ 的对称点 E，直线 DE 交直线 PQ 于点 F，连结 AE、BE．

【操作发现】

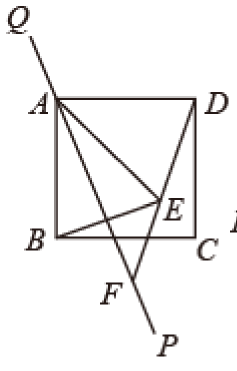
（1）如图 1，若 $\angle PAB=20°$．则 $\angle ADF=$____°，$\angle BEF=$____°.

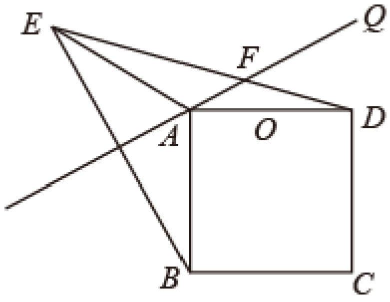
【拓展应用】

（2）如图 2，当直线 PQ 在正方形 $ABCD$ 的外部时

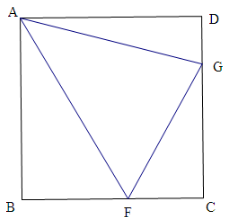
①判断 $\angle BEF$ 的度数是否为一个定值？如果是，请求出此定值；如果不是，请说明理由．

②线段 AB、DF、EF 之间存在特殊的数量关系，请写出这一关系式，并说明理由．



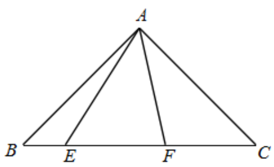


28．（1）如图，在正方形 ABCD 中，∠FAG=45°，请直接写出 DG，BF 与 FG 的数量关系，不需要证明．

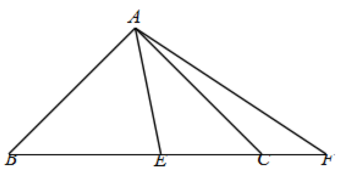


（2）如图，在 Rt△ABC 中，∠BAC=90°，AB=AC，E，F 分别是 BC 上两点，∠EAF=45°，

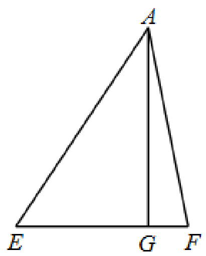
①写出 BE，CF，EF 之间的数量关系，并证明．



②若将（2）中的△AEF 绕点 A 旋转至如图所示的位置，上述结论是否仍然成立？ 若不成立，直接写出新的结论 ，无需证明．

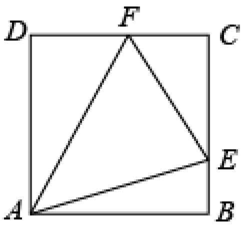


（3）如图，△AEF 中∠EAF=45°，AG⊥EF 于 G，且 GF=2，GE=3，则 $S_{\triangle AEF}=$_．

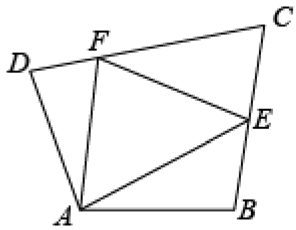


29．（1）如图①，在正方形$ABCD$中，E、F分别是BC、DC上的点，且$\angle EAF=45^{\circ}$，连接EF，探究BE、DF、EF之间的数量关系，并说明理由；

（2）如图②，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180^{\circ}$，$E$、$F$分别是$BC$、$DC$上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，此时（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由．

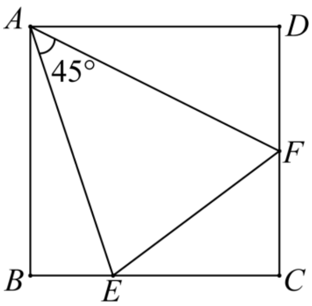


图①



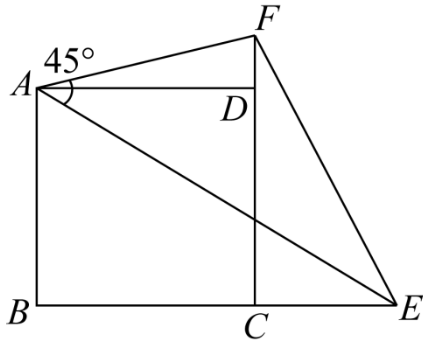
图②

30．探究：如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别为边BC，CD上的动点，且$\angle EAF=45^{\circ}$．

