2022-2023 学年山东济南外国语学校高三年级 3 月联合考试数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

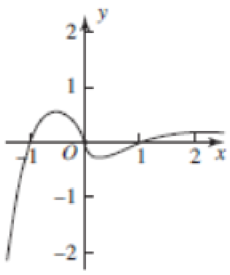
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若双曲线 E：$\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{n}=1\,(mn>0)$ 绕其对称中心旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 后可得某一函数的图象，则 E 的离心率等于（　　）

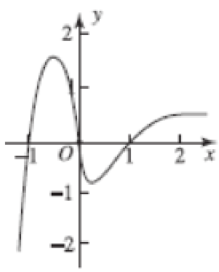
A． $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　**B．** $\sqrt{3}$　　**C．2 或** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　**D．2 或** $\sqrt{3}$

2．函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{e^x}$ 的大致图象为（　　）

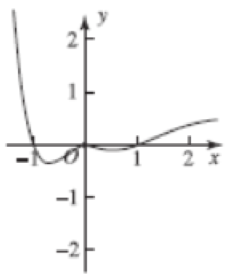
A．



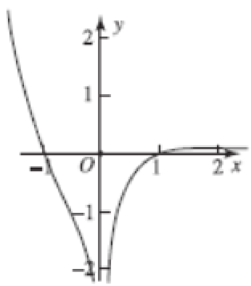
B．



C．



D．



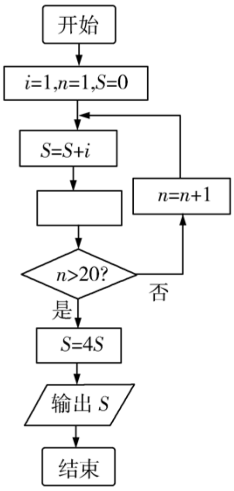
3．设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1+a_3+a_5=6$，$a_7=6$.则这个数列的前 7 项和等于（　　）

A．12　　**B．21**　　**C．24**　　**D．36**

4．已知函数 $f(x)=ax^2-4ax-\ln x$，则 $f(x)$ 在 $(1,4)$ 上不单调的一个充分不必要条件可以是（　　）

A． $a>-\dfrac{1}{2}$　　**B．** $0<a<\dfrac{1}{16}$　　**C．** $a>\dfrac{1}{16}$ 或 $-\dfrac{1}{2}<a<0$　　**D．** $a>\dfrac{1}{16}$

5．已知 $\dfrac{\pi}{4}\approx 1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots$，如图是求 π 的近似值的一个程序框图，则图中空白框中应填入



A. $i=-\frac{1}{2n-1}$　　B. $i=-\frac{1}{i+2}$

C. $i=\frac{(-1)^n}{2n+1}$　　D. $i=\frac{(-1)^n}{i+2}$

6．函数 $f\left(x\right)=x^3-x^2+x$ 的图象在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线为 l，则 l 在 y 轴上的截距为（　　）

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

7．记单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2+a_4=10$，$a_2a_3a_4=64$，则（　　）

A. $S_{n+1}-S_n=2^{n+1}$　　B. $a_n=2^n$　　C. $S_n=2^n-1$　　D. $S_n=2^{n-1}-1$

8．《九章算术》有如下问题：“今有金箠，长五尺，斩本一尺，重四斤；斩末一尺，重二斤，问次一尺各重几何?”意思是：“现在有一根金箠， 长五尺在粗的一端截下一尺，重 4 斤；在细的一端截下一尺，重 2 斤，问各尺依次重多少?”按这一问题的颗设，假设金箠由粗到细各尺重量依次成等差数列，则从粗端开始的第二尺的重量是（　　）

A. $\frac{7}{3}$ 斤　　B. $\frac{7}{2}$ 斤　　C. $\frac{5}{2}$ 斤　　D. 3 斤

9．设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 交于不同的两点 P，Q，若原点 O 在以 PQ 为直径的圆的外部，则直线 l 的斜率 k 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\sqrt{5},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$　　B. $\left(-\sqrt{5},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\sqrt{5}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{5}\right)$　　D. $\left(-\sqrt{5},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{5}\right)$

10．已知复数 z 满足 $z\cdot i^{2020}=1+i^{2019}$（其中 i 为虚数单位），则复数 z 的虚部是（　　）

A. -1　　B. 1　　C. $-i$　　D. i

11．已知集合 $A=\left\{(x,y)\mid y=x^2\right\}$，$B=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\right\}$，则 $A\cap B$ 的真子集个数为（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

12．已知 $y=\log_2\left(x^2-2x+17\right)$ 的值域为 $\left[m,+\infty\right)$，当正数 **a**，**b** 满足 $\frac{2}{3a+b}+\frac{1}{a+2b}=m$ 时，则 $7a+4b$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{9}{4}$　　B．5　　C．$\frac{5+2\sqrt{2}}{4}$　　D．9

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知 ΔABC 内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．$a=4$，$b=\sqrt{6}$，$A=\frac{\pi}{3}$ 则 $\cos 2B=$_________.

