预测 16　最值问题

中考预测

概率预测	☆　☆　☆　☆
题型预测	选择题、填空题☆　☆　☆　☆　☆
考向预测	“将军饮马”和“隐形圆”有关的最值问题

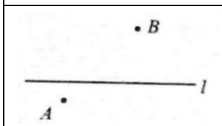
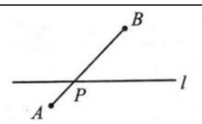
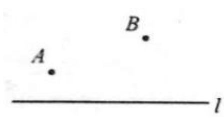
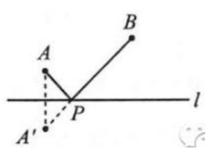
应试必备

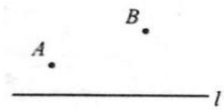
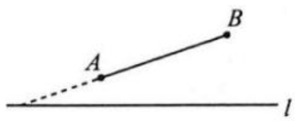
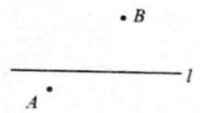
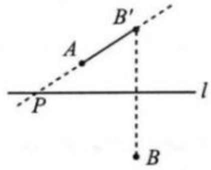
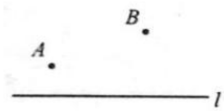
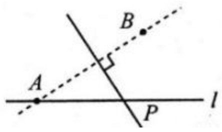
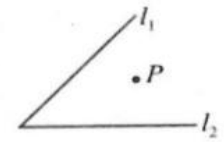
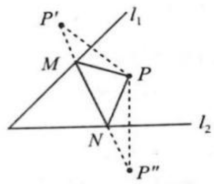
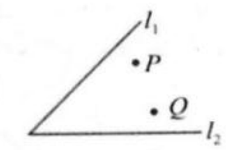
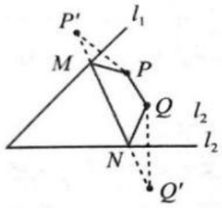
一、最值问题涉及的知识点有以下方面:

1. 两点之间线段最短
2. 垂线段最短
3. 三角形的三边关系
4. 定圆中的所有弦中，直径最长
5. 圆外一点与圆的最近点、最远点

6.借助转化为代数思想：一次函数和反比例函数增减性、二次函数的最值问题。

二、利用轴对称求最值

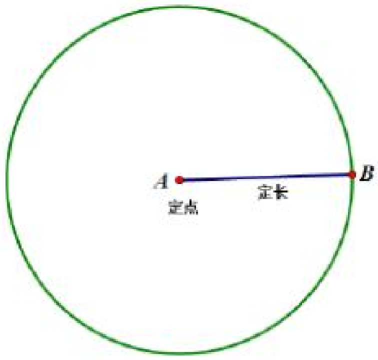
1、同侧或异侧两线段之和最小			
 在 l 上找一点 P，使 PA+PB 最小	连接 AB，交直线 l 与点 P		PA+PB=AB
 在 l 上找一点 P，使 PA+PB 最小	作点 A 关于直线 l 对称点 A'，连接 A'B 交直线 l 与点 P		PA+PB= A'B

2、同侧、异侧两线段之差最大、最小			
 在 l 上找一点 P,使 $\left\|PA-PB\right\|$ 最大	连接 BA 并延长交直线 l 与点 P		$\left\|PA-PB\right\|$=AB
 在 l 上找一点 P,使 $\left\|PA-PB\right\|$ 最大	作点 B 关于直线 l 对称点 $B^{'}$,连接 $AB^{'}$ 交直线 l 与点 P		$\left\|PA-PB\right\|=AB^{'}$
 在 l 上找一点 P,使 $\left\|PA-PB\right\|$ 最小	连接 AB,作线段 AB 的垂直平分线交直线 l 与点 P		$\left\|PA-PB\right\|$=0
3、三角形、四边形周长最小			
 在 l_1，l_2 上求点 M,点 N 使△PMN 的周长最小	作点 P 关于直线 l_1,直线 l_2 的对称点 $P^{'}$，$P^{''}$,连接 $P^{'}P^{''}$，与两直线交于点 M,N。		PM+PN+MN= $P^{'}P^{''}$
 在 l_1，l_2 上求点 M,点 N 使四边形 PMNQ 的周长最小	分别作点 P,点 Q 关于直线 l_1，直线 l_2 的对称点 $P^{'}$，$Q^{'}$，连接 $P^{'}Q^{'}$，交两直线与点 M,点 N		PQ+PM+MN+NQ= $P^{'}Q^{'}$+PQ

