

## 第三章 运输问题

- 运输问题及其数学模型
- 用表上作业法求解运输问题
- 运输问题的进一步讨论
- 应用问题举例

## ■ 问题的提出

一般的运输问题就是要解决把某种产品从若干个产地调运到若干个销地，在**每个产地的供应量与每个销地的需求量已知**，并知道**各地之间的运输单价**的前提下，如何确定一个使得总的**运输费用最小**的方案。

# §1 运输问题及其数学模型

## 经典运输问题——单一品种物资的运输调度问题

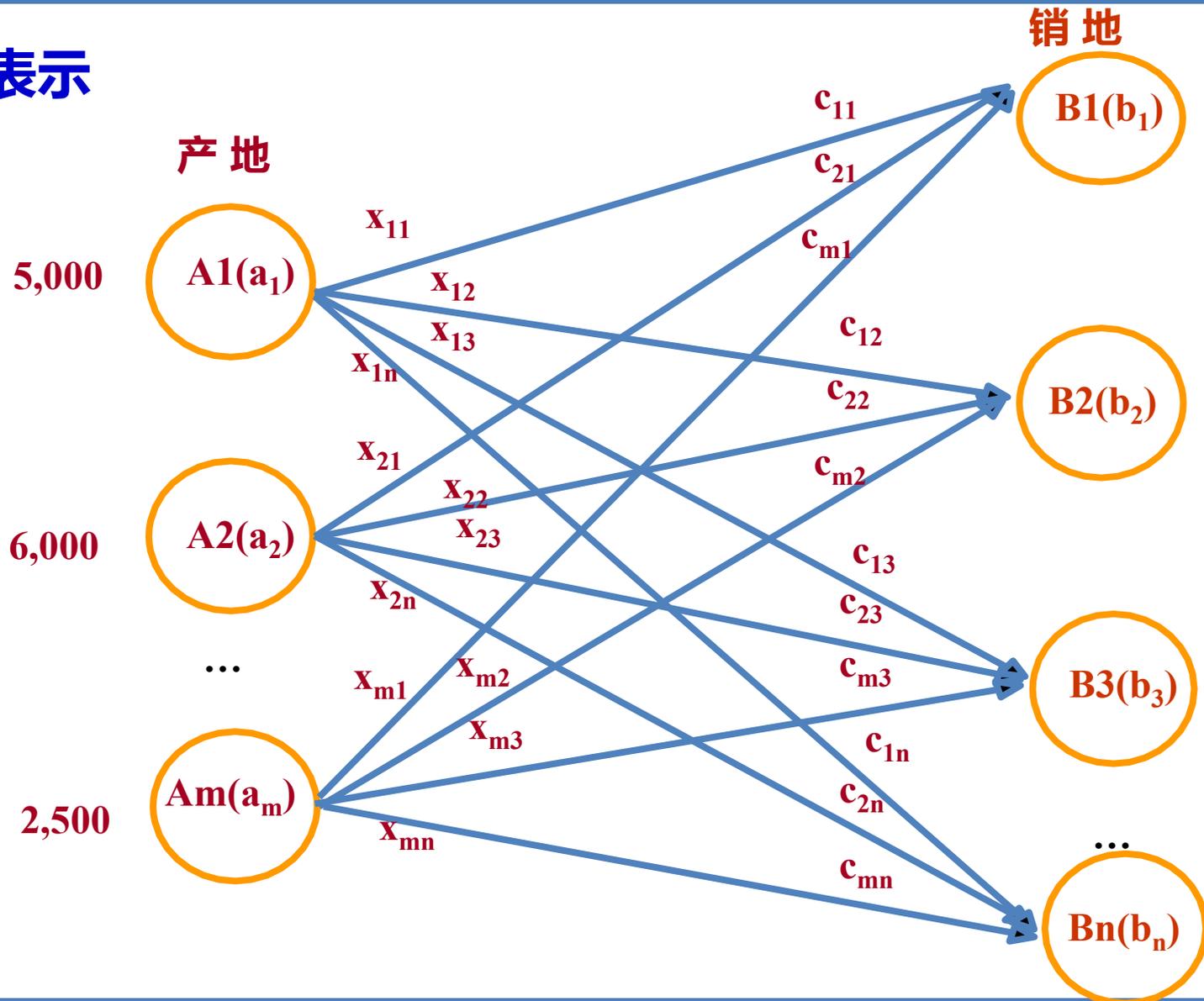
表 3-1

产地 \ 销地	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$	产量
$A_1$	$x_{11}$ $c_{11}$	$x_{12}$ $c_{12}$		$x_{1n}$ $c_{1n}$	$a_1$
$A_2$	$x_{21}$ $c_{21}$	$x_{22}$ $c_{22}$		$x_{2n}$ $c_{2n}$	$a_2$
⋮					⋮
$A_m$	$x_{m1}$ $c_{m1}$	$x_{m2}$ $c_{m2}$		$x_{mn}$ $c_{mn}$	$a_m$
销量	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	

