4.3.1 等比数列的概念

复习引入

1. 等比数列

符号语言：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\in N^*)$或$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geq 2,n\in N^*)$

2. 通项公式

$a=a_1q''-1$ → an=amq”-m

3. 等比中项

$\boxed{a,G,b\text{ 成等比数列}}$ → $G^2=a\cdot b$, 即$G=\pm\sqrt{ab}$

4. 等比数列的判断

证明 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$或$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geq 2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{(a_n)^2=a_{n-1}.a_{n+1}}$

探究新知

在等差数列{a,} 中，公差为d

(1) 若m+n=p+q,　则am+a=a,+a,(m,n,P,q∈N)

即：下标和相等，对应项的和相等

特别地，若m+n=2k，则
am+a=2a₄(m,n,k,∈N)

在等比数列{a,} 中，公比为q

(1) 若m+n=p+q,　则
a·a₄=a,·a₂(m,n,P,q∈N')

即：下标和相等，对应项的积相等

特别地，若m+n=2k，则an·a₄=a²(m,n,k∈N*)

⇔若 m,n,k,(m,n,k∈N*) 成等差数列，则

a,,a,a₄

成等比数列.

注意：等号两侧的项数必须相同

探究新知

等差数列：

（2）在有穷数列中，与首末两项“等距离”的两项之和等于首末两项的和

即：$q_1+a,=a_2+a-=\cdots=a+a-k+1=\cdots$

等比数列：

（2）在有穷数列中，与首末两项“等距离”的两项之积等于首末两项的积

即：$a_1\cdot a_4=a_2\cdot a_2=\ldots=a_4\cdot an\text{-}k+1=\ldots$

小试牛刀

1. 已知{a, }是一个等比数列，请在下表中的空格处填入适当的数.

d_1	a_3	as	a_7	9
2	4	8	16	$\pm\sqrt{2}$
50	2	0.08	0.0032	0.2

2. 已知等比数列{a, }中， $a_1a_3=36$, $a_2+a_4=60$. 求a_1和公比q.

$a_1=2,q=3$ 或$a_1=-2,q=-3$

小试牛刀

3. 已知$\{a,\}$是等比数列，且 $a>0,a_2a_4+2a_3a_5+a_4G_6=36$,

那么a_3+a_5 的值等于. 6

4. 设数列$\{a,\}$是等比数列，且$a_5 \cdot a_6=81$， 则 $\log_3a_1+\log_3a_2+\ldots\ldots+\log_3a_0=$ 20

5. 等比数列$\{a,\}$ 中 ， $a_4G_7=-512,a_3+ag=124$, 公比为整数，则$a_{10}=$ 512

典例分析

例 1 用10000元购买某个理财产品一年.

(1)若以月利率0.400%的复利计息，12个月能获利多少利息(精确到1元)?

(2)若以季度复利计息，存4个季度，则当每季度利率为多少时，按季结算的利息不少于按月结算的利息.(精确到10-5)

	月初本金	月末本利 和
1个月	104	104(1+0.400%)
2个月	104(1+0.400%)	10^4 (1+0.400%)^2
3个月	104(1+0.400%)2	10^4 (1+0.400%)^3
…	4	·
12个月		10^4 (1+0.400%)11$10^4$ (1+0.400%)12

典例分析

例1　用10000元购买某个理财产品一年.

(1)若以月利率0.400%的复利计息，12个月能获利多少利息(精确到1元)?

解：(1)设这笔钱存n个月以后的本利和组成一个数列$\{a_n\}$，

则$\{a_n\}$是等比数列.

首项$a_1=10^4(1+0.400\%)$，　　　　公比$q=1+0.400\%$

所以，$a_1z=104(1+0.400\%)^{1}2\approx 10490.97$

所以，12个月后的利息为$10490.97-10000\approx 491$(元)

利息=本利和-本金

典例分析

例 1 用10000元购买某个理财产品一年.

(2)若以季度复利计息，存4个季度，则当每季度利率为多少时，按季结算的利息不少于按月结算的利息.(精确到10^{-5})

解：设季度利率为r,这笔钱存n个季度以后的本利和组成一个数列{bn},则{bn}也是一个等比数列,

首项$b_1=10^4(1+r)$, 公比$q=1+r$

所以，$b_4=10^4(1+r)^4$

因此，以季度复利计息，存4个季度后的利息为$[10^4(1+r)^4-104]$ 元

解不等式$[10^4(1+r)^4-104]\geq491$, 得 $r\geqslant1.206\%$

所以，当季度利率不小于1.206%时，按季结算的利息不少于按月结算的利息.

典例分析

例2 已知数列$\{a_1\}$的首项$a_1=3$.

(1)若数列{an}为等差数列，公差d=2, 证明数列$\{3^4 n\}$为等比数列；

(2)若数列{an}为等比数列，公比$q=\frac{1}{9}$, 证明数列$\{\log_3 an\}$为等差数列

分析：如何证明一个数列为等差数列或者等比数列

利用定义

等差数列： an+1-an=d

等比数列： “a=q

先求通项公式

证明：(1) 由a_1=3, d=2,　得{an}的通项公式为

an=2n+1

设b_2=30n　则 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}}=9$

又$b_1=3^3=27$

所以{3an}是27为首项，9为公比的等比数列

（2）由$a_1=3, q=\frac{1}{9}$, 得{an}的通项公式为$a_n=3\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}=3^{3-2n}$

两边取以3为底的对数，得$\log_3$an=log $3^{3-2n}=3-2n$

所以$\log_3$an+1−$\log_3$an=[3−2(n+1)]−(3−2n)=−2

又$\log_3 a_1=\log_3 3$　=1

所以{$\log_3$Qn}是首项为1, 公差为−2的等差数列

探究新知

思 考： 已 知b>0 且b≠1，如果数列{a,}是等差数列，那么数列{b⁴}是否一定是等比数列？ 如果数列{a,}是各项均为正的等比数列，那么数列{log, a,}是否一定是等差数列？

6=b=6二

性质1：数列{a,}是等差数列⇔数列{b⁴m}是等比数列.

108,0-10g0,=1o,a=tboso云

性质2：数列{a,}是正项等比数列⇔数列{log, a,}是等差数列.