

佳一中 2022—2023 学年度高二上学期期末考试

数学试题

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的准线方程是

- A. $x = -1$
- B. $x = -2$
- C. $y = -1$
- D. $y = -2$

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：由题意得，抛物线可化为 $x^2 = 4y$ ，则 $p = 2$ ，所以准线方程为 $y = -1$ ，故选 C。

考点：抛物线的几何性质。

2. 已知 A, B, C, D, E 是空间中的五个点，其中点 A, B, C 不共线，则“存在实数 x, y ，使得 $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

是“ $DE //$ 平面 ABC ”的 ()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用存在实数 x, y ，使得 $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow DE //$ 平面 ABC 或 $DE \subset$ 平面 ABC ，结合充分必要条件 定义即可求解。

【详解】若 $DE //$ 平面 ABC ，则 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面，故存在实数 x, y ，使得 $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，所以必要性成立；

若存在实数 x, y ，使得 $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，则 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面，则 $DE //$ 平面 ABC 或 $DE \subset$ 平面 ABC ，所以充分性不成立；

所以“存在实数 x, y ，使得 $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ”是“ $DE //$ 平面 ABC ”的必要不充分条件，

故选：B

【点睛】关键点睛：本题考查空间向量共面的问题，理清存在实数 x, y ，使得 $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow DE //$ 平面 ABC 或 $DE \subset$ 平面 ABC 是解题的关键，属于基础题。

3. 已知直线 $l_1: x - 2y - 1 = 0, l_2: 2x + my + 2\sqrt{5} - 2 = 0$ ，若 $l_1 // l_2$ ，则 l_1 与 l_2 之间的距离为 ()

- A. 1 B. 2 C. $\frac{5-2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据直线平行求出 m ，再由平行线间的距离公式求解即可。

【详解】因为 $l_1 // l_2$ ，所以 $m + 4 = 0$ ，解得 $m = -4$ ，经检验符合题意；

所以 $l_2: x - 2y + \sqrt{5} - 1 = 0$ ，

所以 l_1 与 l_2 之间的距离 $d = \frac{|-1 - \sqrt{5} + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$ ，

故选：A

4. 中国人所使用的音阶是“五声音阶”，即“宫徵 (zhi) 商羽角 (ju e)”五个音，中国古代关于这五个音阶的律学理论，叫做“三分损益法”，相关记载最早见于春秋时期《管子 地员篇》。“三分损益”包含“三分损一”和“三分益一”两层含义，“三分损一”是指将原有长度作三等分而减去其一份生得长度，“三分益一”是指将原有长度作三等分而增添其一份生得长度。具体来说，以一段圆径绝对均匀的发声管为基数——宫（称为“基本音”），宫管的“三分损一”为徵管，徵管发出的声音即为徵，徵管的“三分益一”为商管，商管发出的声音即为商，商管的“三分损一”为羽管，羽管的“三分益一”为角管，由此“宫、徵、商、羽、角”五个音阶就生成了。关于五音，下列说法中不正确的是 ()

- A. 五音管中最短的音管是羽管
 B. 假设基本音的管长为 81，则角管的长度为 64
 C. 五音管中最长的音管是商管
 D. 类比题中的“三分损益”可推算：商的“四分损一”为徵

【答案】C

【解析】

【分析】设宫管的长为 a ，即可表示出徵、商、羽、角的管长，即可判断 A, B, C；根据“三分损益”的含义可求得商的“四分损一”为徵，判断 D。

【详解】不妨设宫管的长为 a ，则徵管的长为 $\frac{2}{3}a$ ，商管的长为 $\frac{2}{3}a \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}a$ ，

羽管的长为 $\frac{8}{9}a \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27}a$ ，角管的长为 $\frac{16}{27}a \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{81}a$ ，

而 $a > \frac{8}{9}a > \frac{64}{81}a > \frac{2}{3}a > \frac{16}{27}a$ ，

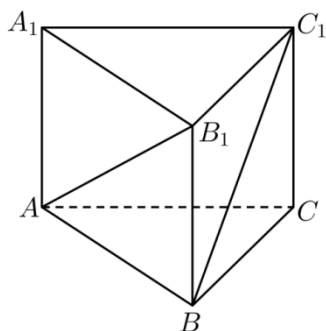
故最长的音管是宫管，最短的音管是羽管，故选项 A 正确，选项 C 错误；

令 $a = 81$ ，即基本音的管长为 81，则 $\frac{64}{81}a = 64$ ，即角管的长度为 64，故选项 B 正确；

商的“四分损一”为 $\frac{8}{9}a \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3}a$ ，即为徵，选项 D 正确，

故选：C.