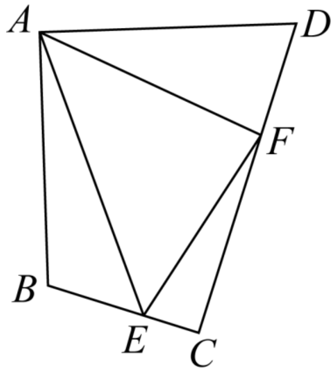


（1）如果将ΔADF绕点A顺时针方向旋转90°．请你画出图形（旋转后的辅助线）．你能够得出关于EF，BE，DF的一个结论是________．

（2）如果点E，F分别运动到BC，CD的延长线上，如图，请你能够得出关于EF，BE，DF的一个结论是________．

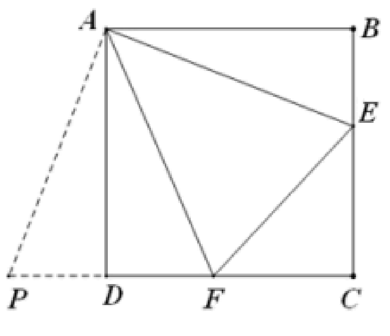


（3）变式：如图，将题目改为“在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，且$\angle ABC+\angle ADC=180°$，点$E$，$F$分别为边$BC$，$CD$上的动点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$”，请你猜想关于$EF$，$BE$，$DF$有什么关系？并验证你的猜想．



31．问题背景：如图1，在正方形$ABCD$中，点E、F分别在边BC、CD上，$\angle EAF=45°$，求证：$EF=BE+DF$．

洋洋同学给出了部分证明过程，请你接着完成剩余的证明过程．



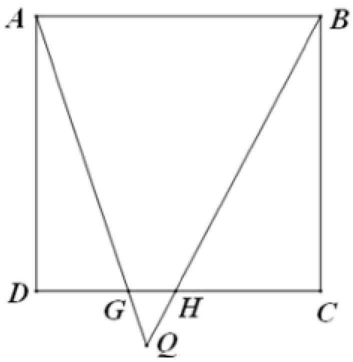
证明：延长FD到点P使$DP=BE$，连接AP，

$\because$正方形$ABCD$，$\therefore AB=AD$，$\angle ADP=\angle ABE=90°$，

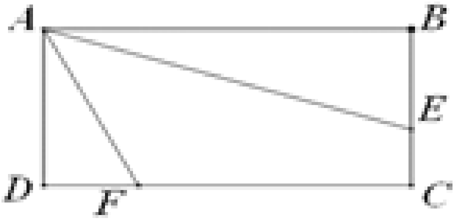
在$Rt\triangle ABE$和$Rt\triangle ADP$中，$\begin{cases} AB=AD \\ \angle ABE=\angle ADP \\ BE=DP \end{cases}$

$\therefore Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle ADP(SAS)$

迁移应用：如图 2，在正方形 $ABCD$ 中，QA、QB 交 CD 于点 G、H，若 $\angle AQB=45^\circ$，$CH=3$，$GH=1$，求 AG 的长．



联系拓展：如图 3，在矩形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 BC、CD 上，$\angle EAF=45^\circ$，若 $DF:AD:AB=1:2:4$，探究 BE 与 EC 的数量关系，并给出证明．



1．B

【分析】根据四边形$EFGH$为菱形，得出$EH=HG$，再根据三角形中位线定理得出$EH=\frac{1}{2}BD$ $HG=\frac{1}{2}AC$，从而得出$\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$，即可得出答案

【详解】解：满足的条件应为：$AC=BD$.

理由如下：∵E，F，G，H分别是边AB、BC、CD、DA的中点，

∴在$\triangle ADC$中，HG为$\triangle ADC$的中位线，

∴$HG=\frac{1}{2}AC$，$HG\parallel AC$

同理$EF=\frac{1}{2}AC$，$EF\parallel AC$，$EH=\frac{1}{2}BD$

∴$HG=EF$，$HG\parallel EF$

∴四边形$EFGH$为平行四边形，

∵$AC=BD$

∴$EH=HG$

∴平行四边形$EFGH$为菱形

故选：B.

