数　　学　　文　　化

第9章　非欧几何与数学真理性

章节目录

9.1 第五公设及其研究

欧氏几何的5条公设

（1）连接任何两点可以作一直线段。

（2）一直线段可以沿两个方向无限延长而成为直线。

（3）以任意一点为中心，通过任意给定的另一点可以作一圆。

（4）凡直角都相等。

（5）如果同一平面内任一条直线与另两条直线相交，同一侧的两内角之和小于两直角，则这两直线经适当延长后在这一侧相交。

（其等价命题是：在一个平面中，过已知直线外一点做直线的平行线能做一条且仅能做一条。）

由于第五公设与《原本》中的其它公设、公理应有的明显性、直观性和不证自明的真理程度相比，似乎有些差别，特别是在其叙述中还隐含有直线可以无限延长的涵义，由于它涉及到整个无限平面的非经验特征，而古希腊人对无限基本上采取了一种完全排斥的态度，因此就引起了人们的关注和不安。

即使对于欧几里得本人，好像对第五公设也有些底气不足。因为在《几何原本》中，凡可以不用第五公设证明的问题，欧氏都尽量避免使用它。

从公元前300年到公元1800年的两千多年时间里，几乎所有有作为的数学家、神学家都在第五公设上投入大量的精力：哲学家、神学家希望进一步完善欧氏几何的理想化地位，数学家则希望使几何的逻辑演绎体系更加完美。

总的说来，对第五公设的研究可以归为两类，一是试图找到更为自明的公设或命题来代替第五公设，一是试图用其他公理、公设等证明它，从而使它成为一个定理。

总之，在长达两千多年的时间中，尽管不同的数学家使用了不同的方法，却都没有获得成功。但是通过这些失败的努力，人们获得了一些极有价值的与第五公设等价的命题。如：

（1）每一个三角形的内角和都相等。

（2）通过一角内的任一点可以做与此角两边相交的直线。

（3）四边形的四内角之和等于四个直角。

（4）纯直于锐角的一条边的直线，必与此锐角的另一条边相交。

（5）存在一对同平面直线彼此处处等距离。

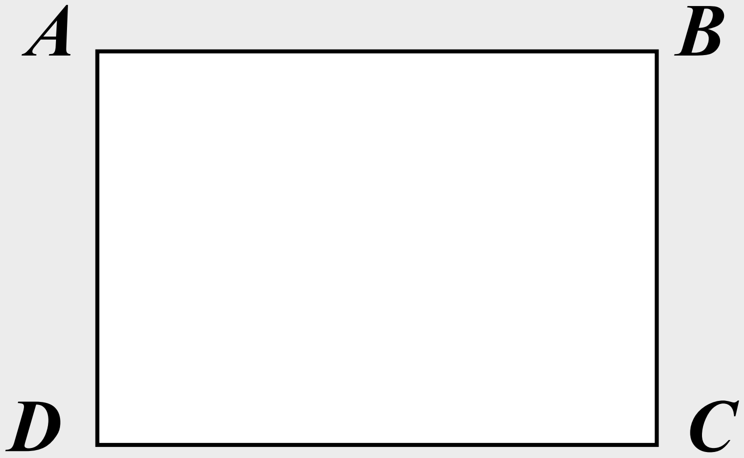
（6）过平面内已知直线外的一个已知点只能做一条直线平行于已知直线。

（7）过任何三个不在同一直线上的点可作一圆。

……

两千多年的失败历史无疑会促使一些数学家开始反面的努力，即是希望能从相反的规定引出矛盾而用归谬法证明第五公设。

历史上，首先试图利用归谬法证明第五公设的当首推数学家萨开里（Saccheri，1667~1733）。他经过复杂和艰苦的论证，发表了《排除任何谬误的欧几里得》一书。在这一著作中，他承认《几何原本》的前28个命题，即认为这些命题不需要第五公设。借助这些定理，他研究等腰双直角四边形，即四边形$ABCD$（如图），其中$AD=BC$，且$\angle A$ 和$\angle B$ 均为直角，作对角线AC和BD，[illegible] $\angle C = \angle D$



。

但他无法确定这两个角的大小。当然作为第五公设的推论，可推出这两个角均为直角，但是他不想采用此公设的假定。因而这两角可能均为直角、或均为钝角、或均为锐角。萨开里在这里坚持了开放的思想，并且把这三种可能性命名为直角假定、钝角假定、锐角假定。他的计划是，以证明了后两个导致矛盾来排除这两种可能，然后根据归谬法就只剩下第一个假定了。但是这个假定等价于欧几里得的第五公设。这么一来，平行公设就被证明了，欧几里得假定的缺陷就被排除了。