5. 如图，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，若 $AB = \sqrt{2}BB_1 = 2$ ，则 C 到直线 AB_1 的距离为 ()



- A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{30}}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】取 AC 的中点 O ，建立如图所示的空间直角坐标系 $O - xyz$ ，根据点到线距离的向量求法和投影的定义计算即可.

【详解】由题意知， $AC = AB = 2$ ， $BB_1 = \sqrt{2}$ ，

取 AC 的中点 O ，则 $BO \perp AC$ ， $BO = \sqrt{3}$ ，

建立如图所示的空间直角坐标系 $O - xyz$ ，

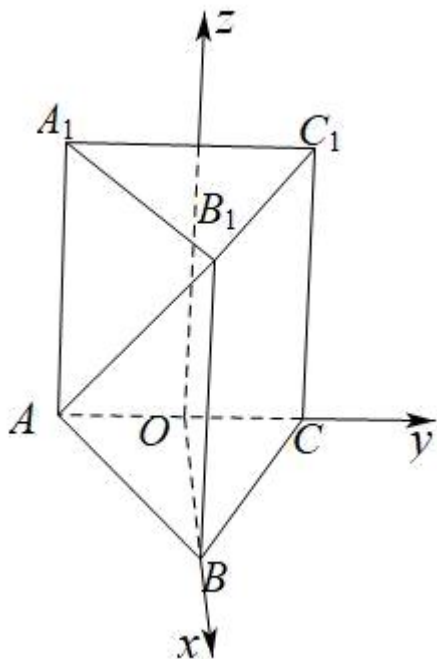
则 $A(0, -1, 0)$ ， $B_1(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2})$ ， $C(0, 1, 0)$ ，

所以 $\overrightarrow{AB_1} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{CA} = (0, -2, 0)$ ，

所以 \overrightarrow{CA} 在 $\overrightarrow{AB_1}$ 上的投影的长度为 $\frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

故点 C 到直线 AB_1 的距离为: $d = \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

故选: D



6. 已知过点 $(0,2)$ 的直线 l 与圆心为 C 的圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 相交于 A, B 两点, 当 $\triangle ABC$ 面积最大时, 直线 l 的方程为 ()

A. $2x - y + 2 = 0$

B. $2x - y + 2 = 0$ 或 $2x + y - 2 = 0$

C. $x = 0$

D. $x = 0$ 或 $2x + y - 2 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】由三角形面积公式结合正弦函数的性质得出当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时 $\triangle ABC$ 面积最大, 设出直线 l 的方程, 确定圆心到直线 l 的距离, 列出方程, 求解得出直线 l 的方程.

【详解】 $\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} r^2 \sin \angle ACB \leq \frac{1}{2} r^2$, 当仅当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时“=”成立, 此时点 C 到

直线 l 的距离为 $d(C, l) = \sqrt{10} \cos 45^\circ = \sqrt{5}$.

当直线 l 的斜率不存在时, 即 $l: x = 0$, 此时圆心到直线 l 的距离为 2, 不满足题意;

当直线 l 的斜率存在时, 设 $l: y = kx + 2$, 则 $\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5}$, 解得 $k = 2$, 所以方程为 $y = 2x + 2$.

故选: A

【点睛】关键点睛: 解决本题的关键是由三角形面积公式得出当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时 $\triangle ABC$ 面积最大, 进而由距离公式得出方程.

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 > 0$, 且 $S_{12} = S_{15}$, 则使 $S_n > 0$ 成立的最大 n 值为 ()

- A. 13 B. 14 C. 26 D. 27

【答案】C

【解析】

【分析】由 $S_{12} = S_{15}$ 可解得 $a_{14} = 0$, 再利用等差数列的前 n 项和公式并结合等差数列的性质即可求解

【详解】由 $S_{12} = S_{15} \Rightarrow a_{13} + a_{14} + a_{15} = 0 \Rightarrow 3a_{14} = 0 \Rightarrow a_{14} = 0$

又 $a_1 > 0$, 所以公差 $d < 0$

$$S_{26} = \frac{26(a_1 + a_{26})}{2} = 13(a_{13} + a_{14}) > 0$$

$$S_{27} = \frac{27(a_1 + a_{27})}{2} = 27a_{14} = 0$$

所以使 $S_n > 0$ 成立的最大 n 值为 26

故选: C

8. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点, 过点 F_1 倾斜角为 30° 的直线与双曲线