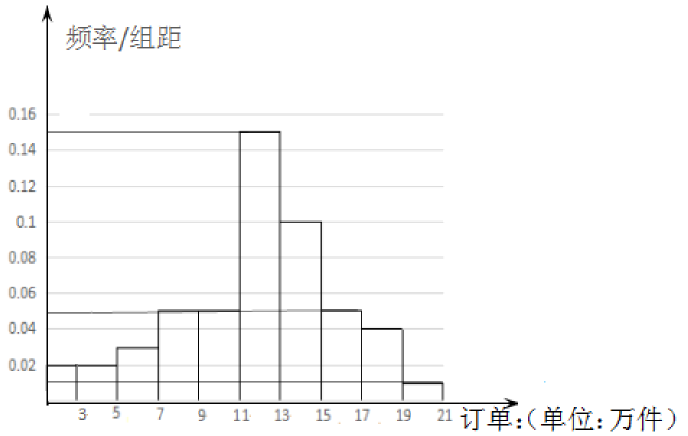
14．已知 $f\left(x\right)=e^x+e^{ax}$ 是偶函数，则 $f\left(x\right)$ 的最小值为___________.

15．若实数 **x**，**y** 满足约束条件 $\begin{cases}3x-y-2\ge 0\\ x+y-2\le 0\\ x+4y+4\ge 0\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最大值为________.

16．已知 $x,y\in R$，i 为虚数单位，且 $(x-2)i-y=-1+i$，则 $x+y=$_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）为了解网络外卖的发展情况，某调查机构从全国各城市中抽取了 **100** 个相同等级地城市，分别调查了甲乙两家网络外卖平台（以下简称外卖甲、外卖乙）在今年 **3** 月的订单情况，得到外卖甲该月订单的频率分布直方图，外卖乙该月订单的频数分布表，如下图表所示.



订单：（单位：万件）	$\left[3,5\right)$	$\left[5,7\right)$	$\left[7,9\right)$	$\left[9,11\right)$
频数	**1**	**2**	**2**	**3**

订单：（单位：万件）	$\left[11,13\right)$	$\left[13,15\right)$	$\left[15,17\right)$	$\left[17,19\right)$	$\left[19,21\right)$
频数	**40**	**20**	**20**	**10**	**2**

（1）现规定，月订单不低于 13 万件的城市为“业绩突出城市”，填写下面的列联表，并根据列联表判断是否有 90%的把握认为“是否为业绩突出城市”与“选择网络外卖平台”有关.

	业绩突出城市	业绩不突出城市	总计
外卖甲			
外卖乙			
总计			

（2）由频率分布直方图可以认为，外卖甲今年 3 月在全国各城市的订单数 Z（单位：万件）近似地服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$（同一组数据用该区间的中点值作代表），σ 的值已求出，约为 3.64，现把频率视为概率，解决下列问题：

①从全国各城市中随机抽取 6 个城市，记 X 为外卖甲在今年 3 月订单数位于区间 $(4.88,15.8)$ 的城市个数，求 X 的数学期望；

②外卖甲决定在今年 3 月订单数低于 7 万件的城市开展“订外卖，抢红包”的营销活动来提升业绩，据统计，开展此活动后城市每月外卖订单数将提高到平均每月 9 万件的水平，现从全国各月订单数不超过 7 万件的城市中采用分层抽样的方法选出 100 个城市不开展营销活动，若每按一件外卖订单平均可获纯利润 5 元，但每件外卖平均需送出红包 2 元，则外卖甲在这 100 个城市中开展营销活动将比不开展营销活动每月多盈利多少万元？

附：①参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.702	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

②若 $Z-N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z\leq\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z\leq\mu+2\sigma)=0.9544$.

18.（12 分）已知两数 $f(x)=\ln x+kx$.

（1）当 $k=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值点；

（2）当 $k=0$ 时，若 $f(x)+\dfrac{b}{x}-a\dots 0(a,b\in R)$ 恒成立，求 $e^{a-1}-b+1$ 的最大值.

