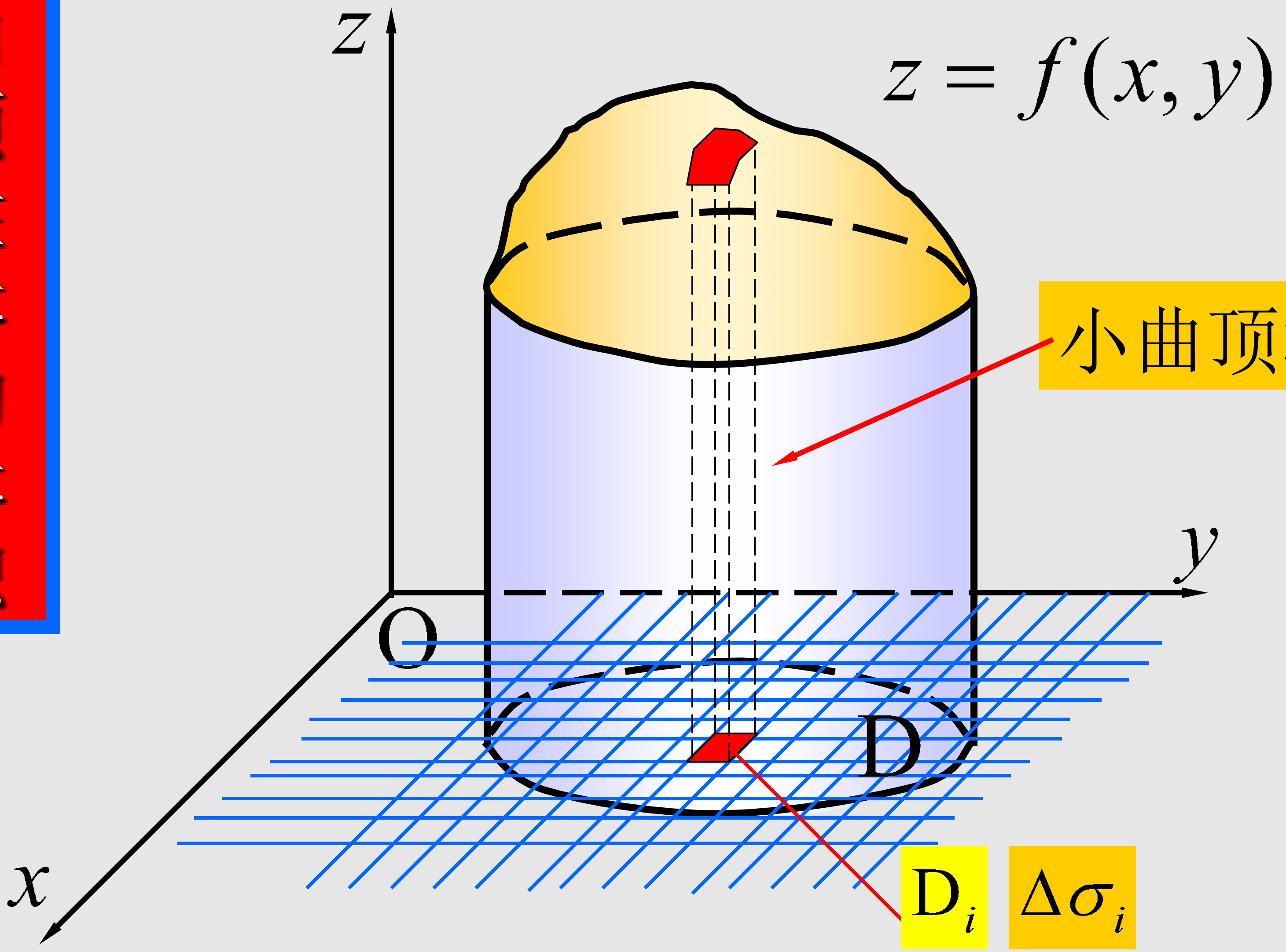
曲顶柱体的体积



对 D 进行分割： D_i ， $\Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, L\ , n)$

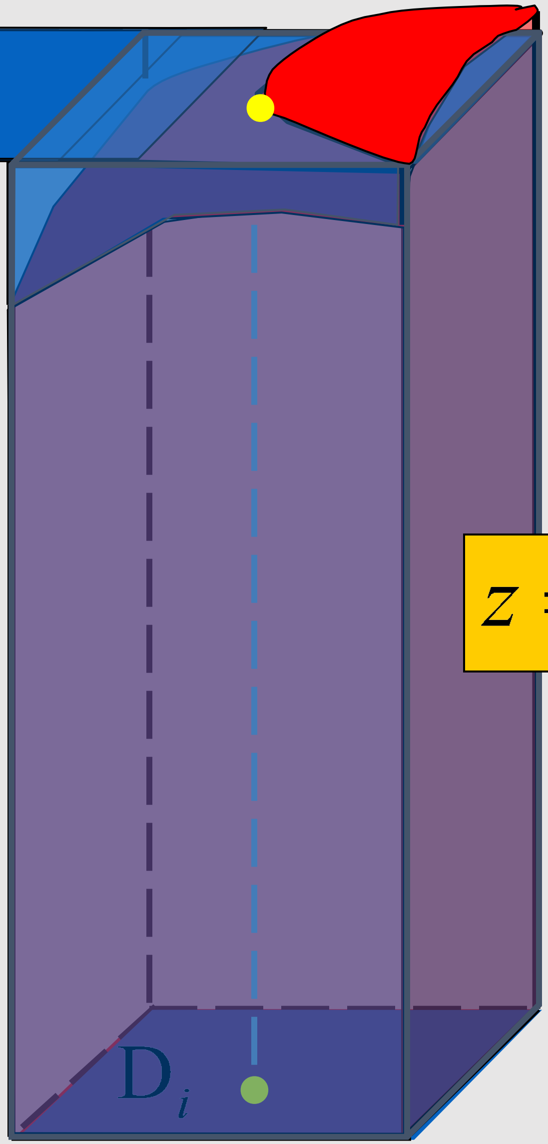
小平顶柱体体积为:

$\overline{V}_i = f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$

近似代替

小曲顶柱体的体积

$\Delta V_i \approx \overline{V}_i$

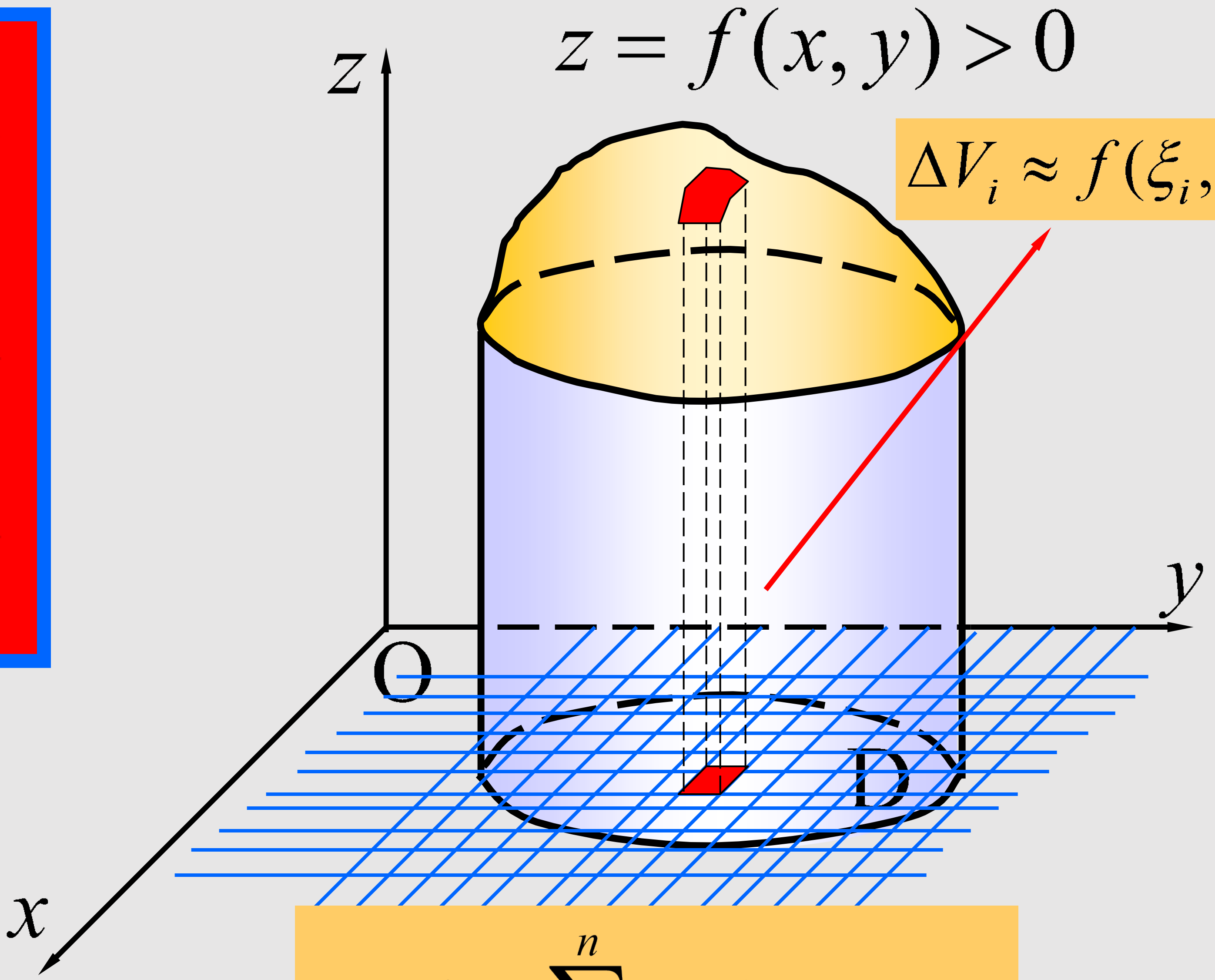


$z = f(\xi_i, \eta_i)$ (高)

$\forall(\xi_i, \eta_i) \in D_i$

$\Delta\sigma_i$ (底面积)

