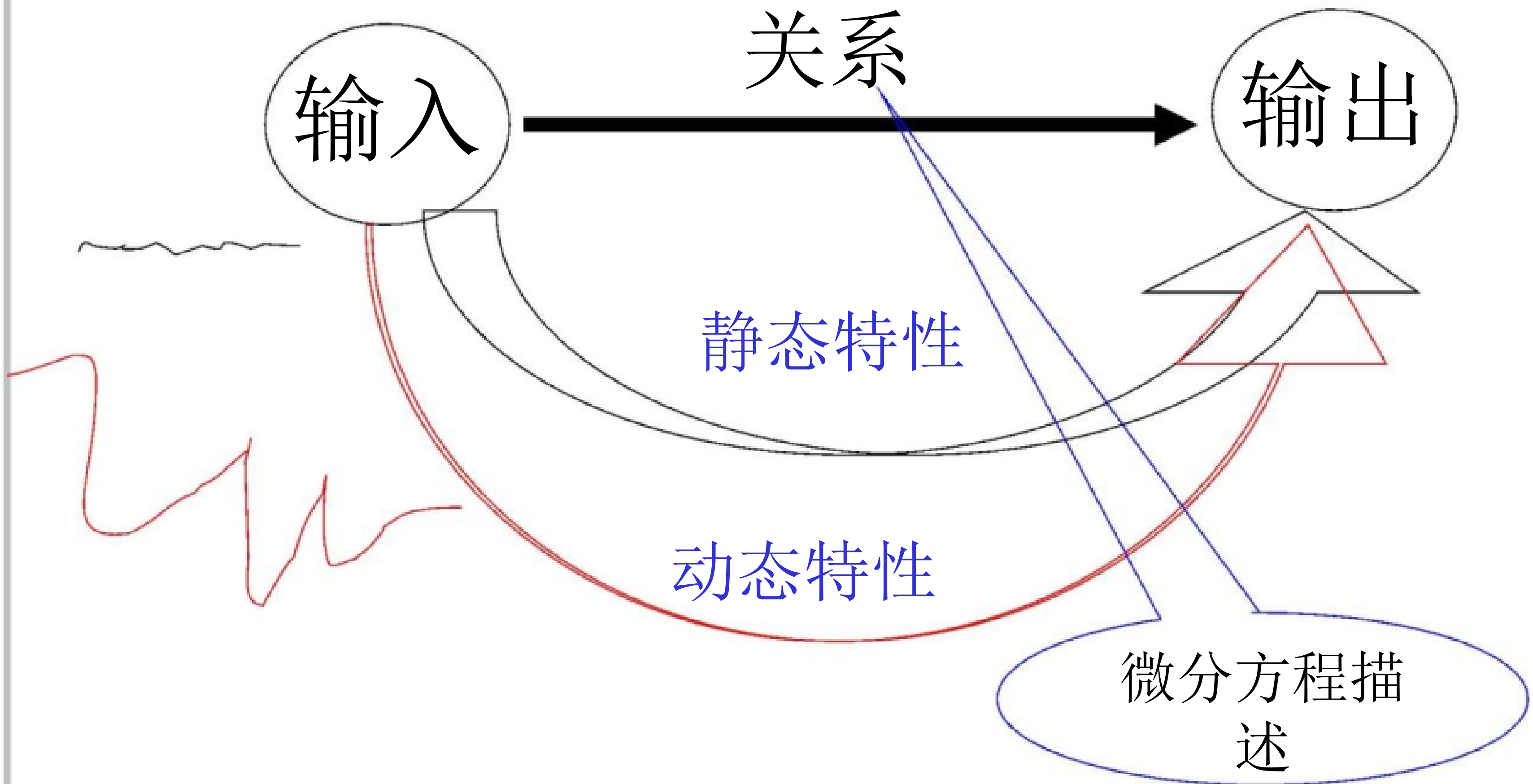
一、测试系统的数学模型

- 研究其输入—输出之间的关系及特性，以便用理论指导其设计、制造、校准与使用。
- 理论和技术上表征输入—输出之间的关系通常是以建立数学模型来体现，这也是研究科学问题的基本出发点。



$$a_0 x(t) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + \ldots = b_0 y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + \ldots$$