【点睛】此题考查学生灵活运用三角形的中位线定理，平行四边形的判断及菱形的判断进行证明，是一道综合题.

2．C

【分析】根据三角形中位线定理可得$EF=GH=\frac{1}{2}AB$，$EH=FG=\frac{1}{2}CD$，再由菱形的判定，即可求解.

【详解】解：∵E、F、G、H分别是线段AD、BD、BC、AC的中点，

∴$EF=GH=\frac{1}{2}AB$，$EH=FG=\frac{1}{2}CD$，

∵当$EF=FG=GH=EH$时，四边形$EFGH$是菱形，

∴当$AB=CD$时，四边形$EFGH$是菱形.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了三角形中位线定理，菱形的判定，熟练掌握三角形中位线定理，菱形的判定定理是解题的关键.

3．3

【分析】根据平行四边形的性质可得$AD=BC,AO=\frac{1}{2}AC$，勾股定理求出AC，即可得解．

【详解】解：∵▱$ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，$AB\perp AC$，$AB=8$，$AD=10$，

$\therefore AD=BC=10,AO=\frac{1}{2}AC$，$\angle BAC=90^{\circ}$，

$\therefore AC=\sqrt{BC^{2}-AB^{2}}=6$，

$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=3$；

故答案为：3．

【点睛】本题考查平行四边形的性质，勾股定理．熟练掌握平行四边形的对边相等，对角线互相平分，是解题的关键．

4．平行四边形

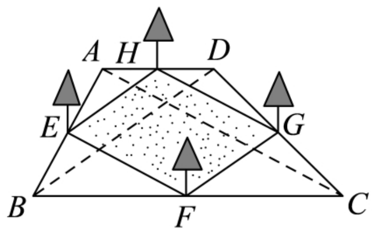
【分析】根据中位线定理可知，四边形$EFGH$的对边平行且相等，所以四边形$EFGH$是平行四边形．

【详解】解：连接AC，BD．

利用三角形的中位线定理可得$EH\parallel FG$，$EH=FG$．

∴这块草地的形状是平行四边形．

故答案为：平行四边形．

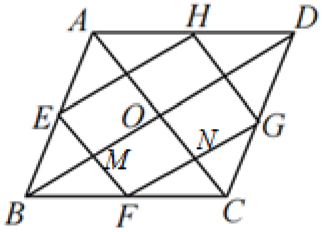


【点睛】本题考查的知识点为：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，注意结合实际．

5．12

【分析】利用三角形中位线定理，可以证明四边形$EFGH$和四边形$MFNO$是平行四边形，同时得到四边形$EFGH$的边长，再证明四边形$MFNO$是矩形，$\angle MFN$是直角，则四边形$EFGH$是矩形，即可求得面积．

【详解】解：如图，设EF交BD于点M，FG交AC于点N，



∵ E、F、G、H 是菱形 $ABCD$ 的各边中点，

∴$EH\parallel BD$，$FG\parallel BD$，$EF\parallel AC$，$GH\parallel AC$，$EH=FG=\frac{1}{2}BD=4$，$GH=EF=\frac{1}{2}AC=3$

∴$EH\parallel FG$，$EF\parallel GH$，$FM\parallel ON$，$FN\parallel OM$

∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形

∴$AC\perp BD$

∴$\angle MON=90°$

∴四边形 $EFGH$ 是矩形

∴四边形 $EFGH$ 的面积$=EF\times FG=12$

故答案为：12

【点睛】本题考查了三角形的中位线定理、菱形的性质、矩形的判定方法等知识，熟练掌握相关知识的应用是解题的关键.

6．(1)见解析

(2)当 $AC=BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形，理由见解析

【分析】（1）利用三角形中位线定理可得 $EH\parallel BD\parallel FG$，$EF\parallel AC\parallel HG$，然后由平行四边形的判定证明即可；

（2）补充条件为 $AC=BD$，利用三角形中位线定理可得 $EH=\frac{1}{2}BD$，$EF=\frac{1}{2}AC$，进而得出 $EF=EH$，最后利用菱形的判定证明即可.

