# 广东省中山市第一中学2024-2025学年高二上学期12月月考数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

**一、单选题**

1．下列关于空间向量的说法中正确的是（　　）

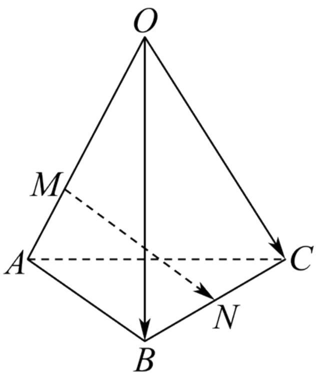
A．方向相反的两个向量是相反向量

B．空间中任意两个单位向量必相等

C．若向量$|\overrightarrow{AB}|,|\overrightarrow{CD}|$满足$|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{CD}|$，则$\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{CD}$

D．相等向量其方向必相同

2．如图，空间四边形$OABC$中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，点$M$在线段$OA$上，且$OM=2MA$，点$N$为$BC$的中点，则$\overrightarrow{MN}=$（　　）




A．$-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　　　B．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

C．$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$　　　　D．$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

3．直线$l_1:(a+1)x+2ay-1=0$和直线$l_2:ax-y+3=0$，则“$a=1$”是“$l_1\perp l_2$”的（　　）

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知直线$l$的方向向量为$\vec{n}=(1,0,2)$，点$A(0,1,1)$在直线$l$上，则点$P(1,2,2)$到直线$l$的距离为（　　）

A．$2\sqrt{30}$　　B．$\sqrt{30}$　　C．$\frac{\sqrt{30}}{10}$　　D．$\frac{\sqrt{30}}{5}$

5．设 e 是椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{k}=1$ 的离心率，且 $e\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，则实数 $k$ 的取值范围是（　）

A．$(0,6)$　　B．$(0,6)\cup\left(\dfrac{32}{3},+\infty\right)$　　C．$(0,3)\cup\left(\dfrac{16}{3},+\infty\right)$　　D．$(0,2)$

6．2023 年 3 月 27 日，贵州省首届“美丽乡村”篮球联赛总决赛火爆开赛，被网友称为“村 BA”.从某个角度观察篮球（如图 1），可以得到一个对称的平面图形，如图 2 所示，篮球的外轮形状为圆 $O$，将篮球表面的粘合线看成坐标轴和双曲线的一部分，若坐标轴和双曲线与圆 $O$ 的交点将圆 $O$ 的周长八等分，$AB=BC=CD=2$，视 $AD$ 所在直线为 $x$ 轴，则双曲线的方程为（　）

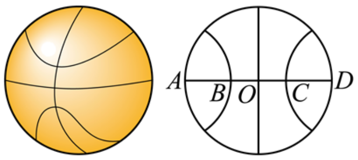



图1　　图2

A．$x^2-\dfrac{7y^2}{9}=1$　　B．$2x^2-y^2=1$　　C．$x^2-\dfrac{9y^2}{7}=1$　　D．$x^2-\dfrac{3y^2}{4}=1$

7．已知直线 $l:kx-y-k+3=0$，若无论 $k$ 取何值，直线 $l$ 与圆 $(x-5)^2+(y-6)^2=r^2\,(r>0)$ 恒有公共点，则 $r$ 的取值范围是（　）

A．$[3,5]$　　B．$(3,+\infty)$　　C．$[4,6)$　　D．$[5,+\infty)$

8．已知直线 $l_1:2x-y=0$ 与 $l_2:x+y-3=0$，过点 $P(3,2)$ 的直线 $l$ 被 $l_1,l_2$ 截得的线段恰好被点 $P$ 平分，则这三条直线 $l_1,l_2,l$ 围成的三角形面积为（　）

A．$\dfrac{16}{3}$　　B．$2\sqrt{15}$　　C．8　　D．$\dfrac{32}{3}$

## 二、多选题

9．下列有关数列的说法正确的是（　）

A．数列 $-2021,0,4$ 与数列 $4,0,-2021$ 是同一个数列

B．数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n(n+1)$,则 110 是该数列的第 10 项

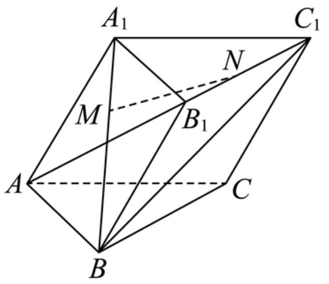
C．在数列 $1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5},\cdots$ 中,第 8 个数是 $2\sqrt{2}$