1、静态数学模型

在静态信号作用下，输出与输入间的一种函数关系。

若不考虑迟滞和蠕动，一般用n次多项式来表示：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

式中x 为输入量；y为输出量；a_0为零输入时的输出，也叫零位输出；a_1为传感器线性项系数也称线性灵敏度，常用K或S表示；a_2 , a_3 , ⋯ , a_n为非线性项系数，其数值由具体传感器非线性特性决定

2、传感器动态数学模型（略）

二、测试系统的静态特性

静态特性是指被测值处于稳定状态时,输出与输入的关系,主要由线性度、灵敏度、迟滞、重复性、漂移等性能来描述。

（1）线性度

线性度是输出量与输入量之间的实际关系曲线偏离直线的程度，又称非线性误差。

$$\Upsilon_L = \pm \frac{\Delta L_{max}}{Y_{FS}} \times 100\%$$

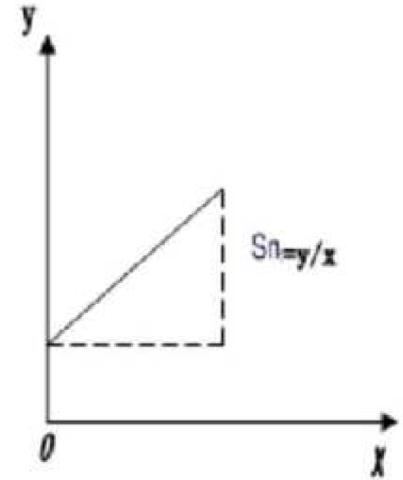
Y_{FS}为满量程输出，ΔL_{max}为最大非线性绝对误差

（2）灵敏度

灵敏度是在稳态下输出增量与输入增量的比值。

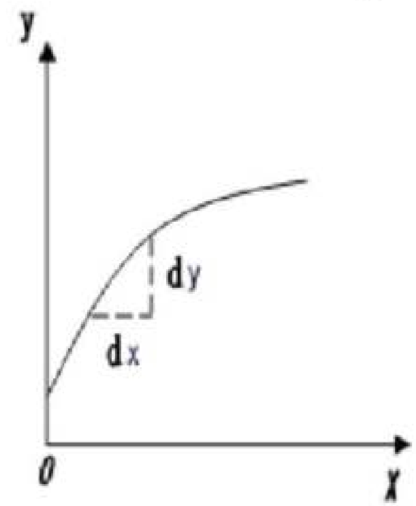
➢对于线性传感器，其灵敏度就是它的静态特性的斜率

$$S_n = \frac{y}{x}$$



➢对于非线性传感器的灵敏度是一个随工作点而变的变量.