萨开里以其娴熟的几何技巧和卓越的逻辑洞察力证明了许多定理。现将其中较重要者列举如下：

1.直角假定 :三角形内角和等于两直角。

(1)给定一条直线和线外一点，过该点有一条直线与该直线不相交。

(2)立于固定直线上的定长垂线的定点轨迹是一条直线。

2.钝角假定：三角形内角和大于两直角。

(1)没有平行线。

(2)立于固定直线上的定长垂线的定点轨迹是凸曲线。

3.锐角假定 :三角形内角和小于两直角

(1) 给定一条直线和线外一点，过该点有无穷多条直线与该直线不相交。

(2)立于固定直线上的定长垂线的定点轨迹是凹曲线。

萨开里认为他已经在第五公设不成立的情况下找到了矛盾，从而就证明了第五公设。但是由于其证明中把有限图形的性质在没有理论证明的情况下任意地推广到了无限图形，从而犯了混淆范畴的错误。

1766年，瑞士的J.H.兰伯特（Lambert,1728~1777）写了一本标题为《平行线理论》的著作，作了类似的研究。

和萨开里一样，兰伯特按照三直角四边形的第四个角是直角、钝角或锐叫做了三个不同的假定。然而，兰伯特走得更远。例如，和萨开里一样，它证明了在这三个假定下分别可推出三角形内角和等于、大于或小于两个直角；

然后，他进一步证明了在钝角假定下大于两个直角的超出量和锐角假定下小于两直角的亏量均与三角形的面积成正比，他看到了由钝角假定推出的几何与球面几何的类似之点：在球面几何中，三角形的面积与其球面角盈成正比。他还猜测，由锐角假定推出的几何也许能在虚半径的球上被证实，这也猜对了。

兰伯特和萨开里一样，以默认直线为无限长这个假定来取消钝角假定。兰伯特的几何观点是十分先进的。他认识到任何一组假设如果不导致矛盾的话，一定提供一种可能的几何。

用归缪法证明欧几里得平行公设的第三个卓越贡献者是法国著名数学家勒让德（A.M.Legendre，1752~1833）。他对一特殊的三角形的内角和做出了三个不同的假定：等于、大于或小于两直角。他隐含地承认直线的无限性，因而取消第二假定；但是，尽管他作了种种尝试，还是没法排除第三个假定。

在兰伯特以后，德国法学家、业余数学家施外卡特（Schweikart，1780~1859）也对第五公设进行了研究，并把他的研究成果送给“数学王子”高斯征求意见。他把几何分为欧氏几何和假设三角形内角和不等于两直角的几何，并把后者称为“星空几何”。从历史的角度看，施外卡特已经认识到了第五公设事实上是一种经验的总结，是欧几里得对物质世界的经验概括，因此它的正确性、自明性就只存在于经验之中而非存在于逻辑证明之中。

既然第五公设是一种经验规律，那么，我们是否就可以想象不同的几何呢？

继承施外卡特的工作，他的外甥陶里努斯（**Taurinus，1794~1874**）也对“星空几何”进行了研究。但他也没有迈进非欧几何的大门。他只认为星空几何是一种没有逻辑错误的命题体系，而没有认识到这也是与欧氏几何相类似的一种几何体系。

兰伯特、施韦卡特、陶里努斯这三人，还有当时一些其他人都承认欧几里得平行公设不能证明，这三人也都注意到实球面上的几何具有以钝角假设为基础的性质，而虚球面上的几何则具有以锐角假设为基础的性质。这样，所有三个人都认识到非欧几里得几何的存在性，但他们都失去了一个基本点，即欧几里得几何不是唯一的在经验能够证实的范围内来描述物质空间的性质的几何。

9.2 非欧几何的诞生

从前面我们看到，尽管经过长时间的艰苦努力，萨开里、兰伯特和勒让德还是没有能以锐角（或钝角）假定为前提推出矛盾。这是因为由某一组基本假定加上锐角假定推出的那套几何，和由那一组基本假定加上直角假定推出的欧几里得几何一样是自相容的。换言之，平行公理不能作为定理从欧几里得的其它假定推出，它独立于其它那些假定。对于两千年来受传统偏见的约束，坚信欧几里得几何无疑是唯一可靠的几何，而任何与之矛盾的几何系统绝对是不可能相容的人来说，承认这样一种可能是要有不同寻常的想象力的。

9.2.1高斯的工作

高斯（Gauss,1777-1855），可以说他是真正预见到非欧几何的第一人。高斯的突出贡献在于，他清楚认识到非欧几何像欧氏几何一样也可能被用于描述物质空间。在非欧几何方面，他进行了长期的深入思考，作了大量的研究，获得了许多成果。高斯深信自己所获得的结果在逻辑上是相容的。他最初把这些结果称为“反欧几里得几何”，以后又叫“星空几何”，最后才称为“非欧几何”——这个名字一直沿用至今。