的左, 右两支分别交于点 A, B . 若 $|AF_2| = |BF_2|$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

【答案】A

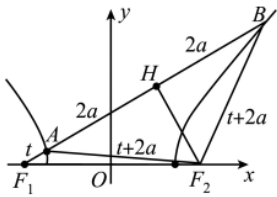
【解析】

【分析】设 $|AF_1| = t$, 据双曲线的定义可用 t 表示 $|AF_2|, |BF_2|$, 作 $F_2H \perp AB = H$, 构造直角三角形可计算得 t , 并用勾股定理列出了 $(\sqrt{3}c)^2 - c^2 = (2a)^2$, 进而可求 e .

【详解】设 $|AF_1| = t$, 则 $|AF_2| = t + 2a = |BF_2|$,

从而 $|BF_1| = t + 4a$ ，进而 $|BA| = 4a$ 。

过 F_2 作 $F_2H \perp AB = H$ ，则 $|AH| = 2a$ 。如图：



在 $\text{Rt}\triangle F_1F_2H$ 中， $|F_2H| = 2c \sin 30^\circ = c$ ， $|F_1H| = 2c \cos \theta = \sqrt{3}c = |AF_2|$ ；

在 $\text{Rt}\triangle AF_2H$ 中， $(\sqrt{3}c)^2 - c^2 = (2a)^2$ ，

即 $2c^2 = 4a^2$ ，所以 $e = \sqrt{2}$ 。

故选：A

【点睛】 (1) 焦点三角形为条件求圆锥曲线的离心率，常利用圆锥曲线的定义；

(2) 求圆锥曲线的离心率，常利用有关三角形建立关于 a, b, c 的齐次等式，再化为 e 的等式可求；

(3) 此题的关键是作 $F_2H \perp AB = H$ 得直角三角形，即可求出边长，又可用来建立 a, b, c 的齐次等式。

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 \vec{e} 为直线 l 的方向向量， \vec{n}_1, \vec{n}_2 分别为平面 α, β 的法向量 (α, β 不重合)，并且直线 l 均不在平面 α, β 内，那么下列说法中正确的有 ()

A. $\vec{e} \perp \vec{n}_1 \Leftrightarrow l \parallel \alpha$

B. $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$

C. $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$

D. $\vec{e} \perp \vec{n}_1 \Leftrightarrow l \perp \alpha$

【答案】 ABC

【解析】

【分析】 由空间向量的位置关系对选项逐一判断，

【详解】 已知直线 l 不在平面 α 内，则 $\vec{e} \perp \vec{n}_1 \Leftrightarrow l \parallel \alpha$ ，故 A 正确，D 错误，

由空间向量的位置关系得 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$ ， $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$ ，故 B, C 正确，

故选：ABC

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数，公比为 q ，则下列结论正确的是 ()

A. 若 $a_1 a_2 > 0$ ，则 $a_2 a_3 > 0$

B. 若 $a_1 + a_2 < 0$, 且 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $q > -1$

C. 若 $a_{n+1} > a_n > 0$, 则 $a_n + a_{n+2} > 2a_{n+1}$

D. 若 $a_n a_{n+1} < 0$, $(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} - a_{n+2}) < 0$

【答案】ABC

【解析】

【分析】由等比数列的通项公式的应用, 等比数列的性质的应用, 可判断 A、B、C、D 的结论是否正确.

【详解】显然 $q \neq 0$. A: 因 $a_1 a_2 > 0$, 所以 $(a_1 q) \cdot (a_2 q) = (a_1 a_2) \cdot q^2 > 0$, 因此本选项正确;

B: 由 $a_1 + a_3 < 0 \Rightarrow a_1(1+q^2) < 0 \Rightarrow a_1 < 0$, 而 $a_1 + a_2 < 0 \Rightarrow a_1(1+q) < 0$, 显然

$1+q > 0 \Rightarrow q > -1$, 因此本选项正确;

C: 由 $a_{n+1} > a_n > 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow q > 1$,

$a_n + a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_n + a_n q^2 - 2a_n q = a_n(1-q)^2 > 0 \Rightarrow a_n + a_{n+2} > 2a_{n+1}$,

因此本选项正确;

D: 由 $a_n a_{n+1} < 0 \Rightarrow a_n \cdot a_n \cdot q < 0 \Rightarrow q < 0$, $(a_{n+1} - a_n)(a_n q - a_{n+1} q) = -q(a_{n+1} - a_n)^2 \geq 0$,

因此本选项不正确.

