第四章　函数应用

§1　函数与方程

1.1　利用函数性质判定方程解的存在

1.了解函数的零点的概念,理解函数的零点与方程的根的关系.

2.掌握函数零点的判定定理,会探究在某区间上图像连续的函数存在零点的判定方法.

3.会求简单函数的零点,体会函数与方程思想及数形结合思想等数学思想的应用.

1.函数的零点

- **定义**：函数$y=f(x)$的图像与横轴的交点的______称为这个函数的零点
- **意义**：函数$y=f(x)$的零点就是方程______的解
- **总结**：方程$f(x)=0$有解$\Leftrightarrow$函数$f(x)$的图像与x轴有交点$\Leftrightarrow$函数$f(x)$有零点;并非所有的函数都有零点.例如,函数$f(x)=x^2+1$,由于方程$x^2+1=0$无实数根,则该函数无零点

【做一做1-1】 函数$y=x$的零点是(　　)

A.(0,0)

B.0

C.1

D.不存在

答案:B

【做一做1-2】 函数$f(x)=x^2-2x$的零点个数是（　　)

A.0　B.1

C.2　D.3

答案:C

2.函数零点的判定定理

若函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上的图像是　　　曲线,并且在区间端点的函数值符号　　　,即　　　　<0,则在区间(a,b)内,函数$y=f(x)$至少有　　　零点,即相应的方程$f(x)=0$在区间(a,b)内至少有一个实数解.

名师点拨当函数$y=f(x)$同时满足:①函数的图像在闭区间$[a,b]$上是连续的曲线;②$f(a)\cdot f(b)<0$,则可以判断函数$y=f(x)$在区间(a,b)内至少有一个零点,但是不能明确说明有几个零点.

当函数$y=f(x)$的图像在闭区间$[a,b]$上不是连续的曲线,或不满足$f(a)\cdot f(b)<0$时,函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$内可能存在零点,也可能不存在零点.

例如,①二次函数$f(x)=x^2-2x-3$在区间$[3,4]$上有$f(3)=0$,$f(4)>0$,所以有$f(3)\cdot f(4)=0$,但3是函数$f(x)$的一个零点.

②函数$f(x)=x^2$在区间$[-1,1]$上有$f(-1)\cdot f(1)=1>0$,但是函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上存在零点0.

③函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x>0, \\ -2, x=0, \\ x-3, x<0 \end{cases}$ 在区间$[-1,1]$上有$f(-1)\cdot f(1)<0$,但是由其图像知函数$f(x)$在区间$[-1,1]$内无零点.

【做一做2-1】 已知函数$f(x)=x^3-x-1$仅有一个正零点,则此零点所在的区间是(　　)

A.(3,4)　　B.(2,3)

C.(1,2)　　D.(0,1)

解析:利用零点存在的判定条件,判断零点存在的区间.$f(0)=-1<0$, $f(1)=-1<0$,$f(2)=5>0$,$f(3)=23>0$,$f(4)=59>0$.根据选项,只有区间(1,2)满足.

答案:C

【做一做2-2】 已知函数$f(x)=mx-1$在(0,1)内有零点,则实数m的取值范围是____________________.

解析:由$f(0)\cdot f(1)<0$得$(-1)\cdot(m-1)<0$.解得$m>1$.

答案:$(1,+\infty)$

题型一　求函数的零点

【例1】 判断下列函数是否存在零点,若存在,请求出零点:

(1)$f(x)=\frac{-2}{x-1}$;

(2)$f(x)=3x-9$;

(3)$f(x)=\frac{(x-1)(x^2-4x+3)}{x-3}$;

(4)$f(x)=1-\log_3 x$.

分析:求函数的零点就是求相应方程的实数解.

解:(1)令 $\frac{-2}{x-1}=0$,无实数解,则函数 $f(x)=\frac{-2}{x-1}$ 不存在零点.

(2)令 $3^x-9=0$,即 $3^x=9$,解得 $x=2$,所以函数 $f(x)=3^x-9$ 存在零点,且零点为2.

(3)令 $\frac{(x-1)(x^2-4x+3)}{x-3}=0$,即 $\frac{(x-1)^2(x-3)}{x-3}=0$,解得 $x=1$,

所以函数 $f(x)=\frac{(x-1)(x^2-4x+3)}{x-3}$ 存在零点,且零点为 1.

(4)令 $1-\log_3 x=0$,解得 $x=3$,所以函数 $f(x)=1-\log_3 x$ 存在零点,且零点是3.

反思求函数零点的方法

求函数$f(x)$的零点即求方程$f(x)=0$的实数解.若方程$f(x)=0$有实数解,则函数$f(x)$存在零点,否则函数$f(x)$不存在零点.

(1)对于二次函数的零点,可以用多种方法求解,如公式法、因式分解法、配方法等.

(2)对于三次及三次以上的高次函数的零点,一般采用因式分解法.

(3)对于指数、对数函数的零点,一般是解指数、对数方程.

【变式训练1】 若$f(x)=ax-b(b\neq 0)$有一个零点3,则函数$g(x)=bx^2+3ax$的零点是____________________.

解析:由$f(x)=ax-b(b\neq 0)$有一个零点3,

得$3a-b=0$,即$3a=b$,

又$g(x)=bx^2+3ax=x(bx+3a)=x(bx+b)$.

令$g(x)=0$,解得$x_1=0,x_2=-1$.

答案:0和-1

题型二 判断函数的零点个数

【例2】 求函数$f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$的零点个数.

分析:方法一,借助函数$f(x)$的单调性确定;方法二,借助函数$f(x)$的图像确定.

解:(方法一) ∵$f(0)=1+0-2=-1<0$,

$f(2)=4+\lg 3-2=2+\lg 3>0$,

∴$f(x)=0$在$(0,2)$上必定存在实根.

又$f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$在定义域$(-1,+\infty)$上为增函数,故$f(x)$有且只有一个零点.