三、隐形圆

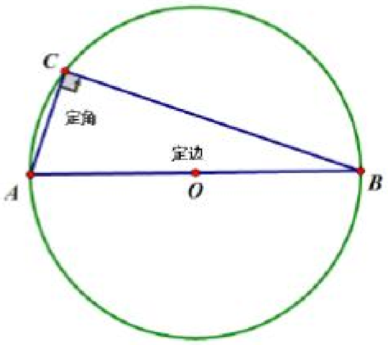
1. 定点+定长

一个动点到一个定点的距离是固定的长度，则这个动点的轨迹是圆。



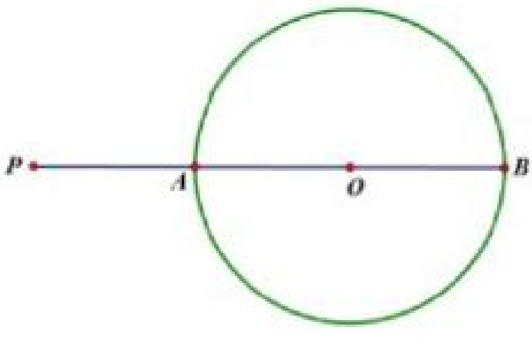
2. 定角+定长

如果一个角的度数是固定值，且这个角所对边的长度是固定值，那这个角的顶点轨迹是圆。



3. 有一组对角互补的四边形，四点共圆。

4. 最大值与最小值



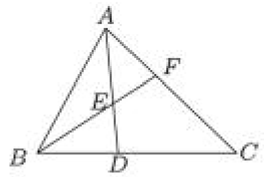
口诀：要求一点到圆长，连接点与圆心，交圆一侧为最短，另一侧为最长

如图 PA 为最短，PB 为最长。

真题回顾

1.（2021·江苏宿迁市·中考真题）如图，在△*ABC* 中，$AB=4$，$BC=5$，点 *D*、*E* 分别在 *BC*、*AC* 上，

$CD=2BD$，$CF=2AF$，BE交AD于点F，则△AFE面积的最大值是___________.



【答案】 $\frac{4}{3}$

【分析】连接DF，先根据相似三角形判定与性质证明$\frac{DE}{AE}=\frac{2}{3}$，得到$S_{\triangle AEF}=\frac{3}{5}S_{\triangle ADF}$，进而根据$CD=2BD$，$CF=2AF$，得到$S_{\triangle AEF}=\frac{2}{15}S_{\triangle ABC}$，根据△$ABC$中，$AB=4$，$BC=5$，得到当$AB\perp BC$时，△$ABC$面积最大，即可求出△$AFE$面积的最大值.

【详解】解：如图，连接DF，∵$CD=2BD$，$CF=2AF$，∴$\frac{CF}{CA}=\frac{CD}{CB}=\frac{2}{3}$，

∵∠C=∠C，∴△CDF∽△CBA，∴$\frac{DF}{BA}=\frac{CD}{CG}=\frac{2}{3}$，∠$CFD$=∠$CAB$，

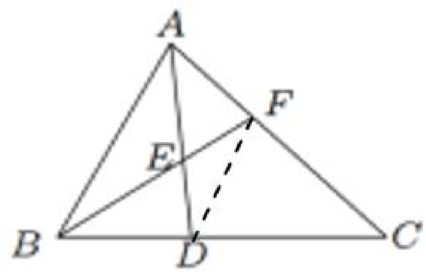
∴DF// BA，∴△DFE∽△ABE，∴$\frac{DF}{AB}=\frac{DE}{AE}=\frac{2}{3}$，∴$S_{\triangle AEF}=\frac{3}{5}S_{\triangle ADF}$，