$$S_n = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

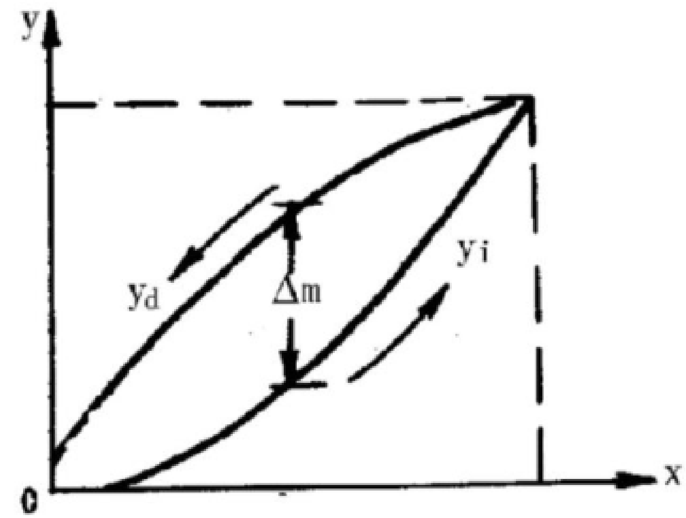


（3）回程误差

在正向行程（输入量增大）和反向行程（输入量减小）期间，输出-输入特性曲线不一致的程度。

$$\Upsilon_H = \frac{\Delta_{max}}{Y_{FS}} \times 100\%$$

磁性材料的磁滞、弹性材料迟滞现象、以及机械结构中的摩擦和游隙等原因

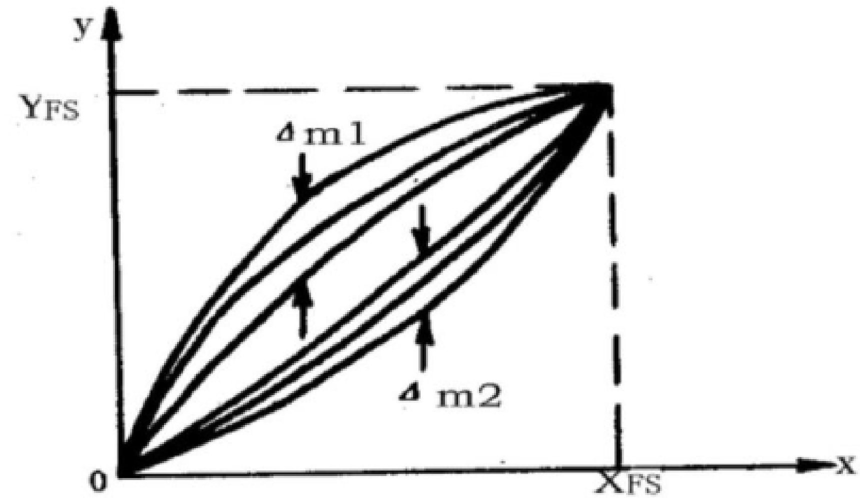


（4）重复性

重复性是在输入量按同一方向作全量程多次测试时，所得特性曲线不一致性的程度。

主要由机械部分的磨损、间隙、松动，部件的内磨擦、积尘，电路元件老化、工作点漂移等原因产生

$$\gamma_R = \pm\frac{(2\sim3)\sigma}{Y_{FS}}\times100\%$$



（5）稳定性

在室温条件下，经过相当长的时间间隔，输出与起始标定时的输出之间的差异。

（6）漂移

时间漂移：在规定的条件下零点或灵敏度随时间的缓慢变化；

$$\frac{\Delta Y_0}{Y_{FS}} \times 100\%$$

温度漂移：为环境温度变化而引起的零点或灵敏度的变化。

$$\frac{\Delta_{\max}}{Y_{FS} \cdot \Delta T} \times 100\%$$

（7）综合误差计算—静态误差[精度]

或 $$\pm\frac{3\sigma}{Y_{FS}}\times100\%$$

或用精度来表示

$$\pm\frac{\Delta A}{Y_{FS}}\times100\%$$

★精度是指仪器指示值和被测量真值的符合程度，精度是由非线性、迟滞、温度变化、漂移等一系列因素所导致的不确定度之和。

静态特性测定是选择经过校准的“标准”静态量作为输入，求出其输入/输出特性曲线。“标准”输入量误差应当是测试结果误差的1/3 ～1/5 或更小。

具体的标定过程如下：

1. 作输入-输出特性曲线
2. 求重复性误差
3. 求作正反行程的平均输入-输出曲线
4. 求回程误差
5. 求作定度曲线
6. 求作拟合直线，计算非线性误差和灵敏度