曲顶柱体的体积

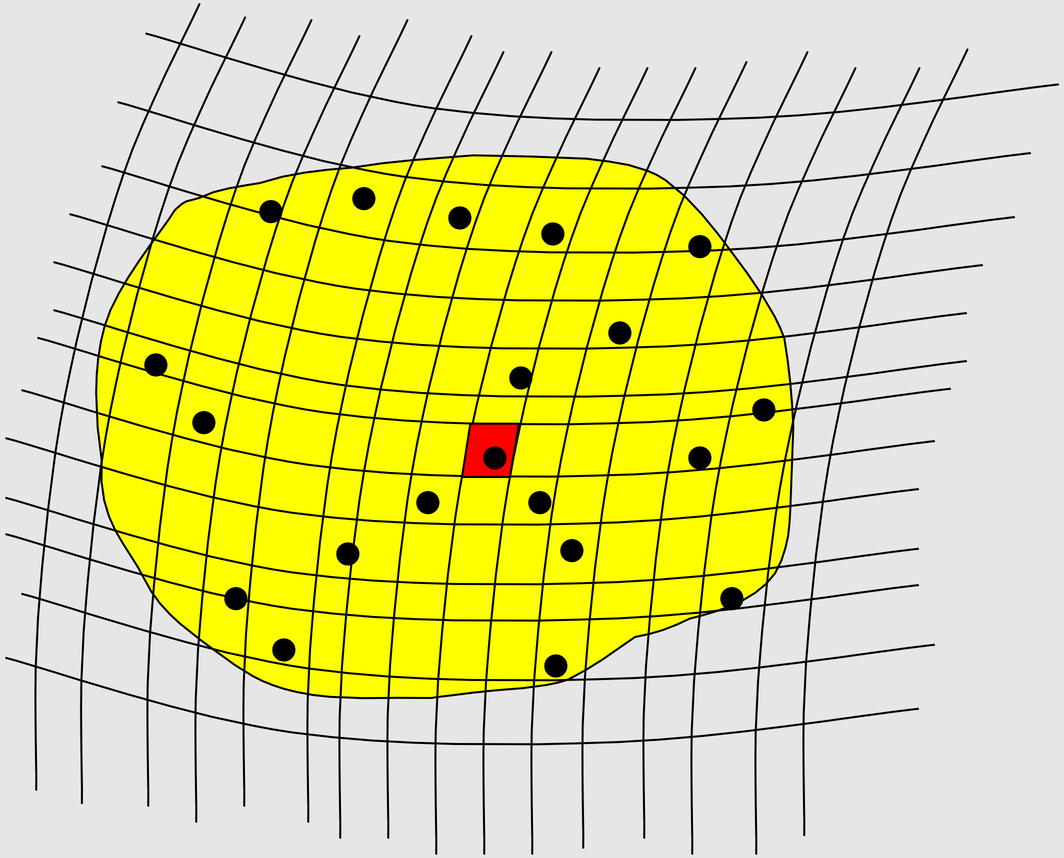


$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

引例2

非均匀分布时平面薄板质量问题



$\mathrm{D}\,,\qquad \mu=\mu(x,y)$

$\mathrm{D}_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$

$\Delta\sigma_i\,,\qquad \forall(\xi_i,\eta_i)\in \mathrm{D}_i$

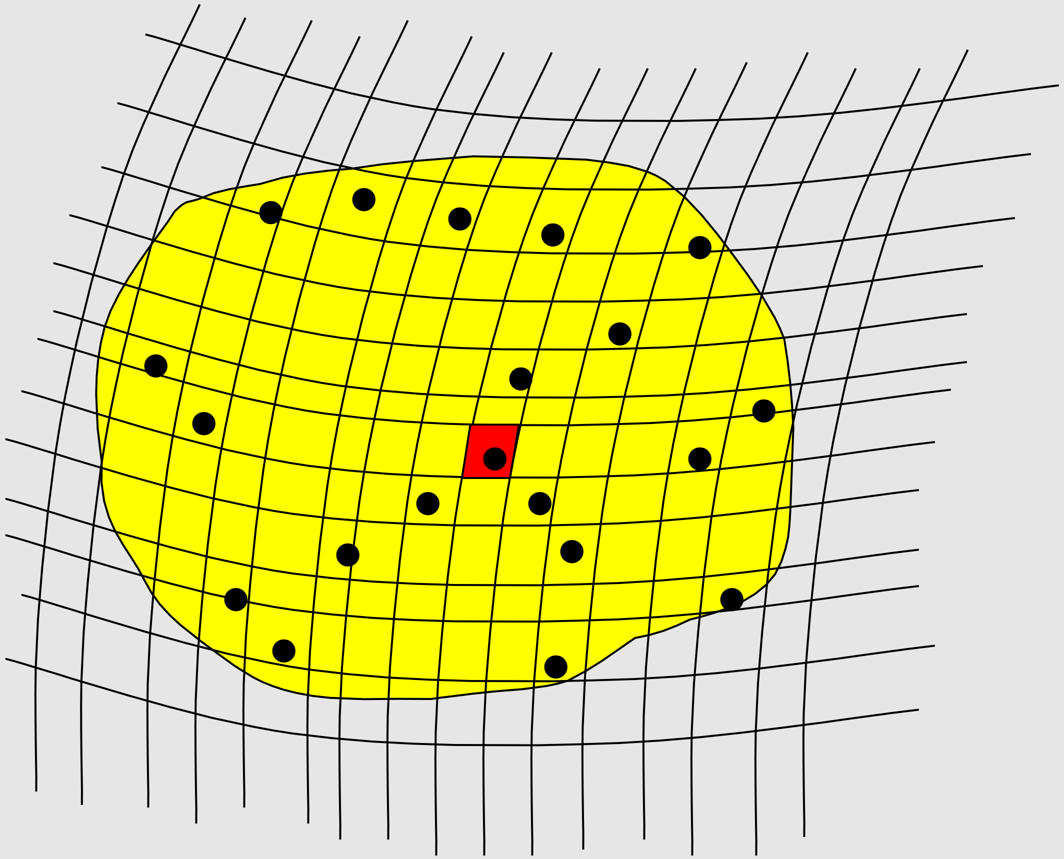
$$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\}$$

均匀分布时：

质量=密度×面积

非均匀分布时平面薄板质量问题



D，　$\mu = \mu(x, y)$

D_i　$(i = 1, 2, \cdots, n)$

$\Delta\sigma_i$，　$\forall(\xi_i, \eta_i) \in D_i$

$\Delta_i m \approx \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$

$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta\sigma_i\}$

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

比较分割后小曲顶柱体体积与平面薄板质量

小曲顶柱体

D_i (底)

$\Delta\sigma_i$ (面积)

$f(\xi_i,\eta_i)$ (高)

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄板小块

D_i (小块)

$\Delta\sigma_i$ (面积)

$\mu(\xi_i,\eta_i)$ (密度)

$$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

一. 二重积分的定义

设 $f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 $D\subset R^2$ 的有界函数。

将 D 任意分割为 n 个无公共内点的小区域 D_i $(i=1,2,\cdots,n)$，

则 $D=\bigcup\limits_{i=1}^{n}D_i$，并记 D_i 的面积为 $\Delta\sigma_i$。

若 $\forall(\xi_i,\eta_i)\in D_i$，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在，则称该极限值为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，其中，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\mathrm{d}(D_i)$，$\mathrm{d}(D_i)$ 为 D_i 的直径。