∵$CF=2AF$，∴$S_{\triangle ADF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADC}$，∴$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{5}S_{\triangle ADC}$，

∵$CD=2BD$，∴$S_{\triangle ADC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$，∴$S_{\triangle AEF}=\frac{2}{15}S_{\triangle ABC}$，

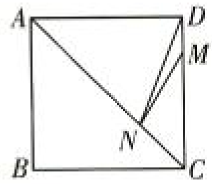
∵△ABC中，$AB=4$，$BC=5$，∴，当$AB\perp BC$时，△ABC面积最大，为$\frac{1}{2}\times4\times5=10$，

此时△AFE面积最大为$10\times\frac{2}{15}=\frac{4}{3}$．故答案为：$\frac{4}{3}$



【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，根据相似三角形的性质与判定得到$\frac{DE}{AE}=\frac{2}{3}$，理解等高三角形的面积比等于底的比是解题关键.

2.（2021·青海中考真题）如图，正方形$ABCD$的边长为8，M是DC边上一点，且$DM=2$，N是对角线AC上一动点，则$DN+MN$的最小值为_______.



【答案】10

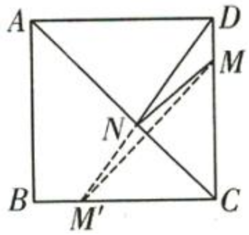
【分析】作点 M 关于 AC 的对称点 M'，连接 DM'，与 AC 交于点 N，则 $MN=M'N$，当 $DN+MN=DN+M'N=DM'$，此时 $DN+MN$ 的值最小，根据勾股定理求出 DM' 的最小值即可．

【详解】如图，作点 M 关于 AC 的对称点 M'，连接 DM'，与 AC 交于点 N，则 $MN=M'N$，

$\therefore DN+MN=DN+M'N=DM'$．此时 $DN+MN$ 的值最小．

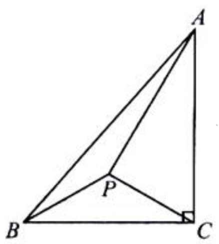
$\because DM=22$，$DC=8$，$\therefore MC=6$．$\therefore M'C=MC=6$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCM'$ 中，由勾股定理得 $DM'=\sqrt{M'C^2+DC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，即 $DN+MN$ 的最小值为 10．



【点睛】本题考查了正方形的动点问题，掌握对称点的做法、勾股定理是解题的关键．

3.（2021·湖北鄂州市·中考真题）如图，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=2\sqrt{3}$，$BC=3$．点 P 为 ΔABC 内一点，且满足 $PA^2+PC^2=AC^2$．当 PB 的长度最小时，ΔACP 的面积是（　　）



A．3　　B．$3\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【分析】由题意知 $\angle APC=90°$，又 AC 长度一定，则点 P 的运动轨迹是以 AC 中点 O 为圆心，$\dfrac{1}{2}AC$ 长为半径的圆弧，所以当 B、P、O 三点共线时，BP 最短；在 $Rt\Delta BCO$ 中，利用勾股定理可求 BO 的

长，并得到点 P 是 BO 的中点，由线段长度即可得到 ΔPCO 是等边三角形，利用特殊 $Rt\Delta APC$ 三边关系即可求解．

【详解】解：$\because PA^2+PC^2=AC^2$ $\therefore \angle APC=90°$

取 AC 中点 O，并以 O 为圆心，$\frac{1}{2}AC$ 长为半径画圆

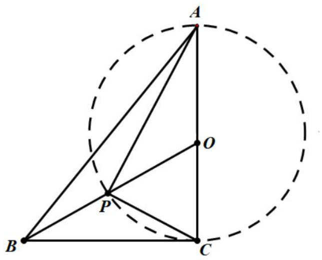
由题意知：当 B、P、O 三点共线时，BP 最短 $\therefore AO=PO=CO$