故选: ABC.

11. 以下关于圆锥曲线的命题中, 其中是真命题的有 ()

A. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 有相同的焦点

B. 过双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点且被双曲线截得的弦长为 10 的直线共有 2 条

C. 设 A, B 是两个定点, k 是非零常数, 若 $|PA| - |PB| = k$, 则动点 P 的轨迹是双曲线的一支

D. 动圆 P 过定点 $F(1,0)$ 且与定直线 $l: x = -1$ 相切, 则圆心 P 的轨迹方程是 $y^2 = 4x$

【答案】AD

【解析】

【分析】求出双曲线与椭圆的焦点坐标即可判断 A; 求出双曲线的实轴长及过右焦点的直线垂直 x 轴时所截弦长即可判断 B; 由双曲线的定义即可判断 C; 根据抛物线的定义即可判断 D.

【详解】对于 A，双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点为 $(\pm 5, 0)$ ，椭圆 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 的焦点为 $(\pm 5, 0)$ ，故 A 正确；

对于 B，由双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的方程知，右焦点 $(\sqrt{34}, 0)$ ，实轴长为 10，所以过右焦点与双曲线左右两支

各交于一点且满足弦长为 10 的直线只有 1 条；过右焦点的直线垂直 x 轴时，得两交点坐标为 $(\sqrt{34}, \frac{9}{5})$ 、 $(\sqrt{34}, -\frac{9}{5})$ ，此时弦长为 $\frac{18}{5} < 10$ ，所以过右焦点与双曲线右支相交于两点且满足弦长为 10 的直线有 2 条，

综上，过双曲线的右焦点且被双曲线截得的弦长为 10 的直线共有 3 条，故 B 错误；

对于 C，当 $|k| = |AB|$ 时，动点 P 的轨迹是一条射线，当 $|k| < |AB|$ 时，动点 P 的轨迹是双曲线的一支，故 C 错误；

对于 D，因为动圆 P 过定点 $F(1, 0)$ 且与定直线 $l: x = -1$ 相切，即 P 点到 $F(1, 0)$ 的距离与到直线 $l: x = -1$ 的距离相等，根据抛物线的定义可得， P 点的轨迹是以为 $F(1, 0)$ 为焦点， $x = -1$ 为准线的抛物线，所以点 P 的轨迹方程为 $y^2 = 4x$ ，故 D 正确。

故选：AD.

12. 已知 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左焦点，直线 $l: y = kx (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点， $AE \perp x$

轴，垂足为 E ， BE 与椭圆 C 的另一个交点为 P ，则 ()

A. $\frac{1}{|AF|} + \frac{4}{|BF|}$ 的最小值为 2

B. $\triangle ABE$ 面积的最大值为 $\sqrt{2}$

C. 直线 BE 的斜率为 $\frac{1}{2}k$

D. $\angle PAB$ 为钝角

【答案】BC

【解析】

【分析】A 项，先由椭圆与过原点直线的对称性知， $|AF| + |BF| = 4$ ，再利用 1 的代换利用基本不等式可得最小值 $\frac{9}{4}$ ，A 项错误； B 项，由直线与椭圆方程联立，解得交点坐标，得出面积关于 k 的函数关系式，再

求函数最值； C 项，由对称性，可设 $A(x_0, y_0)$ ，则 $B(-x_0, -y_0)$ ， $E(x_0, 0)$ ，则可得直线 BE 的斜率与 k

的关系； D 项，先由 A, B 对称且与点 P 均在椭圆上，可得 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$ ，又由 C 项可知

$k_{PB} = k_{BE} = \frac{1}{2}k$, 得 $k_{PA} \cdot k_{AB} = -1$, 即 $\angle PAB = 90^\circ$, 排除 D 项.

【详解】对于 A, 设椭圆 C 的右焦点为 F' , 连接 AF' , BF' ,

则四边形 $AF'BF$ 为平行四边形,

$$\therefore |AF| + |BF| = |AF| + |AF'| = 2a = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{|AF|} + \frac{4}{|BF|} = \frac{1}{4}(|AF| + |BF|) \left(\frac{1}{|AF|} + \frac{4}{|BF|} \right) = \frac{1}{4} \left(5 + \frac{|BF|}{|AF|} + \frac{4|AF|}{|BF|} \right) \geq \frac{9}{4},$$

当且仅当 $|BF| = 2|AF|$ 时等号成立, A 错误;

