高中数学：
指数、指数函数与幂函数

—— 知识点 ——

1．根式

n次方根	概念	如果$x^n=a$，那么x叫作a的 **n次方根** ，其中$n>1$，$n\in\mathbf{N}^*$
	性质	当n是 **奇数** 时，a的n次方根为$x=\sqrt[n]{a}$
		当n是 **偶数** 时，正数a的n次方根为$x=\pm\sqrt[n]{a}$，负数的偶次方根没有 **意义**
		0的任何次方根都是0，记作$\sqrt[n]{0}=0$

<table>
<tr><td rowspan="4">根式</td><td>概念</td><td>式子$\sqrt[n]{a}$叫作<u>根式</u>，其中 n 叫作<u>根指数</u>，a 叫作<u>被开方数</u></td></tr>
<tr><td rowspan="3">性质</td><td>当 n 为任意正整数时，$(\sqrt[n]{a})^n=$<u>a</u></td></tr>
<tr><td>当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=$<u>a</u></td></tr>
<tr><td>当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert=\begin{cases} a\ (a\geq 0), \\ -a\ (a<0) \end{cases}$</td></tr>
</table>

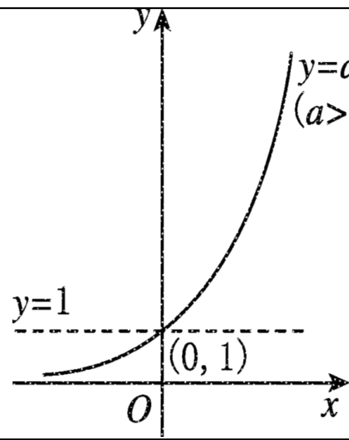
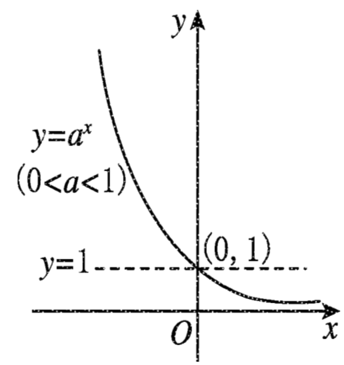
2.分数指数幂

<table>
<tr><td rowspan="3">概念</td><td>正数的正分数指数幂：
$a^{\frac{m}{n}}=$ <u>$\sqrt[n]{a^m}$</u></td><td rowspan="2">$(a>0, m, n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$</td></tr>
<tr><td>正数的负分数指数幂：
$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">0 的正分数指数幂等于 <u>0</u>；0 的负分数指数幂没有 <u>意义</u></td></tr>
<tr><td rowspan="3">运算性质</td><td colspan="2">$a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0，r，s\in\mathbf{Q})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(a^r)^s=a^{rs}(a>0，r，s\in\mathbf{Q})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(ab)^r=a^rb^r(a>0，b>0，r\in\mathbf{Q})$</td></tr>
</table>

3.无理数指数幂

无理数指数幂 $a^{\alpha}(a>0$，α 是无理数)是一个确定的实数．有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂．

2.指数函数的图像与性质

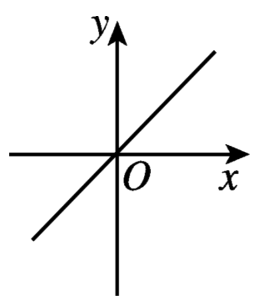
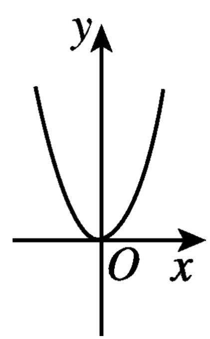
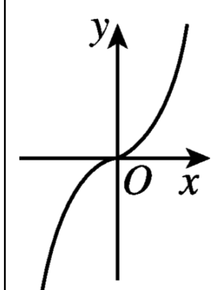
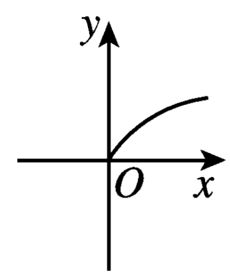
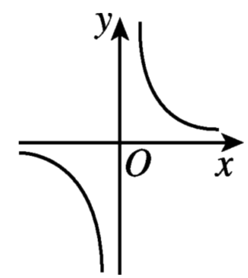
概念	函数 $y=a^x$($a>0$，且 $a\neq1$)叫作**指数**函数	
底数	$a>1$	$0<a<1$
图像		
定义域	**R**	
值域	**(0，+∞)**	

性质	过定点________ (0，1)	
	在 **R** 上是____函数 增	在 **R** 上是____函数 减

5.幂函数

(1)定义：形如$\underline{\quad y=x^{\alpha}\quad}$($\alpha\in\mathbf{R}$)的函数称为幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数.