$\because CO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}, BC=3$ $\therefore BO=\sqrt{BC^2+CO^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore BP=BO-PO=\sqrt{3}$ $\therefore$ 点 P 是 BO 的中点

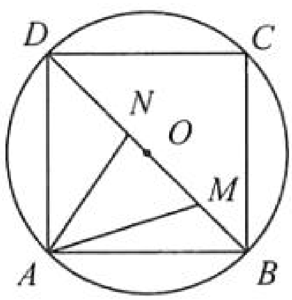
$\therefore$ 在 $Rt\Delta BCO$ 中，$CP=\frac{1}{2}BO=\sqrt{3}=PO$ $\therefore$ ΔPCO 是等边三角形 $\therefore$ $\angle ACP=60°$

$\therefore$ 在 $Rt\Delta APC$ 中，$AP=CP\times\tan 60°=3$ $\therefore S_{\Delta APC}=\frac{1}{2}AP\times CP=\frac{3\times\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



【点睛】本题主要考察动点的线段最值问题、点与圆的位置关系和隐形圆问题，属于动态几何综合题型，中档难度．解题的关键是找到动点 P 的运动轨迹，即隐形圆．

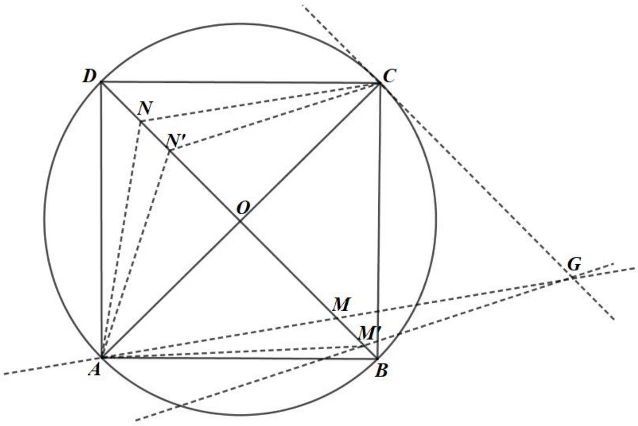
4.（2021·江苏连云港市·中考真题）如图，正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，线段 MN 在对角线 BD 上运动，若 $\odot O$ 的面积为 2π，$MN=1$，则 $\triangle AMN$ 周长的最小值是（　　）



A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【答案】B

【分析】利用将军饮马之造桥选址的数学方法进行计算．



【详解】如图所示，（1） N 为 BD 上一动点， A 点关于线段 BD 的对称点为点 C，连接 CN，则 $CN=AN$，过 A 点作 CN 的平行线 AG，过 C 点作 BD 的平行线 CG，两平行线相交于点 G， AG 与 BD 相交于点 M.

$\because CN//MG, NM//CG,$ $\therefore$ 四边形 $CNMG$ 是平行四边形 $\therefore MG=CN$ $\therefore MG=AN$

则 $C_{\triangle AMN}=AN+AM+NM=MG+AM+1$

（2）找一点 N'， 连接 CN'，则 $CN'=AN'$，过 G 点作 CN' 的平行线 MG，连接 AM' 则

$C_{\triangle AM'N'}=AN'+AM'+N'M'=AN'+AM'+CG=AN'+AM'+NM=AN'+AM'+1$.

此时 $AN+AM+1<AN'+AM'+1$ $\therefore C_{\triangle AMN}<C_{\triangle AM'N'}$ $\therefore$ （1）中 $\triangle AMN$ 周长取到最小值

$\because$ 四边形 $CNMG$ 是平行四边形 $\therefore \angle CNM=\angle NMA$ $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 $\therefore CO=OA$， $AC\perp BD$

又 $\because \angle CNM=\angle NMA$， $\angle NOC=\angle MOA$， $CO=OA$ $\therefore \triangle CNO\cong\triangle AOM\left(AAS\right)$ $\therefore ON=OM$

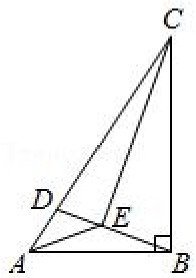
又 $\because AC\hat{\ }BD$ $\therefore AN=AM$ $\therefore \triangle ANM$ 是等腰三角形

$S=\pi r^2=2\pi$，则圆的半径 $r=\sqrt{2}$， $OM=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

$AM^2=r^2+OM^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ $\therefore AM=\frac{3}{2}$ $\therefore C_{\triangle AMN}=\frac{3}{2}\times 2+1=4$ 故选：B.