此时称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积，记为 $f(x,y)\in R(D)$。

二重积分记为：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\ ,$$

式中： $f(x,y)$ – – 被积函数；

$\iint$ – – 二重积分号；

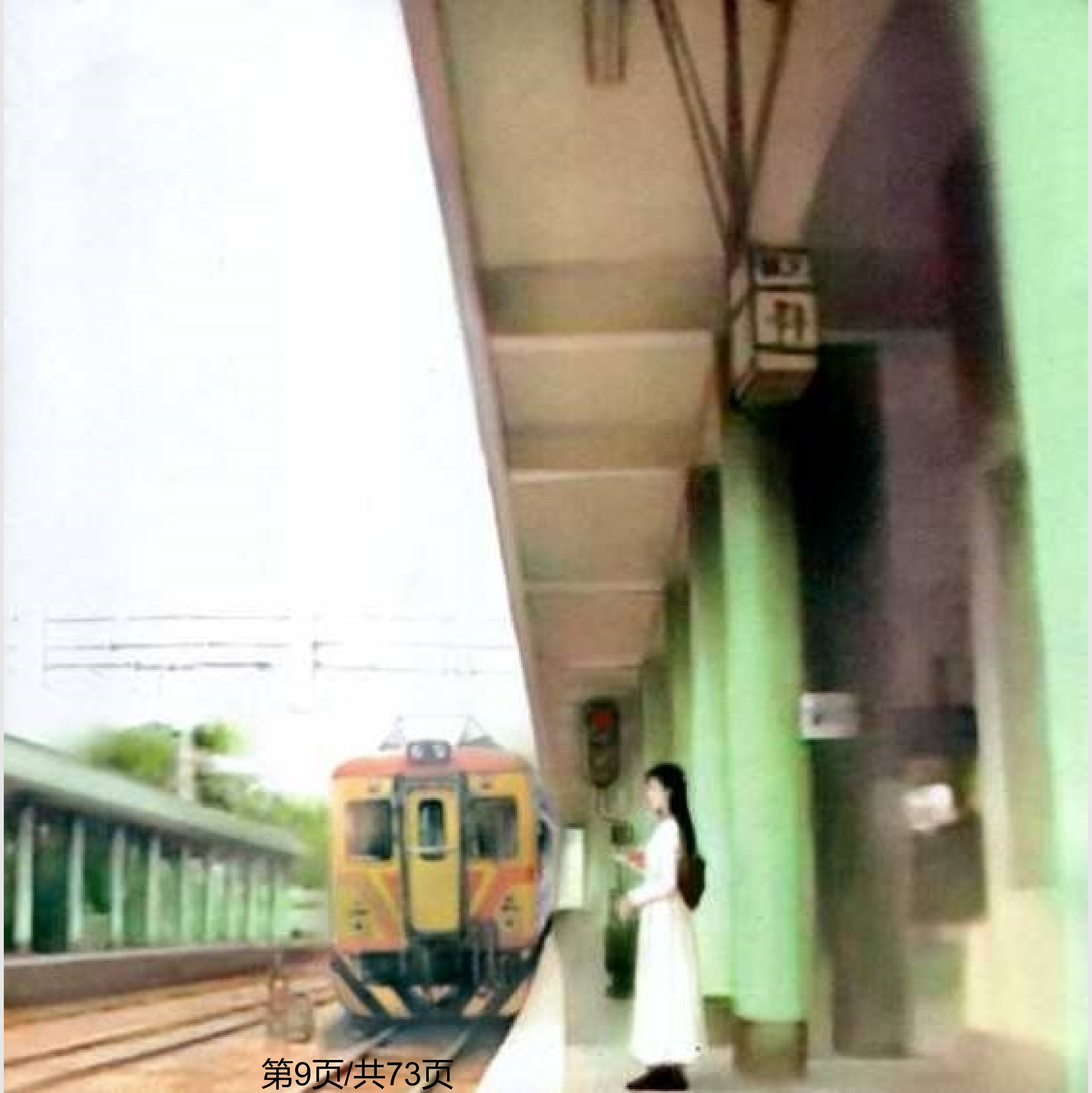
D – – 积分区域；

$d\sigma$ – – 积分元素(或平面面积元素)；

x，y – – 积分变量；

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ – – 积分和(黎曼和)。

二重积分定义的几点说明



(1) 极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在与否，与对区域$D$的分割方式以及点$(\xi_i,\eta_i)$的选择无关。此极限存在与否取决于函数在$D$上是否可积。

② 在直角坐标系中，通常用平行于坐标轴的网格线划分区域D，故直角坐标系下积分元素(平面面积元素)

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

相应地，直角坐标系下二重积分写为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y。$$

(3) 有界闭区域上的连续函数可积。

(4) 若函数$f(x,y)$在区域D上有界，且仅在D内有限条曲线（面积为零）上不连续，则$f(x,y)$在D上可积。

(5) 二重积分是一个数，它取决于被积函数和积分区域，而与积分变量的记号（字母）无关：

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \quad (x=u,\ y=v)。$$

二. 二重积分的性质

假设以下出现的
二重积分均存在

性质 1

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$\alpha\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\beta\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y。$$

性质 2

若$D=D_1+D_2$ (D_1与D_2除边界点外无公共部分 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y。$$

性质 3 若 $f(x,y) \le g(x,y) \quad (x,y) \in D$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y。$$

性质 4

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y。$$

性质 5 (估值定理)

设 $M=\max\limits_{D} f(x,y)$，$m=\min\limits_{D} f(x,y)$，则

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le MS_D \text{。}$$

性质 6 (中值定理)

设 $D\subset R^2$ 为有界闭区域，$f(x,y)\in C(D)$，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)S_D.$$

性质 7

设D_1与D_2关于x轴对称，$D=D_1+D_2$。

若函数$f(x,y)$关于变量y为偶函数：$f(x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y。$$

若函数$f(x,y)$关于变量y为奇函数：$f(x,-y)=-f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0。$$

例1 估计$\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$。

解 记$f(x,y)=x^2+4y^2+9$，令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=8y=0,\end{cases}$$

