

考点 03 整式与因式分解



知识导航

整式与因式分解

考点1：代数式的概念与求值

考点3：整式的运算

考点5：因式分解

考点2：整式相关概念

考点4：整式化简求值



知识整理

一、代数式的概念及求值

1. 代数式的概念

用基本运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方等)把数与字母连接而成的式子叫做代数式。单独的一个数或者一个字母也是代数式。

2. 代数式的值

用具体数代替代数式中的字母，按运算顺序计算出的结果叫做代数式的值。求代数式的值分两步：第一步，代数；第二步，计算。要充分利用“整体”思想求代数式的值。

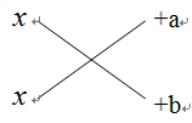
二、整式的相关概念

整式的相关概念	单项式	由数字或字母的乘积组成的式子；单项式中的数字因数叫做单项式的系数；单项式中所有字母指数的和叫做单项式的次数。 如：单项式 $-\frac{1}{2}\pi ab^3$ 系数是 $-\frac{1}{2}\pi$ ，次数是 4。
	多项式	几个单项式的和叫做多项式；多项式中，每一个单项式叫做多项式的项，其中不含字母的项叫做常数项；多项式中次数最高项的次数就是这个多项式的次数。 如：多项式 $2+4x^2y-\frac{1}{3}x^2y^3$ 是五次三项式
	整式	整式是单项式与多项式的统称。
	同类项	所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的单项式叫做同类项。
	合并同类项	把多项式中的同类项合并成一项叫做合并同类项，合并的法则是系数相加，所得的结果作为合并后的系数，字母和字母的指数不变。

三、整式的运算

整式运算	幂的运算	同底数幂乘法	$a^m \cdot a^n = a^{m+n} (a \neq 0)$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
		同底数幂除法	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (m, n \text{ 是正整数})$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
		幂的乘方	$(a^m)^n = a^{mn} (a \neq 0)$	$a^{mn} = (a^m)^n$
		积的乘方	$(ab)^n = a^n b^n$	$a^n b^n = (ab)^n$
	乘法公式	平方差公式	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
		完全平方公式	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
	整式加减	① 整式的加减其实就是合并同类项； ② 整式加减的步骤：有括号，先去括号；有同类项，再合并同类项。注意去括号时，如果括号前面是负号，括号里各项的符号要 变号 。		
	整式乘法	① 单项式与单项式相乘：把 系数 、 同底数幂 分别相乘，作为积的因式， 只 在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式。 ② 单项式与多项式相乘： $m(a+b+c) = ma + mb + mc$ 。 ③ 多项式与多项式相乘： $(m+n)(a+b) = ma + mb + na + nb$ 。		
	整式除法	① 单项式除以单项式：把系数、同底数幂相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的 指数 作为商的一个因式。 ② 多项式除以单项式： $(a+b) \div m = a \div m + b \div m$ 。		

四、分解因式

因式分解	概念	把一个多项式化成几个整式的 积 的形式，叫做多项式的因式分解。 和的形式变积的形式	
	因式分解方法	提公因式法	$ma + mb + mc = m(a + b + c)$ (乘法分配律的运用)
		公式法	① 运用平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。 ② 运用完全平方公式： $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 。
		十字相乘法	一般地， $x^2 + px + q = x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ 可以用十字交叉线表示 



考点讲解

【考点 1】代数式的概念与求值

【例 1】(2022·湖南长沙)为落实“双减”政策,某校利用课后服务开展了主题为“书香满校园”的读书活动.现需购买甲、乙两种读本共 100 本供学生阅读,其中甲种读本的单价为 10 元/本,乙种读本的单价为 8 元/本,设购买甲种读本 x 本,则购买乙种读本的费用为()

- A. $8x$ 元 B. $10(100-x)$ 元 C. $8(100-x)$ 元 D. $(100-8x)$ 元

【答案】C

【分析】根据题意列求得购买乙种读本 $(100-x)$ 本,根据单价乘以数量即可求解.