【点睛】本题难度较大，需要具备一定的几何分析方法．关键是要找到 $\triangle AMN$ 周长取最小值时 M、N 的位置．

5.（2021 广西贵港市中考）如图，在△*ABC* 中，∠*ABC*＝90°，*AB*＝8，*BC*＝12，*D* 为 *AC* 边上的一个动点，连接 *BD*，*E* 为 *BD* 上的一个动点，连接 *AE*，*CE*，当∠*ABD*＝∠*BCE* 时，线段 *AE* 的最小值是（　　）

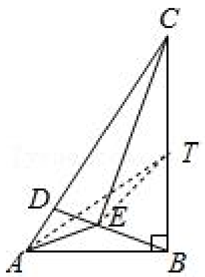


A. 3　　　　B. 4　　　　C. 5　　　　D. 6

【答案】B

【解析】如图，取 BC 的中点 T，连接 AT，ET. 首先证明∠CEB＝90°，求出 AT，ET，根据 AE⩾AT－ET，可得结论.

【解答】解：如图，取 BC 的中点 T，连接 AT，ET.



∵∠ABC＝90°，

∴∠ABD+∠CBD＝90°，

∵∠ABD＝∠BCE，

∴∠CBD+∠BCE＝90°，

∴∠CEB＝90°，

∵CT＝TB＝6，

∴ET＝$\frac{1}{2}BC$＝6，AT＝$\sqrt{AB^2+BT^2}$＝$\sqrt{8^2+6^2}$＝10，

∵AE⩾AT－ET，

∴AE⩾4，

∴AE 的最小值为 4，

故选：B.

6.（2021 年广东中考）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 90°, AB = 2, BC = 3$．点 D 为平面上一个动点，$\angle ADB = 45°$，则线段 CD 长度的最小值为_____.

【答案】$\sqrt{5}-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】由已知$\angle ADB=45°$，$AB=2$，根据定角定弦，可作出辅助圆，由同弧所对的圆周角等于圆心角的一半可知，点D在以O为圆心OB为半径的圆上，线段CD长度的最小值为$CO-OD$.

【详解】如图：以$\frac{1}{2}AB$为半径作圆，过圆心O作$ON\perp AB,OM\perp BC$，

以O为圆心OB为半径作圆，则点D在圆O上，

$\because \angle ADB=45°$

$\therefore \angle AOB=90°$

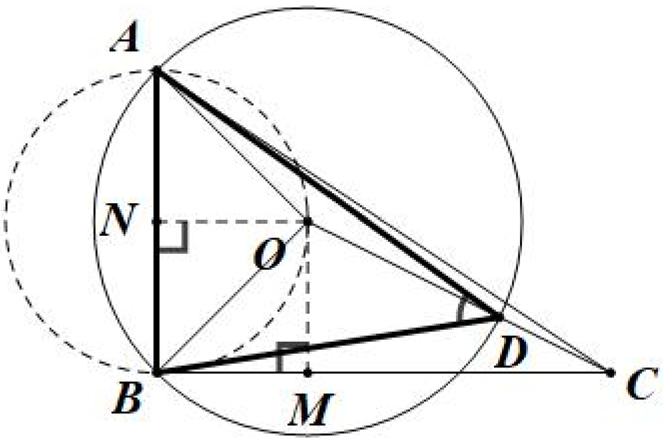
$\because AB=2$

$AN=BN=1$

$\therefore AO=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\because ON=OM=\frac{1}{2}AB=1$，$BC=3$

$\therefore OC=\sqrt{1^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$



$\therefore CO-OD=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

线段CD长度的最小值为:$\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

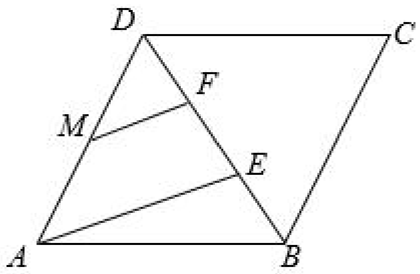
故答案为：$\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了圆周角与圆心角的关系，圆外一点到圆上的线段最短距离，勾股定理，正确的作出图形是解题的关键.