得驻点$(0,0)$，且$f(0,0)=9$。

又 $f(x,y)\big|_{\partial D}=(x^2+4y^2+9)\big|_{x^2+y^2=4}=13+3y^2$;

$$0\le y^2\le x^2+y^2\le 4,$$

故 $13\le f(x,y)\le 25 \quad (x,y)\in\partial D$。

从而 $$\max_D f(x,y)=\max\{9,\ 13,\ 25\}=25,$$

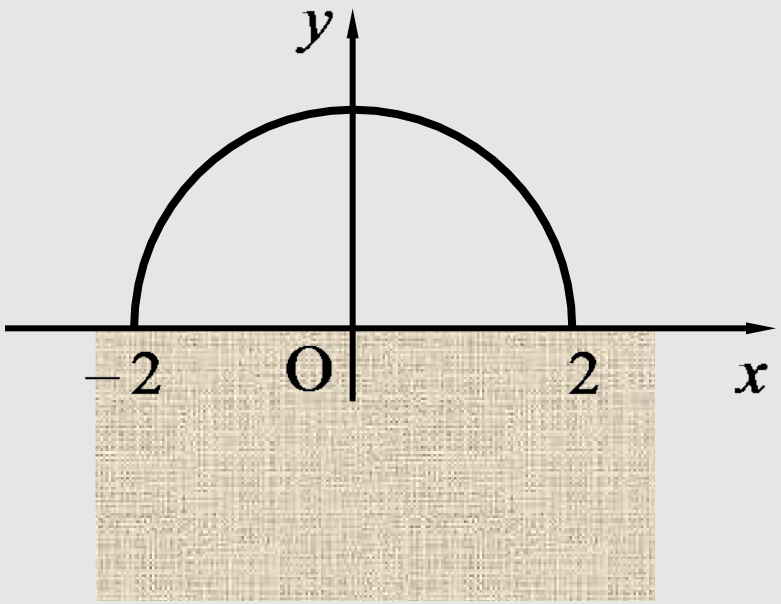
$$\min_D f(x,y)=\min\{9,\ 13,\ 25\}=9。$$

由于 $S_D=\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\pi$ ($x^2+y^2\le 4$ 的面)，所以

$$36\pi=9\times 4\pi\le\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le 25\times 4\pi=100\pi。$$

例2 计算$\iint\limits_D (x+x^3y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4,\ y>0\}$。

解 因为D关于y轴对称，



$$f(x,y)=x+x^3y^2$$

关于变量x为奇函数

所以，

$$\iint\limits_D (x+x^3y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0。$$

三. 二重积分的几何意义

(1) $z = f(x,y) > 0,$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = V.$$

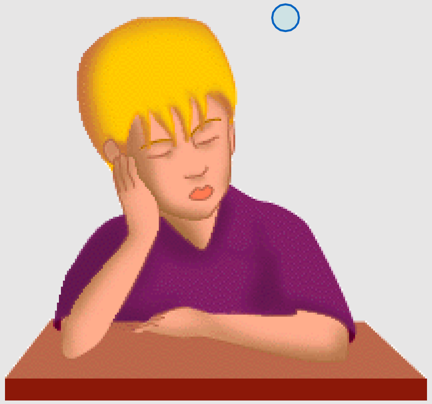
(2) $z = f(x,y) < 0,$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = -V.$$