【详解】解:设购买甲种读本 x 本,则购买乙种读本 $(100-x)$ 本,乙种读本的单价为 8 元/本,则则购买乙种读本的费用为 $8(100-x)$ 元故选 C

【例 2】已知 a 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的根,则 $2022 - a^2 + 3a$ 的值为_____.

【答案】2018

【详解】∵ a 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的根,

$$\therefore a^2 - 3a - 4 = 0, \text{ 即 } -a^2 + 3a = -4,$$

$$\therefore 2022 - a^2 + 3a = 2022 + (-a^2 + 3a) = 2022 - 4 = 2018.$$

故答案为: 2018.

规律方法

整体代入法求代数式的值

(1) 直接整体代入求值: 如果已知的代数式与要求代数式之间含有相同的式子, 只要把已知式子的值直接代入到要求的式子中, 即可得出结果.

(2) 把已知式子变形后再整体代入求值: 在求代数式的值时, 如果题目中所求的代数式与已知代数式成倍数关系, 各字母的项的系数对应成比例, 就可以把这一部分看作一个整体, 再把要求的值的代数式变形后, 整体代计算求值.

跟踪训练

1. (2021·四川乐山市·中考真题)某种商品 m 千克的售价为 n 元, 那么这种商品 8 千克的售价为()

- A. $\frac{8n}{m}$ (元) B. $\frac{n}{8m}$ (元) C. $\frac{8m}{n}$ (元) D. $\frac{m}{8n}$ (元)

【答案】A

【分析】先求出 1 千克售价, 再计算 8 千克售价即可;

【详解】

$\because m$ 千克的售价为 n 元，

$\therefore 1$ 千克商品售价为 $\frac{n}{m}$ ，

$\therefore 8$ 千克商品的售价为 $\frac{8n}{m}$ (元)；

故选 A.

2. (2022·内蒙古包头) 若 a, b 互为相反数, c 的倒数是 4, 则 $3a+3b-4c$ 的值为 ()

A. -8

B. -5

C. -1

D. 16

【答案】C

【分析】根据 a, b 互为相反数, 可得 $a+b=0$, c 的倒数是 4, 可得 $c=\frac{1}{4}$, 代入即可求解.

【详解】 $\because a, b$ 互为相反数, $\therefore a+b=0$, $\because c$ 的倒数是 4, $\therefore c=\frac{1}{4}$,

$\therefore 3a+3b-4c=3(a+b)-4c=3\times 0-4\times \frac{1}{4}=-1$, 故选: C

3. (2022·湖南邵阳) 已知 $x^2-3x+1=0$, 则 $3x^2-9x+5=$ _____.

【答案】2

【分析】将 $3x^2-9x+5$ 变形为 $3(x^2-3x+1)+2$ 即可计算出答案.

【详解】 $3x^2-9x+5=3x^2-9x+3+2=3(x^2-3x+1)+2$

$\because x^2-3x+1=0$

$\therefore 3x^2-9x+5=0+2=2$

故答案为: 2.

4. (2022·吉林) 篮球队要购买 10 个篮球, 每个篮球 m 元, 一共需要_____元. (用含 m 的代数式表示)

【答案】 $10m$

【分析】根据“总费用=购买篮球的数量 \times 每个篮球的价格”即可得.

【详解】解: 由题意得: 一共需要的费用为 $10m$ 元,

故答案为: $10m$.

5. (2022·江苏·泰兴市济川初级中学七年级期中) 已知: $x-2y+3=0$, 则代数式 $-2x+4y-1$ 的值为_____.

【答案】5

【详解】解: $\because x-2y+3=0$,

$$\therefore x - 2y = -3,$$

$$\therefore -2x + 4y - 1 = -2(x - 2y) - 1$$

$$= -2 \times (-3) - 1$$

$$= 5,$$

故答案为：5.

6. (2022·江苏宿迁)某单位准备购买文化用品,现有甲、乙两家超市进行促销活动,该文化用品两家超市的标价均为10元/件,甲超市一次性购买金额不超过400元的不优惠,超过400元的部分按标价的6折售卖,乙超市全部按标价的8折售卖.