名校预测

1.（2021年河南省三甲名校中考数学内部押题试卷（一））如图，边长为4的菱形$ABCD$中，$\angle C$=

60°，点 M 为 AD 的中点，E、F 是对角线 BD 上的两个动点，且 $EF=2$，则线段 $MF+AE$ 的最小值为________.



【答案】$2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】取 CD、BC 中点 N、G，连接 FN，NG，EG，先根据菱形的性质、中位线的性质以及平行四边形的判定及性质证得 $MF=EG$，进而根据勾股定理求线段 AG 的长即可.

【详解】解：如图，取 CD、BC 中点 N、G，连接 FN，NG，EG，

∵在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle C=60°$，

∴$\triangle BCD$、$\triangle ABD$ 为等边三角形，

∴$BD=BC=CD=AB=AD=4$，$\angle ADC=\angle BDC=\angle C=60°$，$\angle ABC=120°$，

∵点 N、G 为 CD、BC 中点，点 M 为 AD 的中点，

∴$NG//BD$，$NG=\frac{1}{2}BD=2$，$DM=DN$，$BG=\frac{1}{2}BC=2$，

又∵$EF=2$，

∴$NG=EF$，$NG//EF$，

∴四边形 $EFNG$ 为平行四边形，

∴$EG=FN$，

∵$DM=DN$，$\angle ADC=\angle BDC$，$DF=DF$，

∴$\triangle DMF\cong\triangle DNF$（SAS）

∴$MF=NF$，

∴$MF=EG$，

∴$MF+AE=EG+AE$，

∵点 A、G 为定点，点 E 为线段 BD 上的动点，

∴当点 A、E、G 在同一直线上时，$EG+AE$ 即可取得最小值，为 AG 的长，此时 $MF+AE$ 的值最小，

如图，当点 A、E、G 在同一直线上时，

过点 G 作 $GH\perp AB$，交 AB 的延长线于点 H，

∴$\angle H=90°$

∵$\angle ABC=120°$，

∴$\angle BGH=\angle ABC-\angle H=30°$，

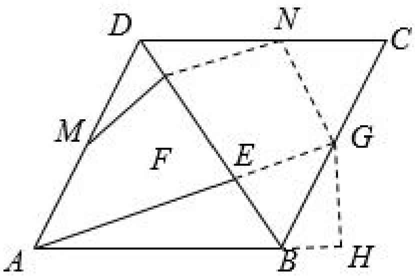
∴$BH=\frac{1}{2}BG=1$，

∴$AH=AB+BH=5$，

∵在 $Rt\triangle BGH$ 中，$GH^2=BG^2-BH^2=3$，

∴在 $Rt\triangle BGH$ 中，$AG=\sqrt{AH^2+GH^2}=2\sqrt{7}$，

∴$MF+AE$ 的最小值为 $2\sqrt{7}$，



故答案为：$2\sqrt{7}$.

【点睛】本题考查了菱形的性质、等边三角形的判定及性质、中位线的性质、平行四边形的判定及性质以及勾股定理，此题较难，能够灵活运用各种图形的性质及判定是解决本题的

2．（2021 年河南省安阳市安阳县中考数学适应性试题）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 AB 过点 $A(-2\sqrt{2},0)$，$B(0,2\sqrt{2})$，$\odot O$（O 为坐标原点）的半径为 1，点 P 在直线 AB 上，过点 P 作 $\odot O$ 的一条切线 PQ，Q 为切点，则切线长 PQ 的最小值为_______.