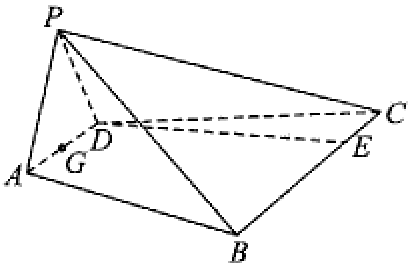
19.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax+\dfrac{b}{x}$（$a$，$b\in R$），且对任意 $x>0$，都有 $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

（Ⅰ）用含a的表达式表示b；

（Ⅱ）若$f\left(x\right)$存在两个极值点x_1，x_2，且$x_1<x_2$，求出a的取值范围，并证明$f\left(\frac{a^2}{2}\right)>0$；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，判断$y=f\left(x\right)$零点的个数，并说明理由.

20．（12分）如图，已知四棱锥$P-ABCD$的底面是等腰梯形，$AD//BC$，$AD=2$，$BC=4$，$\angle ABC=60°$，$\triangle PAD$为等边三角形，且点**P**在底面$ABCD$上的射影为AD的中点**G**，点**E**在线段BC上，且$CE:EB=1:3$.



（1）求证：$DE\perp$平面PAD.

（2）求二面角$A-PC-D$的余弦值.

21．（12分）已知抛物线$C:x^2=4y$与直线$l:x-2y-2=0$.

（1）求抛物线**C**上的点到直线**l**距离的最小值；

（2）设点$P\left(x_0,y_0\right)$是直线**l**上的动点，$Q(1,1)$是定点，过点**P**作抛物线**C**的两条切线，切点为**A**，**B**，求证**A**，**Q**，**B**共线；并在$\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{QB}$时求点**P**坐标.

22．（10分）已知函数$f(x)=2ax+bx-1-2\ln x(a\in R)$.

(Ⅰ)当$b=0$时，讨论函数$f(x)$的单调区间；

(Ⅱ)若对任意的$a\in[1,3]$和$x\in(0,+\infty)$，$f(x)\ge 2bx-3$恒成立，求实数b的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由双曲线的几何性质与函数的概念可知，此双曲线的两条渐近线的夹角为$60°$，所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}$，由离心率公式

$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 即可算出结果.

【详解】

由双曲线的几何性质与函数的概念可知，此双曲线的两条渐近线的夹角为$60°$，又双曲线的焦点既可在x轴，又可在y轴上，所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：**C**

【点睛】

本题主要考查了双曲线的简单几何性质，函数的概念，考查了分类讨论的数学思想.

2、**A**

【解析】

利用特殊点的坐标代入，排除掉**C**，**D**；再由$f(-\frac{1}{2})<1$判断**A**选项正确.

【详解】

$f(-1.1)=\frac{-1.1\ln|1.1|}{e^{1.1}}<0$，排除掉**C**，**D**；

$f(-\frac{1}{2})=\frac{-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{2}\right|}{e^{-\frac{1}{2}}}=\sqrt{e}\ln\sqrt{2}$，

$\because \ln\sqrt{2}<\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$，$\sqrt{e}<2$，

$\therefore f(-\frac{1}{2})=\sqrt{e}\ln\sqrt{2}<1$.

故选：**A**.

【点睛】

本题考查了由函数解析式判断函数的大致图象问题，代入特殊点，采用排除法求解是解决这类问题的一种常用方法，属于中档题.

3、**B**

【解析】

根据等差数列的性质可得a_3，由等差数列求和公式可得结果.

【详解】

因为数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1+a_3+a_5=6$，

所以$3a_3=6$，即$a_3=2$，

又$a_7=6$，

所以$d=\dfrac{a_7-a_3}{7-3}=1$，$a_1=a_3-2d=0$，

故$S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=21$

故选：***B***

【点睛】

本题主要考查了等差数列的通项公式，性质，等差数列的和，属于中档题.

4、**D**

【解析】

先求函数在$(1,4)$上不单调的充要条件，即$f'(x)=0$在$(1,4)$上有解，即可得出结论.

【详解】

$f'(x)=2ax-4a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-4ax-1}{x}$，

若$f(x)$在$(1,4)$上不单调，令$g(x)=2ax^2-4ax-1$，

则函数$g(x)=2ax^2-4ax-1$对称轴方程为$x=1$

在区间$(1,4)$上有零点（可以用二分法求得）.

当$a=0$时，显然不成立；

当$a\neq 0$时，只需$\begin{cases}a>0\\g(1)=-2a-1<0\\g(4)=16a-1>0\end{cases}$

或$\begin{cases}a<0\\g(1)=-2a-1>0\\g(4)=16a-1<0\end{cases}$，解得$a>\dfrac{1}{16}$或$a<-\dfrac{1}{2}$.