三、**测试**系**统**的**动态**特性

动态特性是反映随时间变化的输入量的响应特性。

（1）输出量达到稳定状态以后与理想输出量之间的差别；

（2）当输入量发生跃变时，输出量由一个稳态到另一个稳态之间的过渡状态中的误差。

工程上通常采用输入“标准”信号函数的方法进行分析，并据此确定若干评定动态特性的指标。

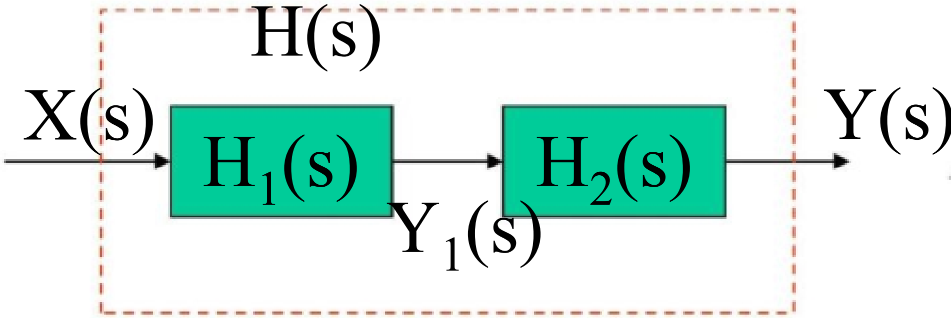
传递函数：在初始条件为零时，系统输出量的拉氏变换与输入 量的拉氏变换之比。

$$H(s)=Y(s)/X(s)$$

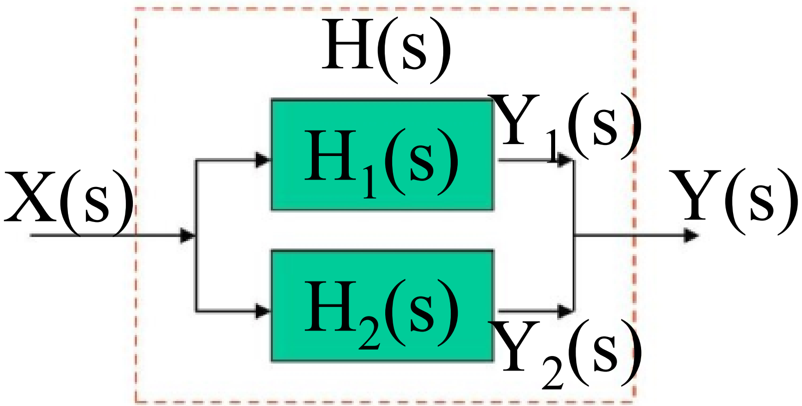
$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots a_1 s+a_0}$$

H(s)与输入x(t)无关；

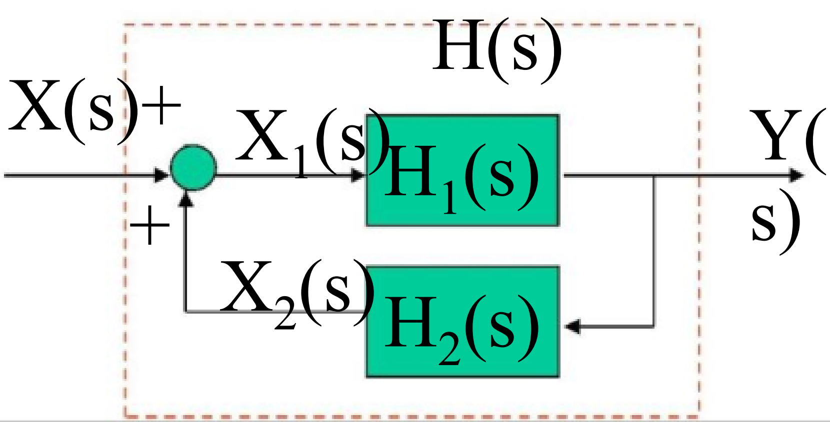
- 由H(s)所描述的系统对于任一具体的输入x(t)都有明确地相应输出y(t)
- 等式中各系数是由测试系统本身结构特性所唯一确定的常数。



$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Y_1(s)}{X(s)}\cdot\frac{Y(s)}{Y_1(s)}=H_1(s)H_2(s)$$



$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Y_1(s)+Y_2(s)}{X(s)}=H_1(s)+H_2(s)$$



$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H_1(s)}{1-H_1(s)H_2(s)}$$

频响函数：对于LTI系统，设$s=j\omega$,有

$$Y(j\omega)=\int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt$$

付氏变换(单边):

$$H(j\omega)=Y(j\omega)/X(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots b_1(j\omega)+b_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots a_1(j\omega)+a_0}$$

$H(j\omega)$ 称为测试系统的频率响应函数。

$$H(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=A(\omega)\angle\varphi(\omega)$$