【详解】（1）证明：∵点 E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、AD 的中点，

∴$EH\parallel BD$，$FG\parallel BD$，$EF\parallel AC$，$HG\parallel AC$，

∴$EH\parallel FG$，$EF\parallel HG$，

∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

（2）解：当 $AC=BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形，

理由如下：

∵点 E、F、H 分别是 AB、BC、AD 的中点，

$\therefore EH=\frac{1}{2}BD$， $EF=\frac{1}{2}AC$，

又 $AC=BD$，

$\therefore EH=EF$，

∴平行四边形 $EFGH$ 是菱形．

【点睛】本题考查三角形的中位线定理，平行四边形的判定与性质，菱形的判定，掌握三角形的中位线定理是解题的关键．

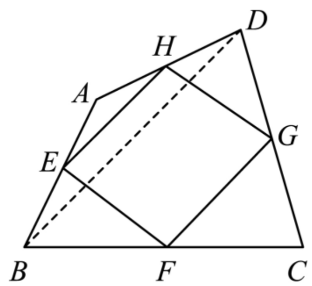
7．(1)见解析

(2)菱形，证明见解析

【分析】（1）连接 BD，根据三角形中位线定理可得 $FG\parallel BD,FG=\frac{1}{2}BD$，据此可得 $EH=FG$、$EH\parallel FG$，即可得证；

（2）连接 AC、BD，证 $\triangle APC\cong\triangle BPD$ 得 $AC=BD$，由 $EF=\frac{1}{2}AC,FG=\frac{1}{2}BD$ 知 $EF=FG$，结合四边形 $EFGH$ 是平行四边形即可得证．

【详解】（1）证明：如图 1 中，连接 BD，



(图1)

∵点 E、H 分别为边 AB、AD 的中点，

$\therefore EH\parallel BD,EH=\frac{1}{2}BD$，

∵点 F、G、分别为 BC、CD 的中点，

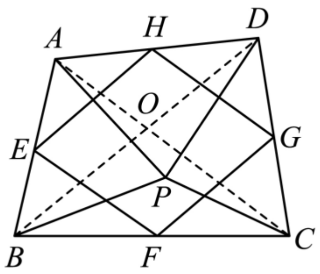
$\therefore FG\parallel BD,FG=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore EH=FG$、$EH\parallel FG$，

∴中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

（2）解：四边形 $EFGH$ 是菱形，理由如下：

如图 2，连接 AC、BD，



(图2)

$\because \angle APB=\angle CPD$，

$\therefore \angle APB+\angle APD=\angle CPD+\angle APD$，即 $\angle APC=\angle BPD$，

在 $\triangle APC$ 和 $\triangle BPD$ 中，

$$\begin{cases} AP=PB \\ \angle APC=\angle BPD \\ PC=PD \end{cases},$$

$\therefore \triangle APC \cong \triangle BPD(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AC=BD$，

$\because$点 E，F，G 分别为边 AB,BC,CD 的中点，

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}AC, FG=\dfrac{1}{2}BD$，

由（1）得：四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

$\therefore$四边形 $EFGH$ 是菱形.

【点睛】本题主要考查平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，菱形的判定和性质等知识，学会添加常用辅助线构造全等三角形是解题的关键.

8．(1)见解析

(2)四边形 $EFGH$ 为菱形，证明见解析

【分析】（1）连接 AC，由三角形中位线定理得出 $EF \parallel AC$，$EF=\dfrac{1}{2}AC$，$GH \parallel AC$，$GH=\dfrac{1}{2}AC$，得出 $EF \parallel GH$，$EF=GH$，即可得出结论；

（2）连接 AC、DB，由等边三角形的性质得出 $AM=DM$，$\angle AMD=\angle CMB=60°$，$CM=BM$，证出 $\angle AMC=\angle DMB$，由SAS证明 $\triangle AMC \cong \triangle DMB$，得出 $AC=DB$，由三角形中位线定理得出 $EF \parallel AC$，$EF=\dfrac{1}{2}AC$，$GH \parallel AC$，$GH=\dfrac{1}{2}AC$，$HE=\dfrac{1}{2}DB$，得出