曲顶柱体的体积

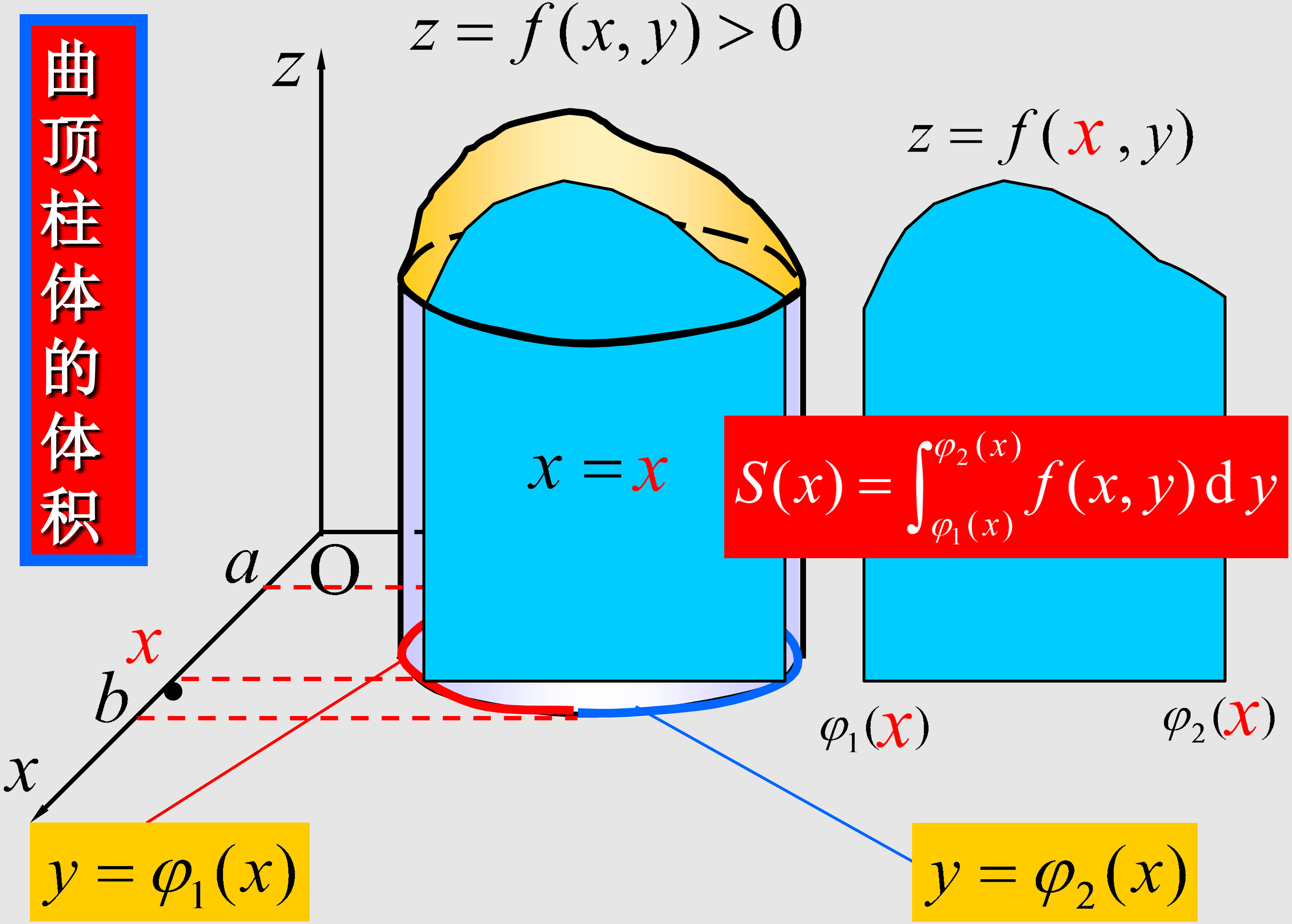
能不能用定积分

来求曲顶柱体的体积？



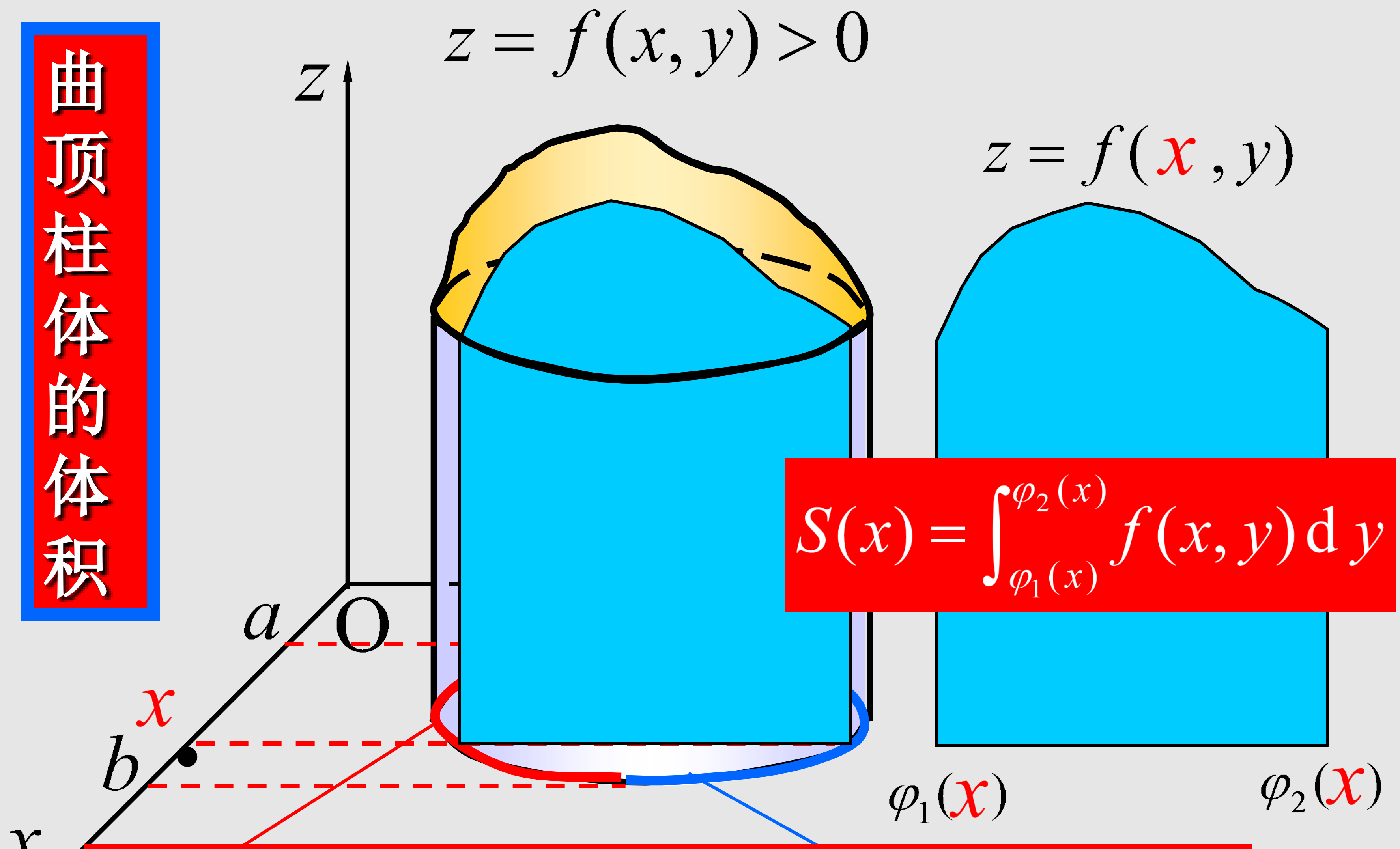
利用平行截面面积为已知的几何体体积计算方法.

曲顶柱体的体积



$z = f(x, y) > 0$
z
$z = f(x, y)$
$x = x$
$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$
a
O
x
b
x
$\varphi_1(x)$
$\varphi_2(x)$
$y = \varphi_1(x)$
$y = \varphi_2(x)$

曲顶柱体的体积



$$S(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x$$

综合上述两种“曲顶柱体”体积计算方法，得到

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x$$

就是说，二重积分可以通过两次定积分来计算.

课后好好想一想！

如果你的定积分已经忘记了，请赶快复习一下，不然会给你带来麻烦哦.