系统的幅频特性： $A(\omega)=|H(j\omega)|$

系统的相频特性： $\varphi(\omega)=-\arg H(j\omega)=\varphi_y(\omega)-\varphi_x(\omega)$

A(ω)- ω曲线称为幅频特性曲线，φ(ω)- ω曲线称为相频特性曲线。20lgA(ω)-lgω和φ(ω)-lgω曲线，两者分别称为对数幅频曲线和对数相频曲线，总称为伯德图（Bode图）。

$$A(\omega)=|H(j\omega)|=\sqrt{\mathrm{Re}[H(j\omega)]^2+\mathrm{Im}[H(j\omega)]^2}$$

$$\varphi(\omega)=arctg(\mathrm{Re}[H(j\omega)]/\mathrm{Im}[H(j\omega)])$$

一阶二阶系统的传递特性

任一系统可视为多个一阶、二阶系统的组合。

$$H(s)=\sum_{i=1}^{r}\frac{q_i}{s+p_i}+\sum_{i=1}^{(n-r)/2}\frac{\alpha_i s+\beta_i}{s^2+2\zeta_i\omega_{ni}s+\omega_{ni}^2}$$

一阶系统

$$H(s)=\frac{K}{\tau s+1}\qquad K=\frac{b_0}{a_0}\qquad \tau=\frac{a_1}{a_0}$$

二阶系统

$$H(s)=\frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1}\qquad K=\frac{b_0}{a_0}\qquad \omega_n=\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

$$\zeta=\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}$$

一阶二阶系统的频响函数

- 一阶系统
  - 数学表述

$$a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_0x$$

  - 传递函数

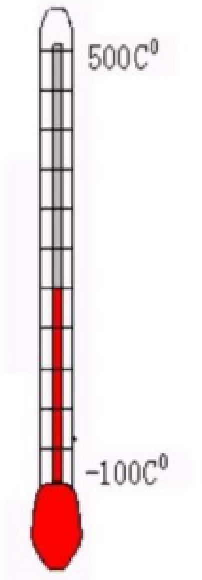
$$H(s)=\frac{K}{j\omega\tau+1}$$

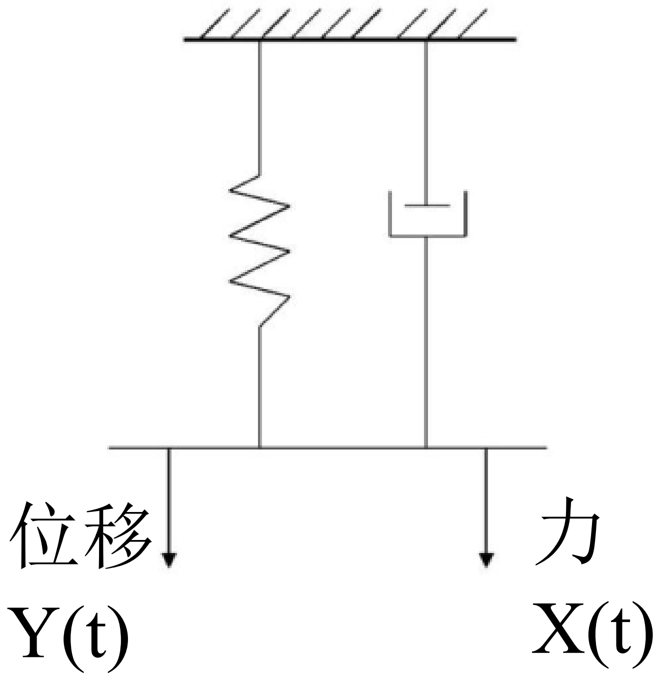
$$K=\frac{b_0}{a_0}$$ 静态灵敏度

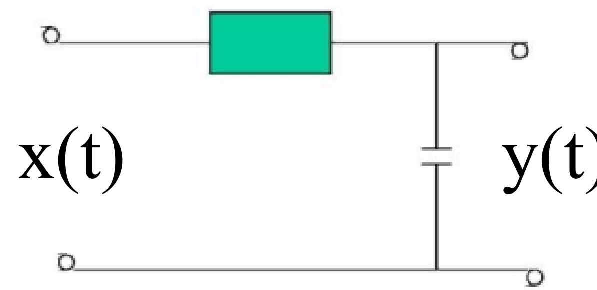
$$\tau=\frac{a_1}{a_0}$$ 时间常数

$$A(\omega)=\left|H(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-arctg\,\omega\tau$$