遗憾的是，高斯在世时并没有发表过一篇关于非欧几何的文章，他的思想是通过与好友的通信，对别人著作的几份评论，以及在他去世后从稿纸中发现的几份札记表达出来的。虽然他没有发表自己的发现，但是他竭力鼓励别人坚持这方面的研究。历史给予了他应有的地位，他被公认为是非欧几何的创始人之一。

高斯在研究中表明两点看法：

其一，第五公设不能用“人的理智”给出证明；

其二，对欧几里得几何与物理空间的性质具有先验的一致性“提出极大怀疑”。

为了证明非欧几何具有某种物理空间的实用性，高斯曾实测过由三个山峰构成的三角形的内角和，但由于三个山峰的距离还不够大，实验数据与误差值之间不好比较，因此这一实验最终未获得预期的效果。

高斯具有明确的非欧几何观念，相当完整地完成了非欧几何的创建工作；但是由于害怕“愚昧的人的叫嚷”，他却没有将这方面的研究成果公布于世。不过高斯去世之后他的书信的公布大大推动人们对非欧几何的认同和理解。

9.2.2 波尔约的工作

匈牙利数学家J·波尔约（J.Bolyai，又译鲍耶）对非欧几何的创立也做出了重大贡献。波尔约的父亲在哥廷根大学曾与高斯是同学，也曾长期研究过第五公设的问题，并与高斯经常有书信来往。受父亲的影响波尔约很早就思考过第五公设的问题。

波尔约的父亲并不赞同儿子对第五公设的研究，因为他知道这个问题在历史上曾消耗过许多数学家的青春；但是当儿子取得成果时，父亲还设法帮助他出版，并把结果写信告诉了高斯。

波尔约原期望获得高斯的认可和支持，但是这一期望却被高斯的来信彻底击破了。因为高斯在回信中说，这个结果“几乎完全与我心中已经深思熟虑了30到35年的一切心得相符合。这一点，实在使我震惊。”

从年代上讲，波尔约公开出版自己关于非欧几何的研究成果，要比首先发表这一方面成果的罗巴切夫斯基晚3年，但这个研究成果却是他独立得到的。波尔约对非欧几何做出了自己的杰出贡献，但他的工作在当时并没有引起人们的重视，只是到穷困多病去世后，非欧几何才被数学界所接受。

9.2.3罗巴切夫斯基（1792-1856）的工作

最完整、最先出版非欧几何研究成果的是俄罗斯的数学家罗巴切夫斯基（N.I.Lobatchevsky，1792~1856）。

罗巴切夫斯基毕业于俄国喀山大学并留校任教。早在1826年，他就完成了非欧几何的第一篇论文《几何原理简述和平行线定理的严格证明》。

在这篇文章中，罗巴切夫斯基论述了非欧几何的存在并指出了它的基本内容。但这一文章只在很小的学生范围内交流而没有正式发表。

1829年，罗巴切夫斯基在喀山大学校刊《喀山通讯》上发表的论文“论几何学原理”，这是数学史上最早的非欧几何论著。

在这一论文中，罗巴切夫斯基为阐述新几何学理论提出了一系列的新概念，且提出了一个较为著名的非欧几何原理：过直线外一点作此直线的垂线和平行线，两者所形成的角不是直角，而是比直角小。这个原理表明，在罗氏几何中三角形内角之和小于两直角。而且他指出，三角形越大，它的内角和就越比两直角小。

在说明非欧几何与欧氏几何的关系时，罗巴切夫斯基指出，欧氏几何可以看成非欧几何的极限状况，或者说是非欧几何的一种特例。于是，这两种几何就都有了在逻辑上各自存在和适用的范围，特殊地，这也就为非欧几何的存在提供了理论依据。

罗巴切夫斯基. Н.И.

下面简要叙述一下罗氏几何（又称双曲几何）与欧氏几何的主要不同之处。

（1）新的公理系统

罗巴切夫斯基几何学的公理系统与欧几里得的公理系统不同之处仅仅是把欧氏几何的“平行公理”代之以“在一个平面内经过直线外一点至少可以作两条直线与已知直线平行”。

如图9-3所示，经过直线α外一点A，可以作两条直线l1、l2与已知直线α平行。事实上，夹在l1、l2间的任何一条直线（图中虚线）都与直线α平行。l1、l2是两条“临界直线”，它们是整个“平行线α束”的边缘。