D．数列 3,5,9,17,33,…的通项公式为 $a_n=2^n+1$

10．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$M$，$N$ 分别是线段 $A_1B,B_1C_1$ 上的点，且

$BM=2A_1M$，$C_1N=2B_1N$．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，且均为单位向量，若

$\angle BAC=90^\circ$，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，则下列说法中正确的是（　　）




A．$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 的夹角为 $60^\circ$

B．$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

C．$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$

D．$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BC}$

11．已知抛物线 $E:y^2=4x$ 的焦点为 $F$，过点 $F$ 且斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线与 $E$ 交于 $A$，$B$ 两点，其中点A在第一象限．若动点 $P$ 在 $E$ 的准线上，则（　　）

A．$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最小值为 0

B．当 $\triangle PAB$ 为等腰三角形时，点 $P$ 的纵坐标的最大值为 $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

C．当 $\triangle PAB$ 的重心在 $x$ 轴上时，$\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

D．当 $\triangle PAB$ 为钝角三角形时，点 $P$ 的纵坐标的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)\cup\left(\frac{11\sqrt{2}}{4},+\infty\right)$

## 三、填空题

12．已知过点 $A(-2,m)$ 和 $B(m,4)$ 的直线与斜率为 $-2$ 的直线平行，则 $m$ 的值为_____．

13．若圆 $C_1:x^2+y^2=5$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-4x-8y-m=0$ 只有唯一的公共点，则 $m=$________．

14．已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面为菱形，$AA_1\perp$ 底面 $ABCD$，$AA_1=6$，$AB=8$，$\angle BCD=60^\circ$，点 $M$ 是线段 $BC$ 上靠近 $C$ 的四等分点，动点 $N$ 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面，且 $MN\perp BD_1$，则动点 $N$ 的轨迹长度为________．

## 四、解答题

15．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n=2n^2-30n.$

（1）当$S_n$取最小值时，求 $n$ 的值；

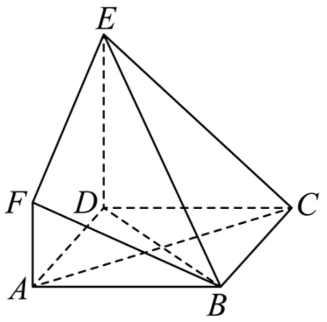
（2）求出$\{a_n\}$的通项公式.

16．已知圆$C: x^2+y^2-4x-6y+4=0$.

(1)若直线$l$经过点$A\left(-1,-3\right)$,且与圆$C$相切,求直线$l$的方程；

(2)设点$D(3,2)$,点$E$在圆$C$上,$M$ 为线段$DE$的中点,求$M$ 的轨迹的长度.

17．如图所示，四边形$ABCD$是边长为 3 的正方形，$DE\perp$平面$ABCD$，$AF // DE$，$DE=3AF$，$BE$与平面$ABCD$所成角为 60°.




(1)求证：$AC\perp$平面$BDE$；

(2)求平面$BEF$与平面$BDE$夹角的余弦值；

(3)若点$M$在线段$BD$上，且$AM//$,平面$BEF$，求出$M$点的坐标.

18．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为$2\sqrt{6}$，该椭圆上的点与左焦点间的距离的最大值为$\sqrt{6}+\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 $C$ 的标准方程；

(2)设直线 $l$ 与椭圆 $C$ 交于$A,B$两点，$M$为线段$AB$的中点，$O$为原点，射线$OM$与椭圆 $C$ 交于点 $N$，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，记$\triangle AOM,\triangle BON$的面积分别为$S_1,S_2$，求$\dfrac{S_1}{S_2}$的取值范围.

19．已知平面上的线段$l$及点$P$，任取$l$上一点$Q$，线段$PQ$长度的最小值称为点$P$到线段$l$的距离，记作$d(P,l)$.

（1）求点$P(1,1)$到线段$l: x-y-3=0(3\le x\le 5)$的距离$d(P,l)$；

（2）设$l$是长为$2$的线段，求点的集合$D=\{P\mid d(P,l)\le 1\}$所表示的图形的面积为多少？

（3）求到两条线段$l_1$、$l_2$距离相等的点的集合$C=\{P\mid d(P,l_1)=d(P,l_2)\}$，并在直角坐标系中作出相应的轨迹.其中$l_1=AB$，$l_2=CD$，$A(1,3)$，$B(1,0)$，$C(-1,3)$，$D(-1,-2)$.