(2)常见的五种幂函数的图像与性质比较

函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图像					

性质	定义域	R	R	R	$\{x\|x\geqslant 0\}$	$\{x\|x\neq 0\}$
	值域	R	$\{y\|y\geqslant 0\}$	R	$\{y\|y\geqslant 0\}$	$\{y\|y\neq 0\}$
	奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
	单调性	增	在$(-\infty, 0]$上单调递减，在$(0, +\infty)$上单调递增	增	增	在$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$上为减函数
	公共点	$(1, 1)$				

▸ **链接教材**

1．[教材改编] 若 $x+x^{-1}=3$，则 $x^2-x^{-2}=$________.

[答案] $\pm 3\sqrt{5}$

[解析] 由$(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=9$，得 $x^2+x^{-2}=7$. 又$(x-x^{-1})^2=x^2-2+x^{-2}=5$，所以 $x-x^{-1}=\pm\sqrt{5}$，所以 $x^2-x^{-2}=(x+x^{-1})(x-x^{-1})=\pm 3\sqrt{5}$.

2．[教材改编] 已知 $2^{x-1}<2^{3-x}$，则 x 的取值范围是__________.

[答案] $(-\infty, 2)$

[解析] 根据指数函数性质，得 $x-1<3-x$，解得 $x<2$，所以 x 的取值范围是$(-\infty, 2)$.

3．[教材改编] 已知幂函数$y=f(x)$的图像过点$(2，\sqrt{2})$，则函数$f(x)=$__________.

[答案] $x^{\frac{1}{2}}$

[解析] 设$f(x)=x^{\alpha}$，则$\sqrt{2}=2^{\alpha}$，所以$\alpha=\frac{1}{2}$，故函数$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

▶ **易错问题**

4．$(\sqrt[n]{a})^n$ 与 $\sqrt[n]{a^n}$ 的区别

$(\sqrt[3]{-4})^3=$________，$\sqrt[4]{(-4)^4}=$________.

[答案] -4　4

[解析] 易知 $(\sqrt[n]{a})^n=a$；当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$，当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|$.所以结果为 -4，4.

5．指数函数的运算法则

$2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}=$__________，$2^{\frac{1\,1}{2\,3}}=$__________.

[答案] $6^{\frac{1}{3}}$　$2^{\frac{1}{6}}$

[解析] 由 $a^rb^r=(ab)^r$，$(a^r)^s=a^{rs}$，可得 $2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{3}}$，$2^{\frac{1\,1}{2\,3}}=2^{\frac{1}{6}}$.

6．指数函数的定义

若函数 $f(x)=(a-1)\cdot a^x$ 为指数函数，则 $f(2)\cdot f(3)=$________.

[答案] 32

[解析] 只有当 $a-1=1$，即 $a=2$ 时，$f(x)$才是指数函数，故 $f(x)=2^x$.$f(2)f(3)=2^2\times 2^3=2^5=32$.

7．幂函数是形式上的定义

若函数 $y=(m-1)x^m$ 为幂函数，则该函数的单调递减区间是_________.

［答案］$(-\infty，0]$

[解析] 由题意知 $m-1=1$，即 $m=2$，此时 $y=x^2$，其单调递减区间为 $(-\infty，0]$.

▸ **通性通法**

8．指数型函数的图像恒过定点

函数 $f(x)=a^{x-2}+3(a>0，a\neq 1)$ 恒过的定点是________.

[答案] (2，4)

[解析] 当 $x-2=0$，即 $x=2$ 时，$a^{x-2}=1$，故 $f(2)=4$，故 $f(x)$的图像恒过点(2，4).

► 探究点一　指数幂的化简与求值

例 1　下列结果错误的是(　　)

A. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}+\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}=\sqrt{2}-1$

B. $1.5-\frac{1}{3}\times-\frac{7_0}{6}+8^{0.25}\times\sqrt[4]{2}+(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6-\sqrt{-\frac{22}{33}}=110$

C. $\sqrt{\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^2}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[4]{a^3}}}=\pm a\sqrt[4]{a}$

D. $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}$

[思路点拨] 逐个计算即得.

D [解析] A 中，原式$=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+(1-\sqrt{2})+|1-\sqrt{2}|=(\sqrt{2}-1)+(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1$；

B 中，原式$=\frac{21}{33}\times 1+2\frac{3}{4}\times 2\frac{1}{4}+2\frac{1}{3}\times 3\frac{1}{2}{}^{6}-\frac{21}{33}=2+4\times 27=110$；

C 中，原式$=a\frac{3}{2}-\frac{3}{12}\cdot \pm b\frac{3}{15}-\frac{2}{10}=\pm a\frac{5}{4}=\pm a\sqrt[4]{a}$；

D 中，原式$=-\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2(4+2\sqrt{3})}=-\sqrt[6]{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}=-\sqrt[6]{16-12}=-\sqrt[3]{2}$.

[总结反思] 在进行根式、指数幂的化简中要准确使用运算法则，按照指数运算、乘除运算、加减运算的三级运算法则进行运算，在含有嵌套的根式中注意从内到外逐次化为分数指数幂.