四. 二重积分的计算

请点击

1. 直角坐标系下的二重积分计算

2. 二重积分的换元法

3. 极坐标系下二重积分的计算

1. 直角坐标系下的二重积分计算

请点击

(1). x—型区域上的二重积分计算

(2). y—型区域上的二重积分计算

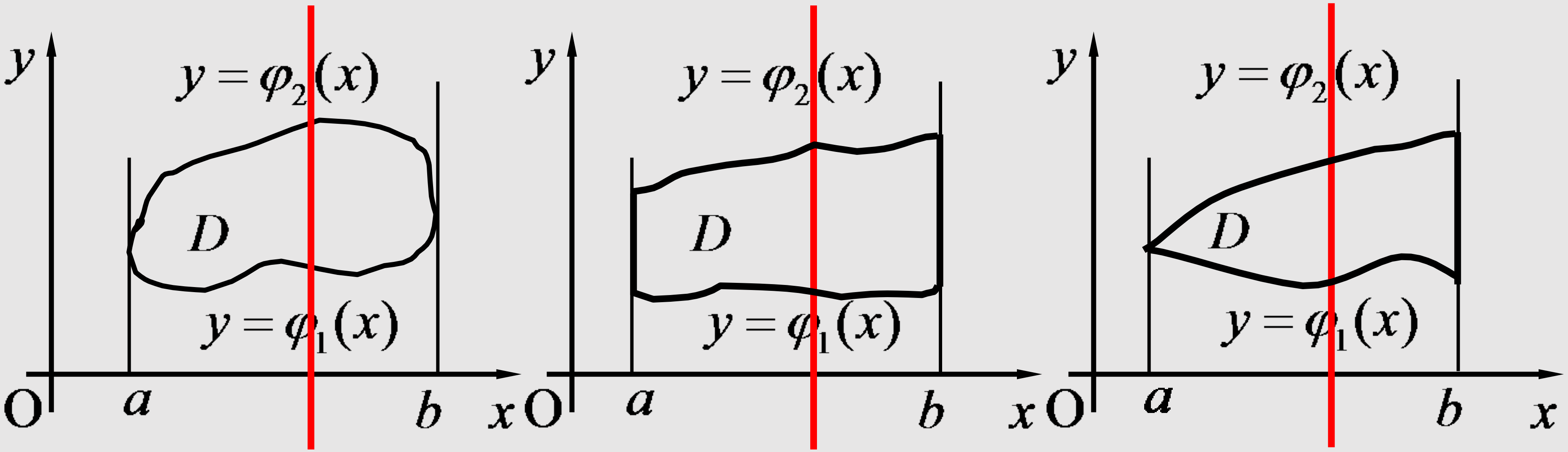
(3). 二重积分的换序问题

（1） x -型区域上的二重积分计算

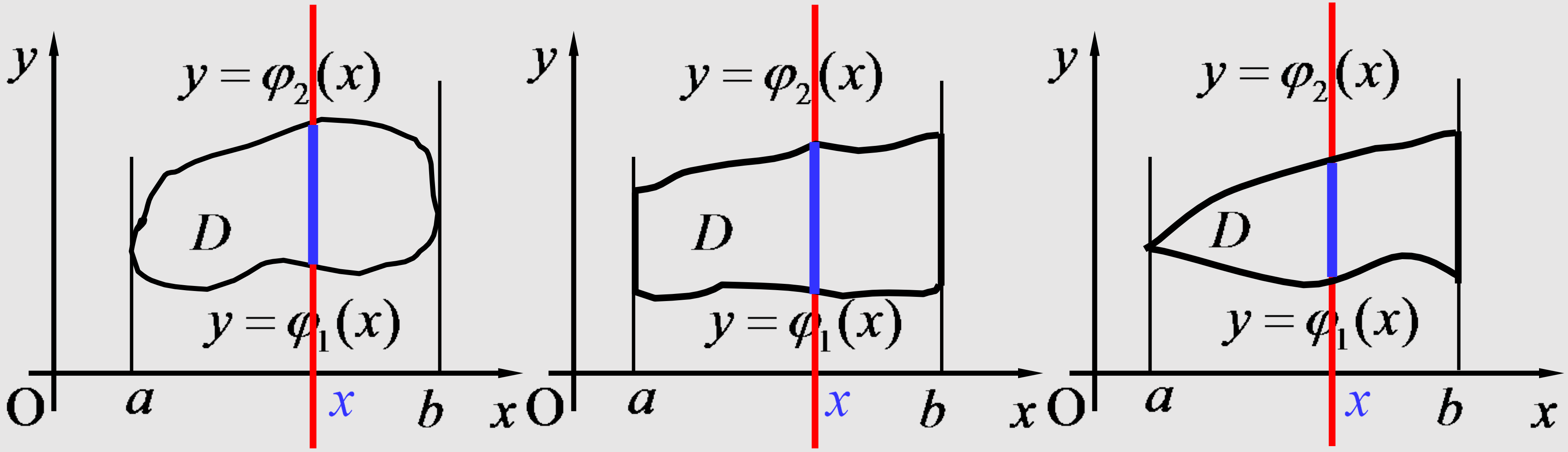
具有以下特征的区域称为x—型区域：

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\},$$

其中，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)\in C([a,b])$，且垂直于x轴的直线与区域D的边界的交点不多于两个。