对于 B, 由
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx \end{cases}$$
 得 $x = \frac{\pm 2}{\sqrt{1+2k^2}},$

$$\therefore |y_A - y_B| = \frac{4|k|}{\sqrt{1+2k^2}},$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |x_A| |y_A - y_B| = \frac{4|k|}{1+2k^2} = \frac{4}{\frac{1}{|k|} + 2|k|} \leq \sqrt{2},$$

当且仅当 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, B 正确;

对于 C, 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$, $E(x_0, 0)$,

故直线 BE 的斜率 $k_{BE} = \frac{0 + y_0}{x_0 + x_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{2}k$, C 正确;

对于 D, 设 $P(m, n)$, 直线 PA 的斜率为 k_{PA} , 直线 PB 的斜率为 k_{PB} ,

$$\text{则 } k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{n - y_0}{m - x_0} \cdot \frac{n + y_0}{m + x_0} = \frac{n^2 - y_0^2}{m^2 - x_0^2},$$

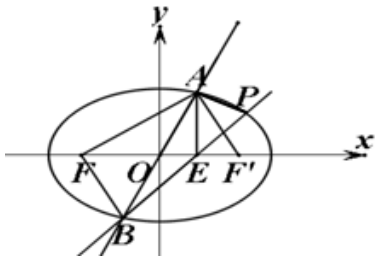
又点 P 和点 A 在椭圆 C 上, $\therefore \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{2} = 1$ ①, $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$ ②,

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } \frac{n^2 - y_0^2}{m^2 - x_0^2} = -\frac{1}{2}, \text{ 易知 } k_{PB} = k_{BE} = \frac{1}{2}k,$$

$$\text{则 } k_{PA} \cdot \frac{1}{2}k = -\frac{1}{2}, \text{ 得 } k_{PA} = -\frac{1}{k},$$

$\therefore k_{PA} \cdot k_{AB} = \left(-\frac{1}{k}\right) \cdot k = -1$, $\therefore \angle PAB = 90^\circ$, D 错误.

故选: BC.



【点睛】椭圆常用结论:

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, AB 为椭圆经过原点的一条弦, P 是椭圆上异于 A 、 B 的任意一点, 若

k_{PA}, k_{PB} 都存在, 则 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 以点 $P(2, -3)$ 为圆心, 并且与 y 轴相切的圆的方程是_____.

【答案】 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

【解析】

【分析】根据圆与 y 轴相切, 圆的半径等于点 P 到 y 轴的距离, 求出半径 $r = 2$, 即可求出圆的标准方程.

【详解】设圆 方程为 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$,

\because 圆与 y 轴相切, \therefore 半径 r 等于圆心 P 到 y 轴的距离, 即 $r = 2$,

因此, 圆的方程为 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$,

故答案为: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} - a_n = 3n - 22$, $a_1 = -2$, 则 $a_{30} =$ _____.

【答案】 665

【解析】

【分析】利用累加法求得 a_n , 进而求得 a_{30}

【详解】依题意, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$
 $= (3n - 25) + (3n - 28) + \cdots + (-16) + (-19) + (-2)$

$$= \frac{3n-25+(-19)}{2} \times (n-1) - 2 = \frac{3n-44}{2} \times (n-1) - 2.$$

$$\text{所以 } a_{30} = \frac{90-44}{2} \times 29 - 2 = 665.$$

故答案为: 665

15. 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上任取一点 A (不为原点), F 为抛物线的焦点, 连接 AF 并延长交抛物线于另一点 B , 过 A, B 分别作准线的垂线, 垂足分别为 C, D . 记线段 CD 的中点为 T , 则 $\triangle ATB$ 面积的最小值为_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】取 AB 的中点为 M , 连接 MT , $S_{\triangle ATB} = \frac{1}{2} |TM| |y_A - y_B| = \frac{1}{4} |AB| |y_A - y_B|$ 可变形为用 $y_A y_B$ 表示, 设直线方程为 $x = my + 1$, 与抛物线方程联立, 消元后应用韦达定理得 $y_A y_B, y_A + y_B$, 代入 $S_{\triangle ATB}$, 再由基本不等式可得最小值.