由产地  $A_i$  运往销地  $B_j$  的物品数量  $x_{ij}$        $c_{ij}$  到  $B_j$  的单位运价

# §1 运输问题及其数学模型

## ■ 网络表示



# §1 运输问题及其数学模型

- 如果运输问题的总产量等于其总销量，即有 $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ 则称该运输问题为**产销平衡运输问题**；反之，称产销不平衡运输问题。
- 产销平衡运输问题的数学模型可表示如下（ $m$ 个产地， $n$ 个销地）：

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j (j = 1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

# §1 运输问题及其数学模型

## 二、运输问题数学模型的特点

1. 运输问题一定有最优解；基变量的个数： $m+n-1$ 。
2. 运输问题约束条件的系数矩阵：

$$\begin{matrix}
 x_{11} & x_{12} & \text{L} & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \text{L} & x_{2n} & \text{L} & x_{m1} & x_{m2} & \text{L} & x_{mn} \\
 \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 1 & \text{L} & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \text{L} & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \text{L} & 1 \\
 1 & & & & 1 & & & & \text{L} & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & \text{L} & & 1 & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & & & & 0 & \\
 & & & 1 & & & & 1 & \text{L} & & & & 1
 \end{array} \right]
 \end{matrix}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ n \text{ 行} \end{array}$$

系数列  $P_{ij} = e_i + e_j$   
 其中， $e_i, e_j$  分别表示第  $i$  和第  $m+j$  位置为 1，其余位置为 0 的单位向量。

## ■ 运输问题具有下述特点：

- (1) 约束条件系数矩阵的元素等于 0 或 1；
- (2) 约束条件系数矩阵的每一列有两个非零元素，这对应于每一个变量在前 $m$ 个约束方程中出现一次，在后 $n$ 个约束方程中也出现一次。

## ■ 对产销平衡运输问题，除上述两个特点外，还有以下特点：

- (1) 所有约束条件都是等式约束；
- (2) 各产地产量之和等于各销地销量之和。

# §1 运输问题及其数学模型

例1 某部门有3个生产同类产品的工厂(产地), 生产的产品由4个销售点(销地)出售, 各工厂的生产量、各销售点的销售量(假定单位均为t)以及各工厂到各销售点的单位运价(元 / t)示于表3-2中, 要求研究产品如何调运才能使总运费最小?

表3-2

销地 产地	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	产量
$A_1$	4	12	4	11	16
$A_2$	2	10	3	9	10
$A_3$	8	5	11	6	22
销量	8	14	12	14	48

# §1 运输问题及其数学模型

该问题的数学模型：

此处 $m=3$ ， $n=4$

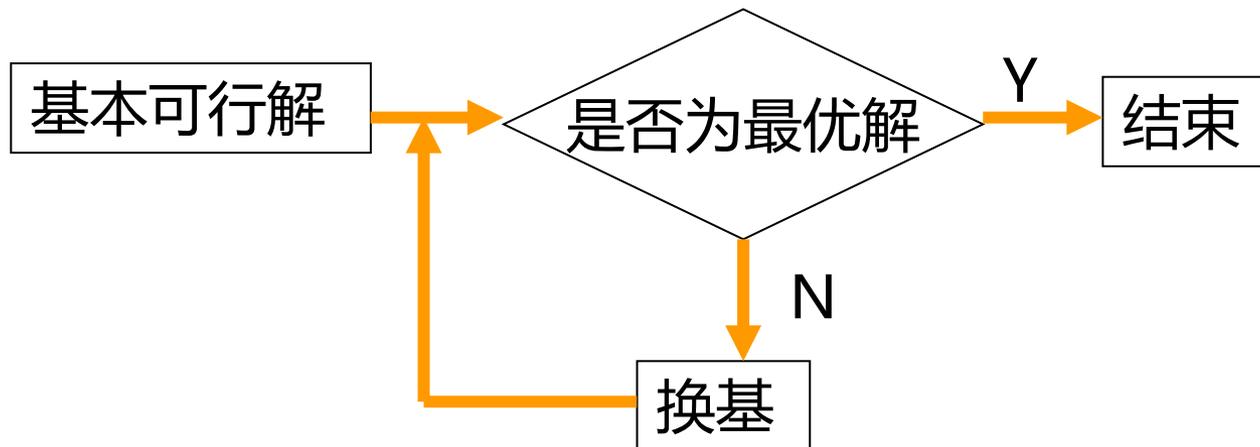
$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = 4x_{11} + 12x_{12} + 4x_{13} + 11x_{14} + 2x_{21} \\ & + 10x_{22} + 3x_{23} + 9x_{24} + 8x_{31} + 5x_{32} + 11x_{33} + 6x_{34} \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 16 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 22 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 8 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 14 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 12 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 14 \\ x_{ij} \geq 0, (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