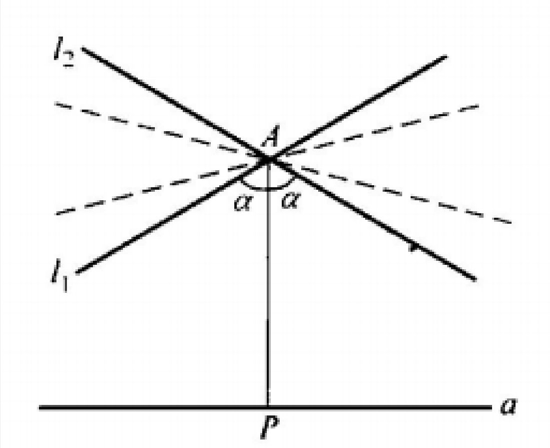


图9-3

（2）与欧氏几何一些不同的结论

罗切夫斯基几何学中有许多定理与欧几里得几何学定理是完全不同的。下面举出几个例子：

1）同一直线的垂线和斜线不一定相交。

2）如果两个三角形的三个内角相等，则这两个三角形全等（即在罗巴切夫斯基几何学中不存在相似三角形）。

3）过不在同一条直线上的三点，不一定能作一个圆。

4）三角形三内角之和小于180度，而且随着三角形的面积的增大而减小。

5）两条平行线之间不是处处等距。

如图9-4所示，临界直线l1上的各点与直线α的距离并不相等，而是越往右距离越来越短，且趋于0，但l1与α始终不相交。

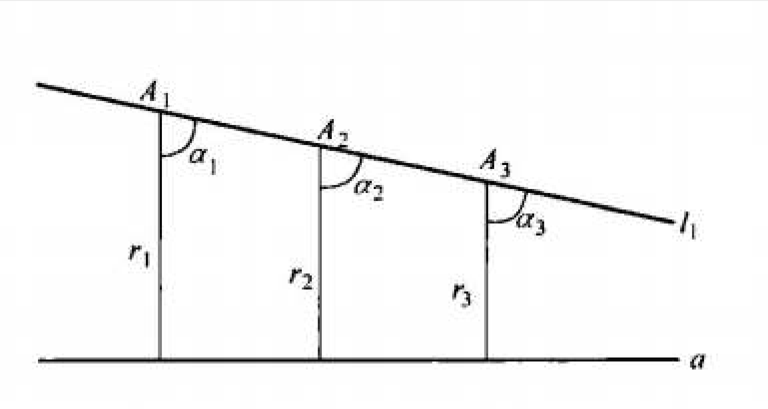


图9-4

如图9-5所示，类似欧氏几何中的双曲线，从A点往右各点与x轴的距离越来越小，但永远不会与x轴相交。

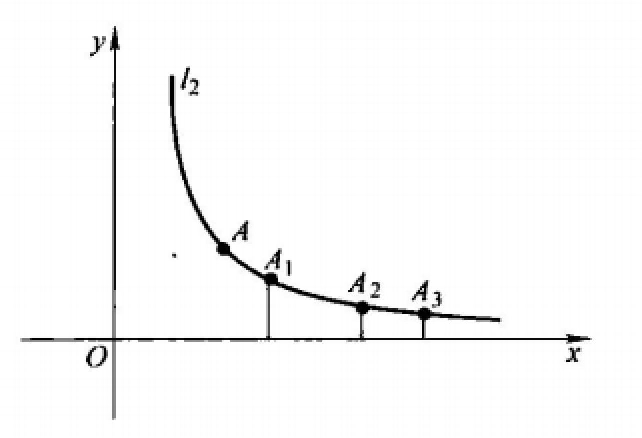


图9-5

如图9-6所示，过A作直线l垂直于AP，则l与α平行，但它不是临界直线（l夹在l1与l2之间）。l与α的距离也不是处处相等的，而是在A点处距离最短，向两边去则对称地增大。

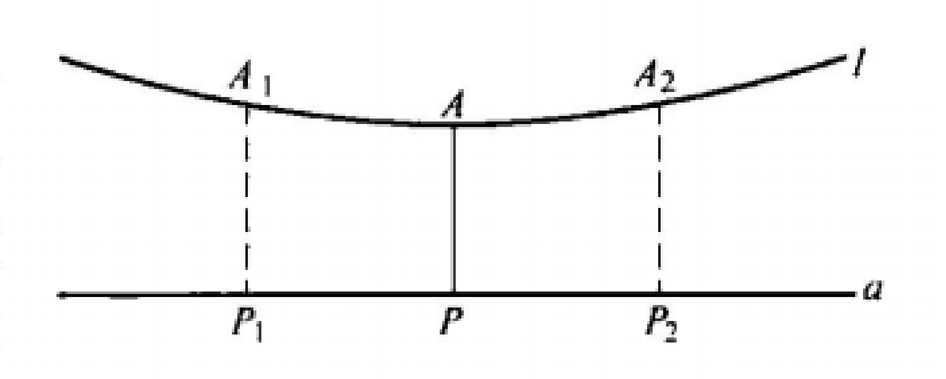


图9-6

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/747165064132006116