$EF \parallel GH$， $EF = GH$，证出四边形$EFGH$是平行四边形；再得出$EF = HE$，即可得出结论．

【详解】（1）解：中点四边形$EFGH$是平行四边形；

理由如下：连接AC，如图1所示：

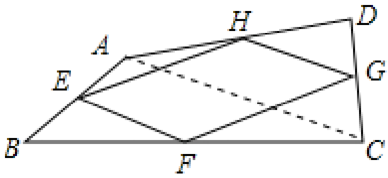


图1

$\because E$，F，G，H分别是边AB，BC，CD，DA的中点，

$\therefore EF$是$\triangle ABC$的中位线，GH是$\triangle ACD$的中位线，

$\therefore EF \parallel AC$， $EF = \dfrac{1}{2}AC$， $GH \parallel AC$， $GH = \dfrac{1}{2}AC$，

$\therefore EF \parallel GH$， $EF = GH$，

$\therefore$四边形$EFGH$是平行四边形；

故答案为：平行四边形；

（2）证明：四边形$EFGH$为菱形．理由如下：

连接AC与BD，如图2所示：

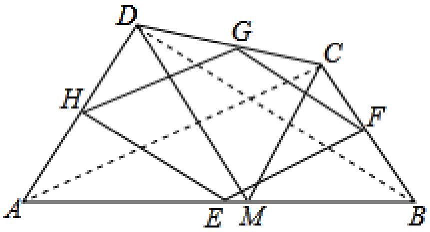


图2

$\because \triangle AMD$和$\triangle MCB$为等边三角形，

$\therefore AM = DM$， $\angle AMD = \angle CMB = 60^\circ$， $CM = BM$，

$\therefore \angle AMC = \angle DMB$，

在$\triangle AMC$和$\triangle DMB$中，

$$\begin{cases} AM = DM \\ \angle AMC = \angle DMB \\ CM = BM \end{cases},$$

$\therefore \triangle AMC \cong \triangle DMB(\text{SAS})$，

$\therefore AC = DB$，

$\because E$，F，G，H分别是边AB，BC，CD，DA的中点，

$\therefore EF$是$\triangle ABC$的中位线，GH是$\triangle ACD$的中位线，HE是$\triangle ABD$的中位线，

$\therefore EF \parallel AC$， $EF = \dfrac{1}{2}AC$， $GH \parallel AC$， $GH = \dfrac{1}{2}AC$， $HE = \dfrac{1}{2}DB$，

$\therefore EF \parallel GH$， $EF = GH$，

$\therefore$四边形$EFGH$是平行四边形；

$\because AC = DB$，

$\therefore EF = HE$，

$\therefore$四边形$EFGH$为菱形．

【点睛】本题考查了中点四边形、菱形的判定方法、三角形中位线定理、全等三角形的判定与性质；熟练掌握中点四边形，证明三角形全等得出$AC = DB$是解决问题（2）的关键．

9．B

【分析】根据正方形的性质得$AB=AD=DC$，$\angle BAD=\angle D=90°$，则由$CE=DF$易得$AF=DE$，根据“SAS”可判断$\triangle ABF \cong \triangle DAE$，所以$AE=BF$；根据全等的性质得$\angle ABF=\angle EAD$，利用$\angle EAD+\angle EAB=90°$得到$\angle ABF+\angle EAB=90°$，则$AE \perp BF$；连接$BE$，$BE>BC$，$BA \neq BE$，而$BO \perp AE$，根据垂直平分线的性质得到$OA \neq OE$；最后根据$\triangle ABF \cong \triangle DAE$得$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle DAE}$，则$S_{\triangle ABF}-S_{\triangle AOF}=S_{\triangle DAE}-S_{\triangle AOF}$，即$S_{\triangle AOB}=S_{四边形DEOF}$．

【详解】解：$\because$四边形$ABCD$为正方形，

$\therefore AB=AD=DC$，$\angle BAD=\angle D=90°$，

而$CE=DF$，

$\therefore AF=DE$，

在$\triangle ABF$和$\triangle DAE$中

$$\begin{cases} AB = DA \\ \angle BAD = \angle ADE \\ AF = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DAE$，

$\therefore AE=BF$，所以（1）正确；

$\therefore \angle ABF=\angle EAD$，

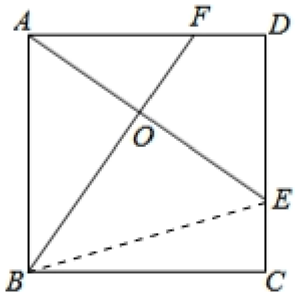
而$\angle EAD+\angle EAB=90°$，

$\therefore \angle ABF+\angle EAB=90°$，

$\therefore \angle AOB=90°$，

$\therefore AE \perp BF$，所以（2）正确；

连接BE，



$\because BE > BC$，

$\therefore BA \neq BE$，

而 $BO \perp AE$，

$\therefore OA \neq OE$，所以（3）错误；

$\because \triangle ABF \cong \triangle DAE$，

$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle DAE}$，

$\therefore S_{\triangle ABF} - S_{\triangle AOF} = S_{\triangle DAE} - S_{\triangle AOF}$，