**参考答案：**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | A | B | D | B | A | D | A | BCD | BD |
| 题号 | 11 | | | | | | | | | |
| 答案 | AC | | | | | | | | | |

1．D

【分析】根据向量的相关概念逐一判断即可.

【详解】相反向量指的是长度相等，方向相反的向量，故 A 错误；

单位向量指的是模为 1 的向量，方向未定，故 B 错误；

向量不能比较大小，故 C 错误；

相等向量其方向必相同，故 D 正确；

故选：D.

2．A

【分析】根据向量的线性运算即可求解.

【详解】由题可知$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$，

故选：A

3．B

【分析】求出两直线垂直时参数值，再根据充分必要条件的定义判断.

【详解】$l_1\perp l_2$，则$a(a+1)-2a=0$，解得$a=1$或$a=0$，题中应是充分不必要条件，

故选：B.

4．D

【分析】利用数量积的几何意义结合勾股定理求解即可

【详解】由已知得$\overrightarrow{PA}=(-1,-1,-1)$，

因为直线 $l$ 的方向向量为$\vec{n}=(1,0,2)$，

所以点$P\left(1,2,2\right)$到直线 $l$ 的距离为

$$\sqrt{\left|\overrightarrow{PA}\right|^2-\left(\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)^2}=\sqrt{3-\left(\frac{-1-2}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2}=\sqrt{3-\frac{9}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$$

故选：D

5．B

【解析】由题意和椭圆性质可得当$k>8$时，$\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{k-8}{k}}<1$；当$0<k<8$时，$\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{8-k}{8}}<1$.

解不等式后即可得解.

【详解】由$\mathrm{e}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$\mathrm{e}=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}$，$c^2=a^2-b^2$可得：

当$k>8$时，$c^2=k-8$，由条件知$\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{k-8}{k}}<1$，解得$k>\frac{32}{3}$；

当$0<k<8$时，$c^2=8-k$，由条件知$\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{8-k}{8}}<1$，解得$0<k<6$.

故选：B.

【点睛】本题考查了椭圆的性质，考查了分类讨论思想，属于基础题.

6．A

【分析】设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，由$BC=2$，可得$a=1$，再代入点$(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})$，求解即可.

【详解】解：依题意，设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

因为$BC=2$，则$a=1$，

显然圆$O$的半径为3，

又因为坐标轴和双曲线与圆$O$的交点将圆$O$的周长八等分，

双曲线与圆$O$交于第一象限内的点为$(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})$，

于是$(\frac{3}{\sqrt{2}})^2-\frac{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2}{b^2}=1$，解得$b^2=\frac{9}{7}$，

所以双曲线的方程为$x^2-\frac{7y^2}{9}=1$.

故选：A

7．D

【分析】根据直线过定点的求法可求得直线$l$恒过定点$A(1,3)$，由点A在圆上或圆内即可构造不等式求得结果.

【详解】由$l:kx-y-k+3=0$得：$(x-1)k+(3-y)=0$，

由$\begin{cases}x-1=0\\3-y=0\end{cases}$得：$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$，即直线$l$恒过定点$A(1,3)$，

$\therefore$当点$A(1,3)$在圆上或圆内时，直线$l$与圆$(x-5)^2+(y-6)^2=r^2(r>0)$恒有公共点，

$\therefore(1-5)^2+(3-6)^2\le r^2$，即$r^2\ge 25$，又$r>0$，$\therefore r\ge 5$，

即$r$的取值范围为$[5,+\infty)$.

故选：D.

8．A

【分析】设直线$l$与直线$l_1,l_2$的两个交点为$A,B$，设$A(a,2a)$，则$B(6-a,4-2a)$，代入直线$l_2:x+y-3=0$，即可得点A，进而可得到直线$l$的方程，再求$l_1,l_2$交点到$l$的距离，利用面积公式计算即可.

