10.8 方向导数与梯度

10.8.1 方向导数

定义10.5 (方向导数)

设二元函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内有定义，$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$为单位向量.如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处沿方向$\vec{l}$的**方向导数**，记为$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$，或$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$.

如果函数$f(x,y)$在区域D内任何一点(x,y)处沿方向$\vec{l}$的方向导数都存在，则$\dfrac{\partial f}{\partial l}$为$D$内的一个函数，称为$f(x,y)$沿方向$\vec{l}$的方向导函数(简称方向导数).

偏导数 $$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

分别是函数在某点沿平行于坐标轴的直线的变化率.

当函数 $f(x,y)$ 在点$P(x,y)$的偏导数f'_x, f'_y

存在时，函数$f(x,y)$在点$P(x,y)$沿x轴正向

$\vec{l}=(1,0)$ 的方向导数存在，且值为f'_x.

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=f'_x(x,y)$$

同理，函数 $f(x,y)$在点$P(x,y)$沿y轴正向

$\vec{l}=(0,1)$的方向导数存在，且值为f'_y.

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=f'_y(x,y)$$

函数 $f(x,y)$在点$P(x,y)$沿x轴负向$\vec{l}=(-1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=-f'_x(x,y)$$

函数 $f(x,y)$在点$P(x,y)$沿y轴负向 $\vec{l}=(0,-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y-\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=-f'_y(x,y)$$

类似, 可定义三元函数的方向导数

三元函数 $u=f(x,y,z)$, 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$

沿着方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

其中 α,β,γ 为 $\vec{l}$ 的方向角

定理10.12 如果$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$**处可微,**

则函数$f(x,y)$在该点沿任意方向$\vec{l}$的方向导数都存在,

且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$为$\vec{l}$的方向余弦

证 由于函数可微,　则

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\Delta y+o(\rho),\quad \text{其中 } \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

特别地, 取 $\Delta x = t\cos\alpha, \Delta y = t\cos\beta$, 则 $\rho = |t|$.

故 $$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta z}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot\frac{\Delta x}{t} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cdot\frac{\Delta y}{t} + \frac{o(|t|)}{t}\right]$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta$$

类似地, 如果三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$

处可微, 则在该点沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数都存在,

且
$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} \cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 $\vec{l}$ 的方向余弦

例1 考虑函数 $z=x^3y^2$, 定点 $P_0(3,1)$, $P_1(2,3)$.

求函数在 P_0 沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数.

解 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}=3x^2y^2\big|_{P_0}=27$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=2x^3y\big|_{P_0}=54$

$$\overrightarrow{P_0P_1}=(-1,2),\qquad |\overrightarrow{P_0P_1}|=\sqrt{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{5}},\qquad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{P_0}=27\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+54\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{81}{\sqrt{5}}$$

例2 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在 P 点处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解 令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$,

$$F'_x\big|_P=4x\big|_P=4,\ F'_y\big|_P=6y\big|_P=6,\quad F'_z\big|_P=2z\big|_P=2$$

故 $\vec{n}=\left(F'_x\big|_P, F'_y\big|_P, F'_z\big|_P\right)=(4,6,2)$,

$|\vec{n}|=\sqrt{4^2+6^2+2^2}=2\sqrt{14}$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}, \quad P(1,1,1)$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}$$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P=\frac{11}{7}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/756130033015010210