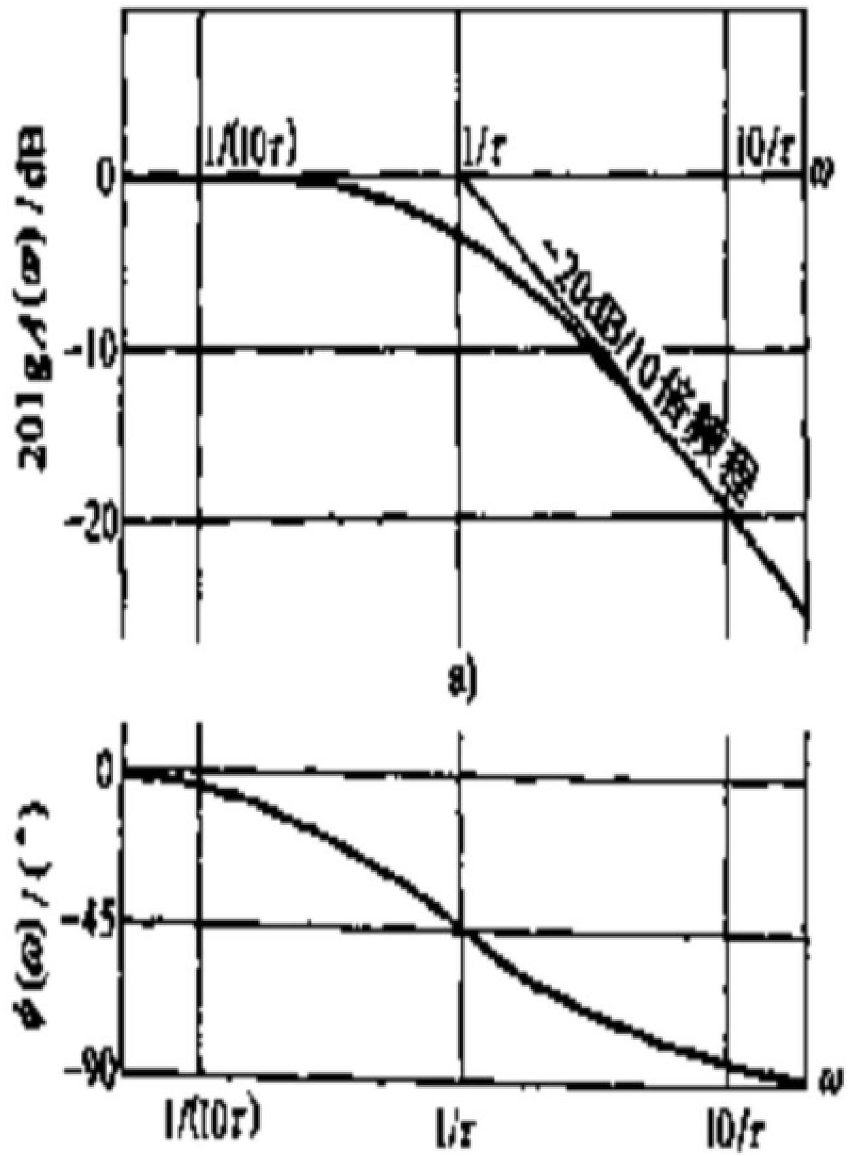




一阶系统 $H(s)=\dfrac{1}{j\omega\tau+1}$

1. 一阶系统是一个低通环节。只有当ω远小于1/τ时，幅频响应才接近于1，因此一阶系统只适用于被测量缓慢或低频的参数。

2. $\omega=\dfrac{1}{\tau}$ 幅频特性降为原来的0.707（即－3dB)，相位角滞后45^{o},时间常数τ决定了测试系统适应的工作频率范围。



二阶系统

数学表述 $$a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_0x$$

传递函数 $$H(s)=\frac{Y}{X}(s)=\frac{K}{s^2/\omega_n^2+2\varsigma s/\omega_n+1}$$

频率响应函数： $$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{K}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2+j2\xi\omega_n\omega}$$