(1)若该单位需要购买30件这种文化用品,则在甲超市的购物金额为_____元;乙超市的购物金额为_____元;(2)假如你是该单位的采购员,你认为选择哪家超市支付的费用较少?

【答案】(1)300, 240(2)当 $0 < x \leq 40$ 时,选择乙超市更优惠,当 $x = 50$ 时,两家超市的优惠一样,当 $40 < x < 50$ 时,选择乙超市更优惠,当 $x > 50$ 时,选择甲超市更优惠.

【分析】(1)根据甲、乙两家超市的优惠方案分别进行计算即可;

(2)设单位购买 x 件这种文化用品,所花费用为 y 元,可得当 $0 < x \leq 40$ 时, $y_{甲} = 10x$, $y_{乙} = 10x' 0.8 = 8x$,显然此时选择乙超市更优惠,当 $x > 40$ 时 $y_{甲} = 400 + 0.6' 10(x - 40) = 6x + 100$, $y_{乙} = 10x' 0.8 = 8x$,再分三种情况讨论即可.

(1)解:Q 甲超市一次性购买金额不超过400元的不优惠,超过400元的部分按标价的6折售卖;

\therefore 该单位需要购买30件这种文化用品,则在甲超市的购物金额为 $30 \times 10 = 300$ (元),

\therefore 乙超市全部按标价的8折售卖,

\therefore 该单位需要购买30件这种文化用品,则在甲超市的购物金额为 $30' 10' 0.8 = 240$ (元),

故答案为: 300,240

(2)设单位购买 x 件这种文化用品,所花费用为 y 元,又当 $10x=400$ 时,可得 $x=40$,

当 $0 < x \leq 40$ 时, $y_{甲} = 10x$, $y_{乙} = 10x' 0.8 = 8x$,显然此时选择乙超市更优惠,

当 $x > 40$ 时, $y_{甲} = 400 + 0.6' 10(x - 40) = 6x + 100$, $y_{乙} = 10x' 0.8 = 8x$,

当 $y_{甲} = y_{乙}$ 时,则 $8x = 6x + 100$,解得: $x = 50$,

\therefore 当 $x = 50$ 时,两家超市的优惠一样,

当 $y_{甲} > y_{乙}$ 时,则 $6x + 100 > 8x$,解得: $x < 50$,

\therefore 当 $40 < x < 50$ 时,选择乙超市更优惠,

当 $y_{甲} < y_{乙}$ 时,则 $6x + 100 < 8x$,解得: $x > 50$,

C. $\frac{a^2-a}{a}$

D. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

【答案】A

【详解】解：A、 $2x+1$ 是多项式，故此选项符合题意；

B、 $\frac{1}{n}$ 是分式，不是多项式，故此选项不符合题意；

C、 $\frac{a^2-a}{a}$ 是分式，不是多项式，故此选项不符合题意；

D、 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 是等式，不是多项式，故此选项不符合题意；

故选：A.

4. 下列单项式中， a^2b^3 的同类项是 ()

A. a^3b^2

B. $2a^2b^3$

C. a^2b

D. ab^3

【答案】B

【分析】比较对应字母的指数,分别相等就是同类项

【详解】

$\because a$ 的指数是 3, b 的指数是 2, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 不一致,

$\therefore a^3b^2$ 不是 a^2b^3 的同类项, 不符合题意;

$\because a$ 的指数是 2, b 的指数是 3, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 一致,

$\therefore 2a^2b^3$ 是 a^2b^3 的同类项, 符合题意;

$\because a$ 的指数是 2, b 的指数是 1, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 不一致,

$\therefore a^2b$ 不是 a^2b^3 的同类项, 不符合题意;

$\because a$ 的指数是 1, b 的指数是 3, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 不一致,

$\therefore ab^3$ 不是 a^2b^3 的同类项, 不符合题意;

故选 B

5. (2022·广东) 单项式 $3xy$ 的系数为_____.