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{四边形DEOF}$，所以（4）正确．

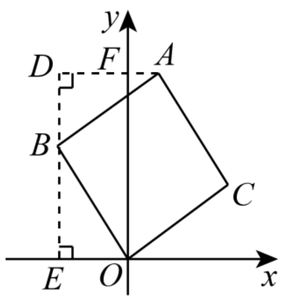
故选：B．

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，正方形的性质，解题的关键是掌握判定三角形全等的方法有“SSS”、“SAS”、“ASA”、“AAS”．

10．$(1,5)$

【分析】过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E，过点 A 作 $AD \perp BE$，交 EB 的延长线于点 D，AD 与 y 轴交点为点 F．证明 $\triangle ABD \cong \triangle BOE$，得到 AD、BD 的长，进而可求出点 A 的坐标．

【详解】



$\because$四边形 $ABOC$ 是正方形

$\therefore AB = BO$，$\angle ABO = 90°$

$\therefore \angle ABD + \angle EBO = 90°$

$\because BE \perp x$ 轴，$AD \perp BE$

$\therefore \angle BEO = \angle D = 90°$

$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 180° - \angle D = 90°$

$\therefore \angle BAD = \angle OBE$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BOE(\text{AAS})$

$\therefore AD = BE$， $DB = E0$

$\because$点 B 的坐标为$\left(-2,3\right)$

$\therefore BE = 3$， $EO = 2$

$\therefore AD = BE = 3$， $DB = EO = 2$

$\therefore DE = DB + BE = 2 + 3 = 5$

$\because \angle EOF = \angle BEO = \angle D = 90°$

$\therefore$四边形 $EOFD$ 是矩形

$\therefore FO = DE = 5$， $DF = EO = 2$

$\therefore AF = AD - DF = 3 - 2 = 1$

$\therefore$点 A 的坐标为$(1,5)$

故答案为：$(1,5)$

【点睛】本题考查的是图形与坐标，正方形的性质，三角形全等的判定及性质，掌握利用垂直证明三角形全等是解题的关键.

11．①②④

【分析】本题考查了正方形的四条边都相等，每一个角都是直角的性质，全等三角形的判定与性质，综合题但难度不大，求出$\triangle ABF$ 和$\triangle DAE$全等是解题的关键，也是本题的突破口.

根据正方形的性质可得$\angle BAF = \angle D = 90°$，$AB = AD = CD$，然后求出$AF = DE$，再利用“边角边”证明$\triangle ABF$ 和$\triangle DAE$全等，根据全等三角形对应边相等可得$AE = BF$，从而判定出①正确；再根据全等三角形对应角相等可得$\angle ABF = \angle DAE$，然后证明$\angle ABF + \angle BAO = 90°$，再得到$\angle AOB = 90°$，从而得出$AE \perp BF$，判断②正确；假设$AO = OE$，根据线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等的性质可得$AB = BE$，再根据直角三角形斜边大于直角边可得$BE > BC$，即$BE > AB$，从而判断③错误；根据全等三角形的面积相等可得$S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ADE}$，然后都减去$\triangle AOF$的面积，即可得解，从而判断④正确.

【详解】解：在正方形$ABCD$中，$\angle BAF = \angle D = 90°$，$AB = AD = CD$，

$\because CE=DF$，

$\therefore AD-DF=CD-CE$，

即 $AF=DE$，

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle DAE$ 中，

$$\begin{cases}AB=AD\\ \angle BAF=\angle D=90^\circ\\ AF=DE\end{cases}，$$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle DAE(\text{SAS})$，

$\therefore AE=BF$，故① 正确；

$\angle ABF=\angle DAE$，

$\because \angle DAE+\angle BAO=90^\circ$，

$\therefore \angle ABF+\angle BAO=90^\circ$，

在 $\triangle ABO$ 中，$\angle AOB=180^\circ-(\angle ABF+\angle BAO)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，