– 静态灵敏度 $$K=\frac{b_0}{a_0}$$

– 系统固有频率 $$\omega_n=\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

– 阻尼比 $$\varsigma=\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}$$

$$H(j\omega)=\frac{K}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta j\omega}{\omega_n}+1}$$

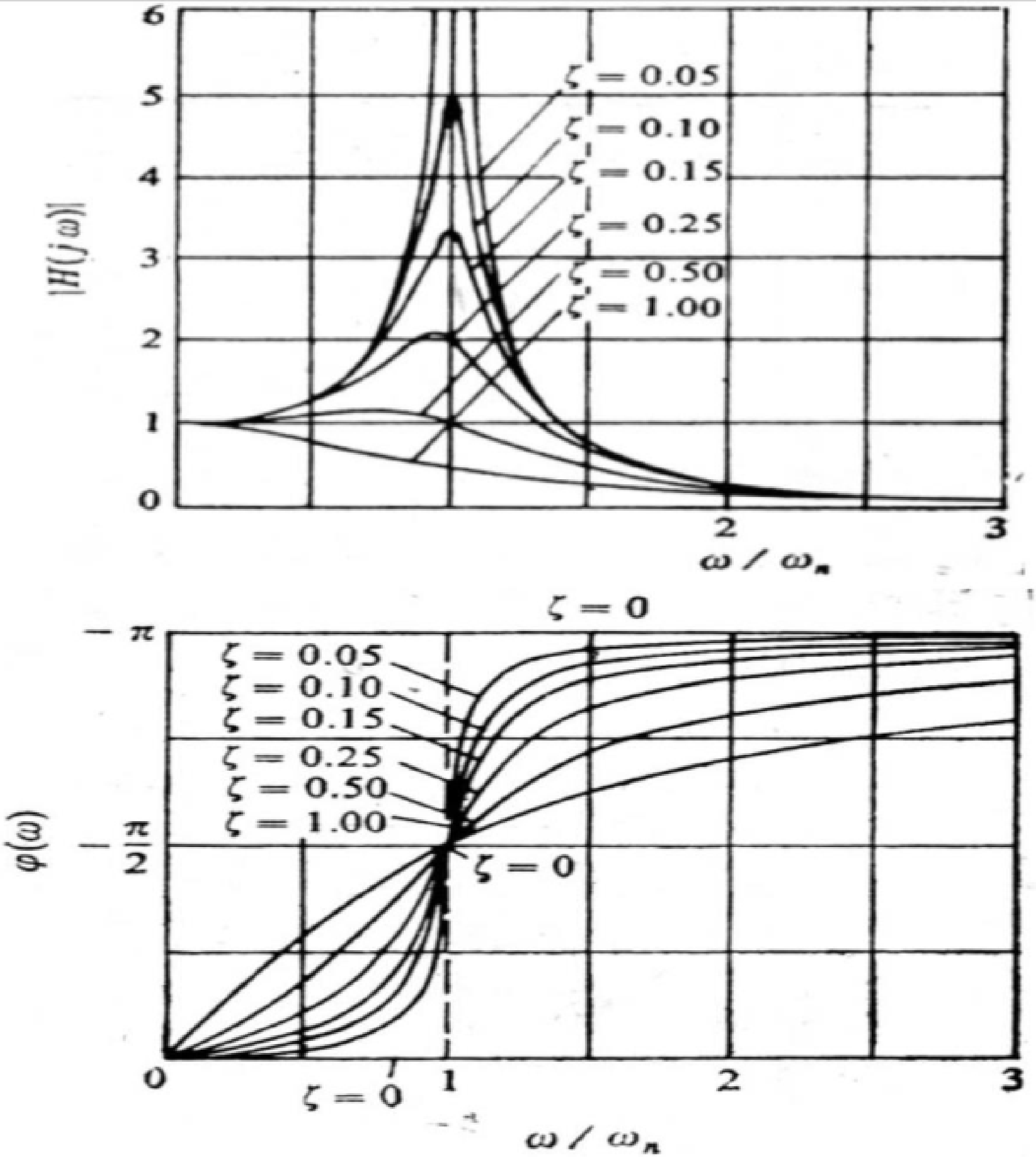
$$=\frac{K}{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})+2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{\left[1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