【答案】3

【分析】单项式中数字因数叫做单项式的系数, 从而可得出答案.

【详解】 $3xy$ 的系数是 3,

故答案为：3.

6. 如果单项式 $5ax^2y^{n+1}$ 与 $-7ax^m y^4$ 的和仍是单项式，那么 $m-2n$ 的值是 _____.

【解答】解：Q 单项式 $5ax^2y^{n+1}$ 与 $-7ax^m y^4$ 的和仍是单项式，

$\therefore 5ax^2y^{n+1}$ 与 $-7ax^m y^4$ 是同类项.

$$\therefore m=2, n+1=4,$$

解得 $m=2, n=3,$

$$\therefore m-2n=2-6=-4.$$

故答案为：-4.

7. (2021·湖南怀化市·七年级期末) 多项式 $\frac{1}{10}x^{m-1}+2x-5$ 是关于 x 的四次三项式，则 $m=$ _____

【答案】5

【分析】根据多项式中次数最高的项的次数叫做多项式的次数进行分析即可.

【详解】解： \because 多项式 $\frac{1}{10}x^{m-1}+2x-5$ 是关于 x 的四次三项式，

$\therefore m-1=4$ ，解得 $m=5$ ，故答案为：5.

【考点3】整式的运算

【例6】(2021·福建中考真题) 下列运算正确的是 ()

A. $2a-a=2$ B. $(a-1)^2=a^2-1$ C. $a^6 \div a^3=a^2$ D. $(2a^3)^2=4a^6$

【答案】D

【分析】根据不同的运算法则或公式逐项加以计算，即可选出正确答案.

【详解】解：A: $2a-a=(2-1)a=a$ ，故 A 错误；

B: $(a-1)^2=a^2-2a+1$ ，故 B 错误；

C: $a^6 \div a^3=a^{6-3}=a^3$ ，故 C 错误；

D: $(2a^3)^2=2^2 \cdot (a^3)^2=4a^{3 \times 2}=4a^6$.

故选：D

【例7】(2022·四川乐山) 已知 $m^2+n^2+10=6m-2n$ ，则 $m-n=$ _____.

【答案】4

【分析】根据已知式子，凑完全平方公式，根据非负数之和为0，分别求得 m, n 的值，进而代入代数式即可求解。

【详解】解：Q $m^2 + n^2 + 10 = 6m - 2n$ ，

$$\therefore m^2 + n^2 + 10 - 6m + 2n = 0，$$

$$\text{即 } (m-3)^2 + (n+1)^2 = 0，$$

$$\therefore m=3, n=-1，$$

$$\therefore m-n=3-(-1)=4，$$

故答案为：4。

跟踪训练

1. (2022·内蒙古包头) 若 $2^4 \times 2^2 = 2^m$ ，则 m 的值为 ()

- A. 8 B. 6 C. 5 D. 2

【答案】B

【分析】根据同底数幂的乘法运算计算 $2^4 \times 2^2 = 2^{4+2} = 2^6 = 2^m$ ，即可求解。

【详解】Q $2^4 \times 2^2 = 2^{4+2} = 2^6 = 2^m$ ，

$$\therefore m=6，\text{ 故选：B.}$$

2. (2022·湖南岳阳) 下列运算结果正确的是 ()

- A. $a+2a=3a$ B. $a^5 \div a = a^5$ C. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ D. $(a^4)^3 = a^7$

【答案】A

【分析】根据合并同类项判断 A 选项；根据同底数幂的除法判断 B 选项；根据同底数幂的乘法判断 C 选项；根据幂的乘方判断 D 选项。

【详解】解：A 选项，原式 $= 3a$ ，故该选项符合题意；

B 选项，原式 $= a^4$ ，故该选项不符合题意；

C 选项，原式 $= a^5$ ，故该选项不符合题意；

D 选项，原式 $= a^{12}$ ，故该选项不符合题意；故选 A.

3. (2022·广西) 如图，是利用割补法求图形面积的示意图，下列公式中与之相对应的是 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/757066153023010006>