【详解】设直线$l$与直线$l_1,l_2$的两个交点为$A,B$，且设$A(a,2a)$，

则由题意可知，点$A(a,2a)$关于点$P(3,2)$的对称点$B(6-a,4-2a)$在$l_2$上，

所以$6-a+4-2a-3=0$，解得$a=\frac{7}{3}$，

所以$A(\frac{7}{3},\frac{14}{3})$，$B(\frac{11}{3},-\frac{2}{3})$，

所以$|AB|=\sqrt{\left(\frac{11}{3}-\frac{7}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-\frac{14}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{17}}{3}$，

因为直线$l$过点$P(3,2)$，$A(\frac{7}{3},\frac{14}{3})$，所以直线$l$的斜率$k=\frac{\frac{14}{3}-2}{\frac{7}{3}-3}=-4$，

所以直线$l$的方程为：$y-2=-4(x-3)$，即$4x+y-14=0$，

联立$l_1,l_2$：$\begin{cases}2x-y=0\\x+y-3=0\end{cases}$，解得$l_1,l_2$的交点坐标为$(1,2)$，

所以$(1,2)$到直线$l:4x+y-14=0$的距离为$d=\frac{|4\times1+2-14|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{8\sqrt{17}}{17}$，

所以这三条直线$l_1,l_2,l$围成的三角形面积为$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{17}}{3}\times\frac{8\sqrt{17}}{17}=\frac{16}{3}$.

故选：A.

9．BCD

【分析】根据数列的定义数列是根据顺序排列的一列数可知选项A错误,

使$n(n+1)=110$,即可得出项数,判断选项 B 的正误,

根据数列的规律可得到第 8 项可判断选项 C 的正误,

根据数列的规律可得到通项公式判断选项 D 的正误.

【详解】对于选项 A,数列$-2021,0,4$与$4,0,-2021$中数字的排列顺序不同,

不是同一个数列,

所以选项 A 不正确;

对于选项 B,令$a_n=n^2+n=110$,

解得$n=10$或$n=-11$（舍去）,

所以选项 B 正确;

对于选项 C,根号里面的数是公差为 1 的等差数列,

第 8 个数为$\sqrt{8}$,即$2\sqrt{2}$,

所以选项 C 正确;

对于选项 D,由数列 3,5,9,17,33,…的前 5 项可知通项公式为$a_n=2^n+1$,

所以选项 D 正确.

故选:BCD

10．BD

【分析】由空间向量的运算法则和空间向量的夹角公式、模长公式、数量积的定义对选项一一判断即可得出答案.

【详解】对于 A，$\because AB=AC=1$，$\angle BAC=90^{\circ}$，$\therefore \angle ABC=45^{\circ}$，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为$135^{\circ}$，又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$，

所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{B_1C_1}$的夹角为$135^{\circ}$，故 A 错误；

对于 B，因为$BM=2A_1M$，$C_1N=2B_1N$，

所以$\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1N}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1B}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A_1N}-\overrightarrow{A_1M}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$，故 B 正确；

对于 C，$\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\angle BAC=90^{\circ}$，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^{\circ}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$，

$\therefore |\overrightarrow{MN}|^2=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)^2=\frac{1}{9}\vec{a}^2+\frac{1}{9}\vec{b}^2+\frac{1}{9}\vec{c}^2+\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{2}{9}\vec{c}\cdot\vec{b}$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{9}$，

$\therefore |\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$.故 C 错误；

对于 D，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=-\frac{1}{3}\vec{a}^2+\frac{1}{3}\vec{b}^2+\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，

$\therefore \overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BC}$.故 D 正确.

故选：BD.

11．AC

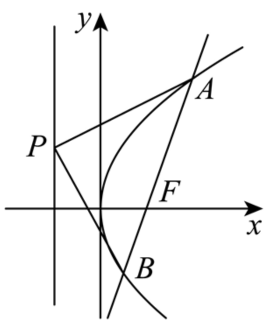
【分析】求得直线 $AB$ 的方程与抛物线方程联立求得 $A,B$，$P(-1,m)$，利用向量数量积的坐标运算求得最小值，可判断 A；要使得点 $P$ 的纵坐标最大，则 $|AB|=|AP|$，据此计算可判断 B；求得重心坐标 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}+m}{3}\right)$，重心在 $x$ 轴上时，可求 $m$，进而可求面积判断 C；$\triangle PAB$ 为钝角三角形时，点 $P$ 的纵坐标的取值范围判断 D.

【详解】依题意可得 $F(1,0)$，直线 $AB$ 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$，

代入 $y^2=4x$，消去 $y$ 得 $2x^2-5x+2=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，

因为点 A 在第一象限，所以 $A(2,2\sqrt{2})$，$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

$E$ 的准线方程为 $x=-1$，设 $P(-1,m)$，




则 $\overrightarrow{AP}=(-3,m-2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{3}{2},m+\sqrt{2}\right)$，