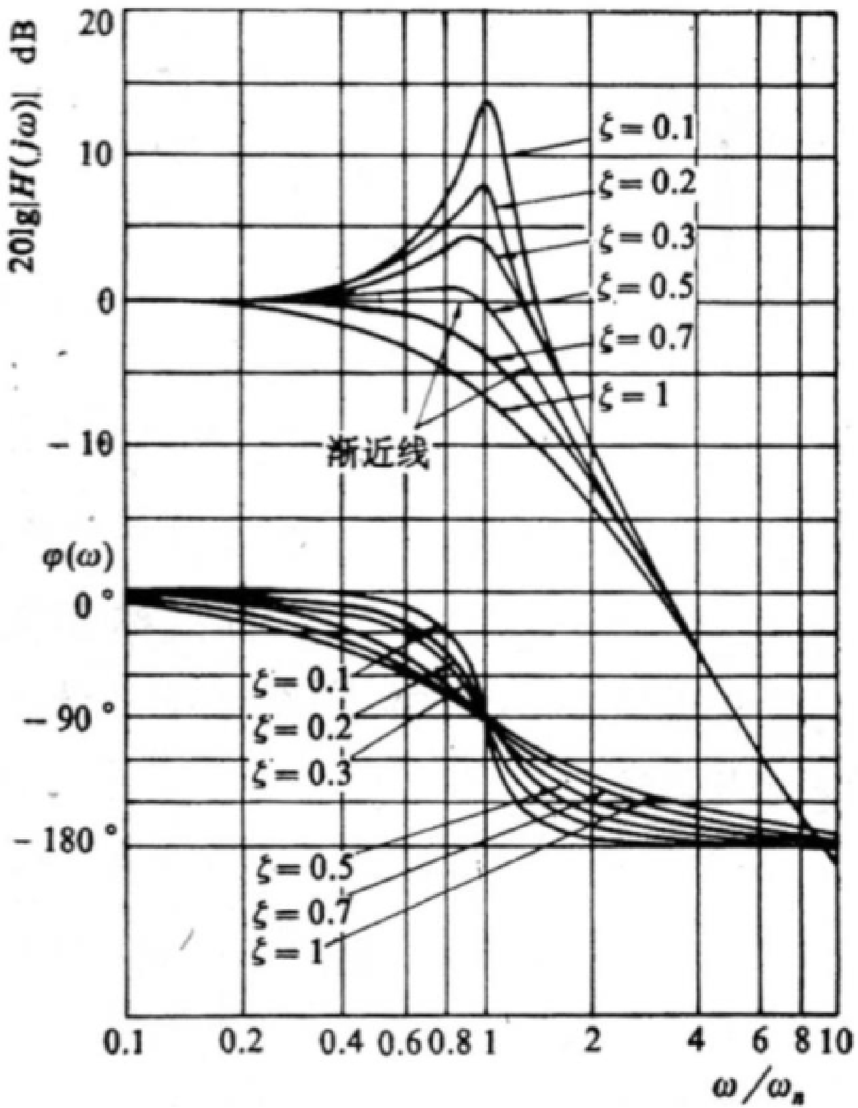
$$\varphi(\omega)=-arctg\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

弹簧—质量—阻尼系统

RLC电路系统



6
5
4
3
2
1
0
|H(jω)|
ζ = 0.05
ζ = 0.10
ζ = 0.15
ζ = 0.25
ζ = 0.50
ζ = 1.00
2
3
ω / ωn
ζ = 0
−π
ζ = 0.05
ζ = 0.10
ζ = 0.15
ζ = 0.25
ζ = 0.50
ζ = 1.00
φ(ω)
−π/2
ζ = 0
0
ζ = 0
1
2
3
ω / ωn



Bode图

1.二阶系统是一振荡环节，当
是装置的共振点；

2.二阶系统是一个低通环节，当

曲线呈水平状态，随w的增大，A(w)先进入共振区，后进入衰减区；

3.当ξ=0. 7左右时， A(w)几乎无共振，其水平段最长，其相频几乎是一斜直