变式题下列结果错误的是(　　)

A．$7\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{24}-6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}=0$

B．$(0.064)^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{7}{8}\right)^{0}+[(-2)^{3}]^{-\frac{4}{3}}+16^{-0.75}+|-0.01|^{\frac{1}{2}}=\frac{143}{80}$

C．$\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\sqrt[3]{a^{13}}}=1$

D．$\sqrt{(x-2)^{2}}+\sqrt[3]{(x-2)^{3}}=0$

D　[解析] A 中，$7\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{24}-6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}=7\times 3^{\frac{1}{3}}-3\times 3^{\frac{1}{3}}\times 2-6\times 3^{-\frac{2}{3}}+(3\times 3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{3}}-6\times 3^{-\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}=2\times 3^{\frac{1}{3}}-2\times 3\times 3^{-\frac{2}{3}}=2\times 3^{\frac{1}{3}}-2\times 3^{\frac{1}{3}}=0$；

B 中，原式$=0.4^{-1}-1+(-2)^{-4}+2^{-3}+0.1=\frac{10}{4}-1+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\frac{143}{80}$；

C 中，原式$=\dfrac{a^{\frac{9}{6}}a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{7}{6}}a^{\frac{13}{6}}}=a^{\frac{9}{6}+\frac{7}{6}-\frac{3}{6}-\frac{13}{6}}=a^{0}=1$；

D 中，$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^3}=|x-2|+(x-2)=\begin{cases}2(x-2), & x\geq 2,\\ 0, & x<2.\end{cases}$

► 探究点二 指数函数的图像及应用

例 2(1)函数 $y=2^{1-x}$ 的大致图像为(　　)

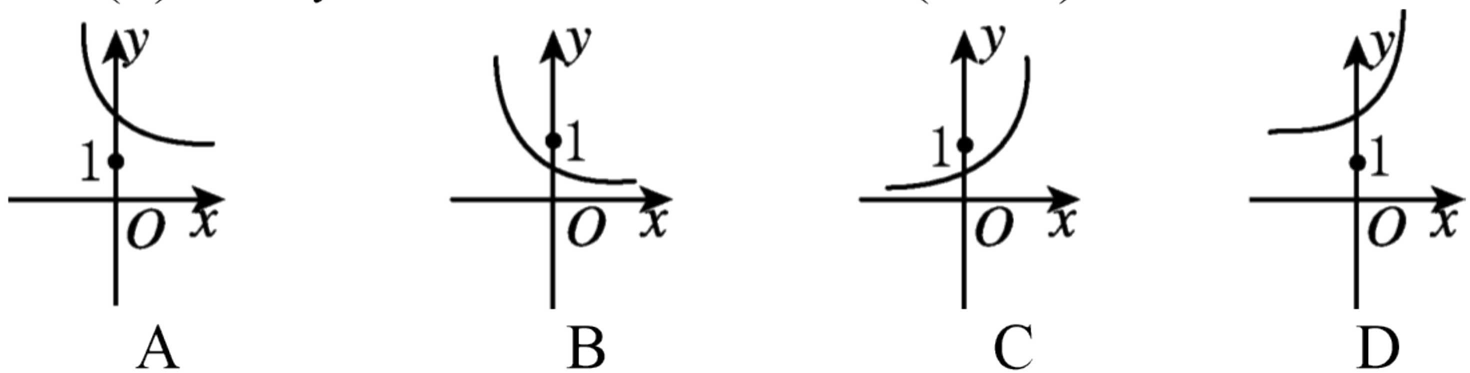


图 1 7 1

(2)[2015·浙江五校联考] 已知 $max\{a，b\}$表示 a，b 两数中的较大值．若 $f(x)=max\{e^{|x|}，e^{|x-2|}\}$，则 $f(x)$的最小值为__________；若函数 $g(x)=max\{e^{|x|}，e^{|x-t|}\}$关于 $x=2015$ 对称，则 $t=$__________．

[思路点拨] (1)变换函数解析式，充分利用指数函数的图像特点；(2)画出有关函数的图像，利用图像求解.

[答案] (1)A　(2)e　4030

[解析] (1)$y=2^{1-x}=2\times\frac{1}{2}^{x}$，函数单调递减且过点(0，2)，结合选项，可知选项A中的图像符合要求.

(2)画出函数 $y=e^{|x|}$，$y=e^{|x-2|}$的图像(图略). 由 $e^{|x|}=e^{|x-2|}$，且两函数图像交点的横坐标 $0<x<2$，得 $e^{x}=e^{2-x}$，解得 $x=1$，所以当 $x=1$ 时，$f(x)_{\min}=e$.易知函数 $y=e^{|x|}$，$y=e^{|x-t|}$的图像的交点坐标为$\left(\frac{t}{2}, e^{\frac{t}{2}}\right)$，$g(x)$的图像关于直线 $x=\frac{t}{2}$对称，故$\frac{t}{2}=2015$，解得 $t=4030$.