## §2 用表上作业法求解运输问题

### 一、表上作业法的基本思想和步骤：

#### 1. 基本思想：同单纯形法的基本思想



### 二、表上作业法的步骤

(1) 寻找初始基可行解；

最小元素法、西北角法、沃格尔法

(2) 求出非基变量检验数（空格的检验数），判断是否为最优解；

闭回路法、位势法

(3) 换基改进，找到新的基可行解

闭回路调整法

(4) 重复(2)(3)

### ■ 寻找初始基可行解

#### 1. 最小元素法

从运价最小的格开始，在格内的左下角标上允许取得的最大数。然后按运价从小到大顺序填数。若某行（列）的产量（销量）已满足，则把该行（列）的其他格划去。如此进行下去，直至得到一个基本可行解。

# §2 用表上作业法求解运输问题

## 1. 最小元素法

销地 产地	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	产量	
$A_1$	4	12	10	6	16	⑥
$A_2$	2	10	2	9	10	②
$A_3$	8	14	11	8	22	⑤
销量	8	14	12	14	48	
	①	④	③	⑥		

$$\text{总费用 } z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$$

$$= 10 \times 4 + 6 \times 11 + 8 \times 2 + 2 \times 3 + 14 \times 5 + 8 \times 6 = 246$$

### ■ 寻找初始基可行解

#### 2. 西北角法

从西北角（左上角）格开始，在格内的左下角标上允许取得的最大数。然后按行（列）标下一格的数。若某行（列）的产量（销量）已满足，则把该行（列）的其他格划去。如此进行下去，直至得到一个基本可行解。

# §2 用表上作业法求解运输问题

## 2. 西北角法----续

销地 产地	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	产量	
$A_1$	8 4	8 12	4	11	16	②
$A_2$	2	6 10	4 3	9	10	④
$A_3$	8	5	8 11	14 6	22	⑥
销量	8	14	12	14	48	
	①	③	⑤	⑥		

$$\begin{aligned}
 \text{总费用 } z &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \\
 &= 8 \times 4 + 8 \times 12 + 6 \times 10 + 4 \times 3 + 8 \times 11 + 14 \times 6 = 372
 \end{aligned}$$

### ■ 寻找初始基可行解

#### 3. 沃格尔法

- (1) 罚数 = 次小费用 - 最小费用
- (2) 找出最大的罚数行或列所对应的最小费用优先安排。
- (3) 重复计算步骤(1)和(2)

### 3. 沃格尔法

寻找初始基可行解

销地 \ 产地		B1	B2	B3	B4	产量	行罚数				
							1	2	3	4	5
A1		4	12	4	11	16	0	0	0	7	0
A2		2	10	3	9	10	1	1	1	6	0
A3		8	5	11	6	22	1	2			
销量		8	14	12	14	48					
列罚数	1	2	5	1	3	总费用 $z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$ =244					
	2	2		1	3						
	3	2		1	2						
	4			1	2						
	5				2						

### ■ 解的最优性检验

- 最优性检验：检查所得到的方案是不是最优方案。
- 检查的方法与单纯形方法中的原理相同，即**计算检验数**。
- 因运输问题目标要求极小，故当所有的**空格（即非基变量）**的检验数都**大于或等于零**时该调运方案就是最优方案；否则就不是最优，需要进行调整。

下面介绍两种求检验数的方法：**闭回路法和对偶变量法**。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/766033004221010130>