$\therefore AE\perp BF$，故② 正确；

假设 $AO=OE$，

$\because AE\perp BF$（已证），

$\therefore AB=BE$（线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等），

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，$BE>BC$，

$\therefore AB>BC$，这与正方形的边长 $AB=BC$ 相矛盾，

所以，假设不成立，$AO\neq OE$，故③ 错误；

$\because \triangle ABF\cong\triangle DAE$，

$\therefore S_{\triangle ABF}=S_{\triangle DAE}$，

$\therefore S_{\triangle ABF}-S_{\triangle AOF}=S_{\triangle DAE}-S_{\triangle AOF}$，

即 $S_{\triangle AOB}=S_{四边形DEOF}$，故④ 正确；

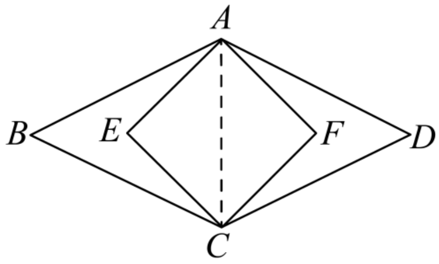
综上所述，正确的有①②④．

故答案为：①②④．

12．46

【分析】根据正方形和菱形的性质：一条对角线平分一组对角，即可求解．

【详解】解：连接 AC，如图所示：



$\because AC$ 平分 $\angle EAF, \angle BAD$

$\therefore \angle DAF = \angle BAE = 22°$

$\therefore \angle BAD = \angle EAF + BAE + \angle DAF = 134°$

$\because AB \parallel CD$

$\therefore \angle D = 180° - \angle BAD = 46°$

故答案为：46

【点睛】本题综合考查正方形和菱形的性质．熟悉相关性质是解题的关键．

13．证明见解析

【分析】根据正方形的性质得出 $AB = AD = CD$，$\angle BAD = \angle ADC = 90°$，根据已知条件得出 $AQ = DP$，证明 $\triangle ABQ \cong \triangle DAP(\text{SAS})$，得出 $\angle DAP = \angle ABQ$，根据等量代换得出 $\angle ABQ + \angle BAP = 90°$，即可得证．

【详解】解：在正方形 $ABCD$ 中，$AB = AD = CD$，$\angle BAD = \angle ADC = 90°$，

$\because DQ = CP$，

$\therefore AD - DQ = CD - CP$，

$\therefore AQ = DP$，

$\therefore \triangle ABQ \cong \triangle DAP(\text{SAS})$，

$\therefore \angle DAP = \angle ABQ$，

$\because \angle DAP + \angle BAP = 90°$，

$\therefore \angle ABQ + \angle BAP = 90°$，

$\therefore BQ \perp AP$．

【点睛】本题考查了正方形的性质，全等三角形的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键．

14．（1）=；（2）$GE = BF$，理由见解析；（3）①是，理由见解析；②$2\sqrt{17}$

【分析】（1）证明 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$ 即可得出结论；

（2）过点A作 $AN \parallel GE$，证明 $\triangle ABN \cong \triangle BCF(\text{AAS})$，由此可得 $AN = GE = BF$；

（3）①如图 3，连接CH，证明$\triangle ABH \cong \triangle CBH(\text{SAS})$，所以$\angle BAH=\angle BCH$，$AH=CH$；由折叠可知，$AH=AH'$，$NH=NH'$，由四边形内角和和平角的定义可得$\angle HNC=\angle NCH$，所以$NH=CH$，则$NH=CH=AH=AH'=NH'$，所以四边形$AHNH'$是菱形，再由“有一个角是直角的菱形是正方形”可得结论；

②作$H''Q\perp BC$交CB的延长线于点Q，作$HF\perp BC$于点M，可证明$\triangle H'QN \cong \triangle NFH'(\text{AAS})$，由此可得$H'Q=NF$；易证$\triangle BHF$是等腰直角三角形，所以$HF=BF=NF+BN$，则$NF=QB=QH'$，可得$\angle H'BQ=\angle ABH'=45°$，则$\angle H'BD=90°$；作$P$关于$BH'$的对称点$P'$，则$PH'=P'H'$，可得$PH'+\frac{\sqrt{2}}{2}AN=PH'+AH'=P'H'+AH'\geq AP'$，求出$AP'$的值即可得出结论.