故选:**D.**

【点睛】

本题考查含参数的函数的单调性及充分不必要条件，要注意二次函数零点的求法，属于中档题.

5、**C**

【解析】

由于$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots$ 中正项与负项交替出现，根据$S=S+i$可排除选项**A**、**B**；执行第一次循环：$S=0+1=1$

，①若图中空白框中填入$i=\frac{(-1)^n}{2n+1}$，则$i=-\frac{1}{3}$，②若图中空白框中填入$i=\frac{(-1)^n}{i+2}$，则$i=-\frac{1}{3}$，此时$n>20$不成立，$n=2$；执行第二次循环：由①②均可得$S=1-\frac{1}{3}$，③若图中空白框中填入$i=\frac{(-1)^n}{2n+1}$，则$i=\frac{1}{5}$，④若图中空白框中填入$i=\frac{(-1)^n}{i+2}$，则$i=\frac{3}{5}$，此时$n>20$不成立，$n=3$；执行第三次循环：由③可得$S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$，符合题意，由④可得$S=1-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}$，不符合题意，所以图中空白框中应填入$i=\frac{(-1)^n}{2n+1}$，故选 **C**.

6、**A**

【解析】

求出函数在$x=1$处的导数后可得曲线在$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程，从而可求切线的纵截距.

【详解】

$f'\left(x\right)=3x^2-2x+1$，故$f'\left(1\right)=2$，

所以曲线$y=f\left(x\right)$在$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为：$y=2\left(x-1\right)+f\left(1\right)=2x-1$.

令$x=0$，则$y=-1$，故切线的纵截距为-1.

故选：**A.**

【点睛】

本题考查导数的几何意义以及直线的截距，注意直线的纵截距指直线与y轴交点的纵坐标，因此截距有正有负，本题属于基础题.

7、**C**

【解析】

先利用等比数列的性质得到a_3的值，再根据a_2,a_4的方程组可得a_2,a_4的值，从而得到数列的公比，进而得到数列的通项和前n项和，根据后两个公式可得正确的选项.

【详解】

因为$\left\{a_n\right\}$为等比数列，所以$a_3^2=a_2a_4$，故$a_3^3=64$即$a_3=4$，

由$\begin{cases}a_2+a_4=10\\a_2a_4=16\end{cases}$可得$\begin{cases}a_2=2\\a_4=8\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=8\\a_4=2\end{cases}$，因为$\left\{a_n\right\}$为递增数列，故$\begin{cases}a_2=2\\a_4=8\end{cases}$符合.

此时$q^2=4$，所以$q=2$或$q=-2$（舍，因为$\left\{a_n\right\}$为递增数列）.

故$a_n=a_3q^{n-3}=4\times2^{n-3}=2^{n-1}$，$S_n=\frac{1\times\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^n-1$.

故选 **C.**

【点睛】

一般地，如果$\{a_n\}$为等比数列，S_n为其前n项和，则有性质：

（1）若$m,n,p,q\in N^*,m+n=p+q$，则$a_m a_n=a_p a_q$；

（2）公比$q\neq 1$时，则有$S_n=A+Bq^n$，其中A,B为常数且$A+B=0$；

（3）$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$ 为等比数列（$S_n\neq 0$ ）且公比为q^n．

8、**B**

【解析】

依题意，金箠由粗到细各尺重量构成一个等差数列，$a_1=4$则$a_5=2$，由此利用等差数列性质求出结果．

【详解】

设金箠由粗到细各尺重量依次所成得等差数列为$\{a_n\}$，设首项$a_1=4$，则$a_5=2$，$\therefore$公差$d=\dfrac{a_5-a_1}{5-1}=\dfrac{2-4}{5-1}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore a_2=a_1+d=\dfrac{7}{2}$．

故选 **B**

【点睛】

本题考查了等差数列的通项公式，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

9、**D**

【解析】

设直线l：$y=kx+2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由原点O在以PQ为直径的圆的外部，可得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}>0$，联立直线$l$与椭圆$C$方程，结合韦达定理，即可求得答案．

【详解】

显然直线$x=0$不满足条件，故可设直线l：$y=kx+2$，

$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=kx+2\end{cases}$，得$(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$，

$\because \Delta=64k^2-24(1+2k^2)>0$，

$\therefore$解得$k>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$或$k<-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{8k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{6}{1+2k^2}$，