【详解】焦点为 $F(1,0)$, 设直线 AB 方程为 $x = my + 1$,

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4my - 4 = 0 \Rightarrow y_A y_B = -4,$$

取 AB 中点为 M , 连接 MT , 则 $|AC| = |AF|$, $|BD| = |BF|$, $|MT| = \frac{1}{2} (|AC| + |BD|) = \frac{1}{2} |AB|$,

$$\begin{aligned} S_{\triangle ATB} &= \frac{1}{2} |TM| |y_A - y_B| = \frac{1}{4} |AB| |y_A - y_B| \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{y_A^2}{4} + 1 + \frac{y_B^2}{4} + 1 \right) \sqrt{y_A^2 + y_B^2 - 2y_A y_B} \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{|y_A y_B|}{2} + 2 \right) \sqrt{2|y_A y_B| - 2y_A y_B} = 4 \end{aligned}$$

故 $|y_A| = |y_B| = 2$ 时面积最小为 4.

故答案为: 4.

【点睛】关键点点睛: 本题考查抛物线中与焦点弦有关的面积问题. 解题关键是把抛物线的点到焦点的距离转化为到准线的距离, 这样三角形的面积可以与焦点弦长联系, 从而利用韦达定理求解.

16. 对于数列 $\{a_n\}$, 定义 $A_n = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-1} a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“加权和”, 已知某数列 $\{a_n\}$ 的“加权和” $A_n = n \cdot 2^{n+1}$, 记数列 $\{a_n + pn\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $T_n \leq T_5$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则实数 p 的取值范围为_____.

【答案】 $\left[-\frac{12}{5}, -\frac{7}{3}\right]$

【解析】

【分析】 根据数列新定义可得 $a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-2}a_{n-1} + 2^{n-1}a_n = n \cdot 2^{n+1}$ ，从而 $n \geq 2$ 时， $a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-2}a_{n-1} = (n-1) \cdot 2^n$ ，相减求得 $a_n = 2n + 2$ ，进而求得 T_n 的表达式，利用 $T_n \leq T_5$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，列出不等式组，即可求得答案。

【详解】 由题意可得 $a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-2}a_{n-1} + 2^{n-1}a_n = n \cdot 2^{n+1}$ ，

$$\therefore n \geq 2 \text{ 时, } a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-2}a_{n-1} = (n-1) \cdot 2^n,$$

$$\text{两式相减可得: } 2^{n-1}a_n = n \cdot 2^{n+1} - (n-1) \cdot 2^n,$$

$$\text{化为 } a_n = 2n + 2,$$

$$n=1 \text{ 时, } a_1 = 2^2 = 4, \text{ 满足上式,}$$

$$\text{故 } a_n = 2n + 2, n \in \mathbf{N}^*$$

$$\text{故 } T_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + p(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(4 + 2n + 2)}{2} + p \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+3) + p \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

$\therefore T_n \leq T_5$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，

$$\therefore \begin{cases} T_4 \leq T_5 \\ T_6 \leq T_5 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 28 + 10p \leq 40 + 15p \\ 54 + 21p \leq 40 + 15p \end{cases},$$

$$\text{解得 } -\frac{12}{5} \leq p \leq -\frac{7}{3}, \text{ 即 } p \in \left[-\frac{12}{5}, -\frac{7}{3}\right],$$

$$\text{故答案为: } \left[-\frac{12}{5}, -\frac{7}{3}\right]$$

【点睛】 关键点点睛：根据数列新定义可得 $a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-2}a_{n-1} + 2^{n-1}a_n = n \cdot 2^{n+1}$ ，从而 $n \geq 2$ 时， $a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-2}a_{n-1} = (n-1) \cdot 2^n$ ，相减求得 a_n ，从而可求得 T_n 的表达式，因此解答的关键就在于将

$T_n \leq T_5$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立转化为解 $\begin{cases} T_4 \leq T_5 \\ T_6 \leq T_5 \end{cases}$ 的问题。

四、解答题： 本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 已知双曲线 C 的焦点在 x 轴上, 焦距为 4, 且它的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 若直线 $l: y = \frac{1}{2}x - 1$ 与双曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $|AB|$.

【答案】(1) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

(2) $10\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 焦点在 x 轴上, 设方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 根据题意求出 a, b 即可

(2) 设点, 联立方程组, 消元得一元二次方程, 由韦达定理, 然后利用弦长公式计算即可

【小问 1 详解】

因为焦点在 x 轴上, 设双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

由题意得 $2c = 4$,

所以 $c = 2$, ①

又双曲线 C 的一条渐近线为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$,

所以 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ②

又 $a^2 + b^2 = c^2$, ③

联立上述式子解得 $a = \sqrt{3}$, $b = 1$,

故所求方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$;

【小问 2 详解】

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases}, \text{整理得} \frac{1}{4}x^2 + 3x - 6 = 0,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/758042024043006023>