【详解】解：（1）$\because AE\perp BF$，

$\therefore \angle EMB=90°$，

$\therefore \angle FBC+\angle BEM=90°$，

$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AB=BC$，$\angle ABC=\angle C=90°$，

$\therefore \angle FBC+\angle BFC=90°$，

$\therefore \angle BEM=\angle BFC$，

在$\triangle ABE$和$\triangle BCF$中，

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle C\\ \angle BEM=\angle BFC,\\ AB=BC\end{cases}$$

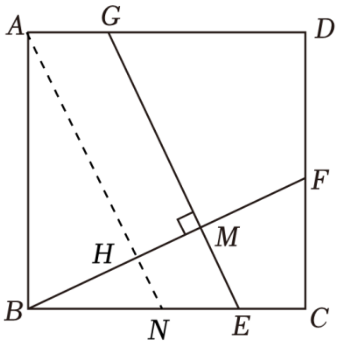
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF(\text{AAS})$，

$\therefore AE=BF$.

故答案为：=；

（2）$GE=BF$，理由如下：

如图 2，过点 A 作$AN\parallel GE$，交BF于点H，交BC于点N，



$\therefore \angle EMB = \angle NHB = 90^\circ$，

图2

$\therefore \angle FBC + \angle BNH = 90^\circ$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD \parallel BC$， $AB = BC$， $\angle BAD = \angle ABC = \angle C = 90^\circ$，

$\because AD \parallel BC$， $AN \parallel GE$，

$\therefore$ 四边形 $ANEG$ 是平行四边形，

$\therefore AN = EG$，

$\because \angle C = 90^\circ$，

$\therefore \angle FBC + \angle BFC = 90^\circ$，

$\therefore \angle BNH = \angle BFC$，

$\therefore \triangle ABN \cong \triangle BCF(\text{AAS})$，

$\therefore AN = BF$，

$\because AN = EG$，

$\therefore GE = BF$．

（3）①如图 3，连接 CH，

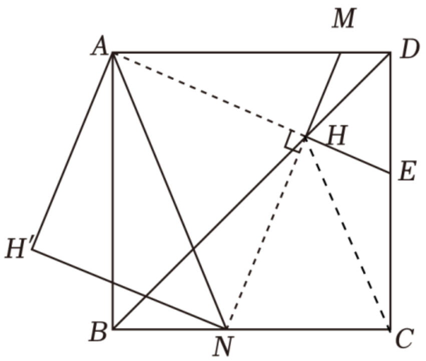


图3

由（2）的结论可知， $AE = MN$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， BD 是正方形的对角线，

$\therefore \angle ABD = \angle CBD = 45°$， $AB = BC$，

$\because BH = BH$，

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle CBH(\text{SAS})$，

$\therefore \angle BAH = \angle BCH$， $AH = CH$，

由折叠可知， $AH = AH'$， $NH = NH'$，

$\because \angle ABN + \angle AHN = 180°$，

$\therefore \angle BAH + \angle BNH = 180°$，

$\because \angle BNH + \angle HNC = 180°$，

$\therefore \angle BAH = \angle HNC$，

$\therefore \angle HNC = \angle NCH$，

$\therefore NH = CH$，

$\therefore NH = CH = AH = AH' = NH'$，

$\therefore$ 四边形 $AHNH'$ 是菱形，

$\because \angle AHN = 90°$，

$\therefore$ 菱形 $AHNH'$ 是正方形；

②如图 4，作 $H'Q \perp BC$ 交 CB 的延长线于点 Q，作 $HF \perp BC$ 于点 M，

$\therefore \angle H'QN = \angle HFB = 90°$，

由上知四边形 $AHNH'$ 是正方形，

$\therefore H'N = HN$， $\angle H'NH = 90°$， $AH' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AN$，

$\therefore \angle H'NQ + \angle HNF = \angle HNF + \angle NHF = 90°$，

$\therefore \angle H'NQ = \angle NHF$，

$\therefore \triangle H'QN \cong \triangle NFH'(\text{AAS})$，

$\therefore H'Q = NF$， $QN = HF$；

$\because \angle HBF = 45°$， $\angle HFB = 90°$，

$\therefore \triangle BHF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore HF = BF = NF + BN$，

$\because QN = QB + BN$，

$\therefore NF = QB = QH'$，

$\therefore \angle H'BQ = \angle ABH' = 45°$，