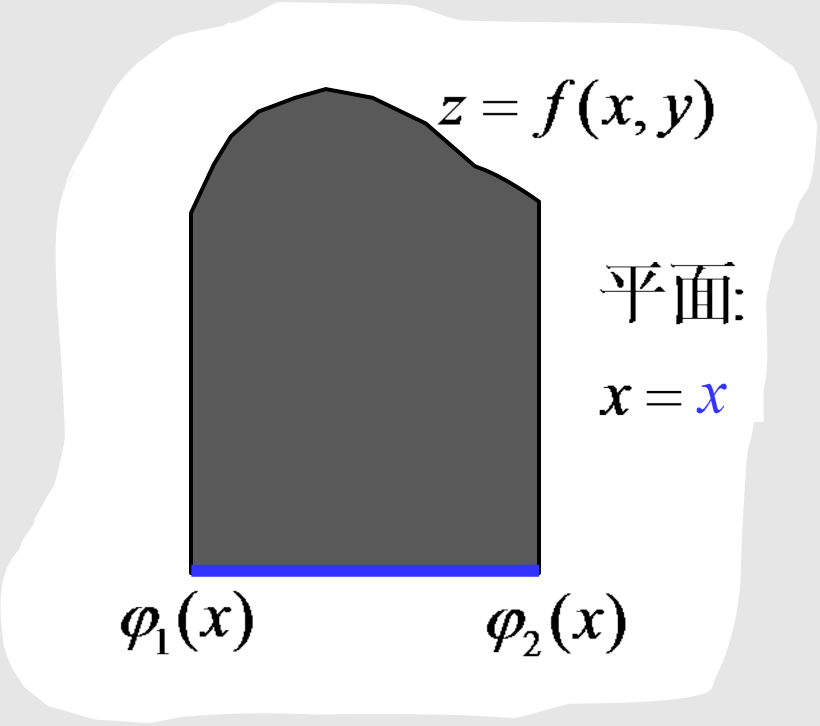


为方便起见，我们在 $f(x, y) \geq 0$，$(x, y) \in D$ 的假设下推导 $x-$ 型区域上二重积分的计算公式，其结论对任意的可积函数 $f(x, y)$ 成立。



根据二重积分的几何意义，
我们只需计算出上图中以
蓝色线条为底的曲边梯形
的面积：

$$S(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$



当函数$f(x,y)$在区域D上可积时：

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\},$$

其中，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)\in C([a,b])$，且垂直于x轴的直线与区域D的边界的交点不多于两个，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

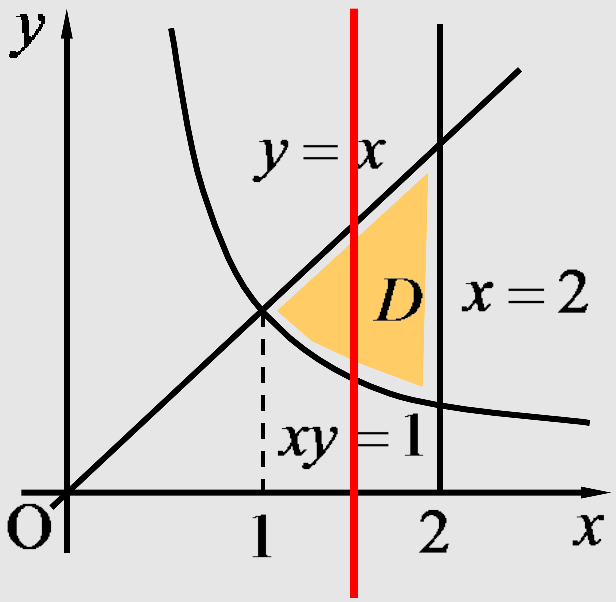
$$=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

就是说

$x-$型区域上的二重积分化为先对y，后对x的两次定积分。

例3 计算 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $x=2$，$y=x$ 及 $xy=1$ 围成的区域。

解 作图 联立方程求交点



$$\begin{cases} x=2, \\ y=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ xy=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=y, \\ xy=1, \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(2,2) \qquad (2,\tfrac{1}{2}) \qquad (1,1)$$

(另一点舍去)

于是，

$$D=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y\le x\}。$$

从而，

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{L} \quad = 2\frac{1}{4}\text{。}$$

例4 求曲面 $z=1-4x^2-y^2$ 与 xy 坐标面所围成的几何体的体积。

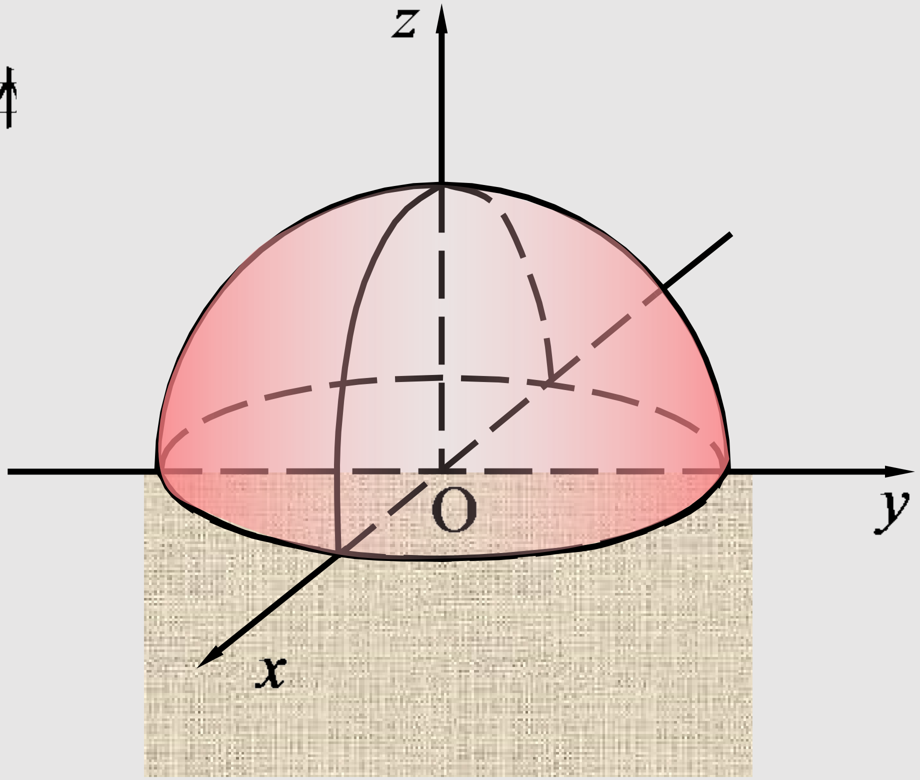
解 该几何体为椭圆抛物体

位于 xy 平面上方的部分它

关于 xz 和 yz 坐标面对称

此外，由曲线

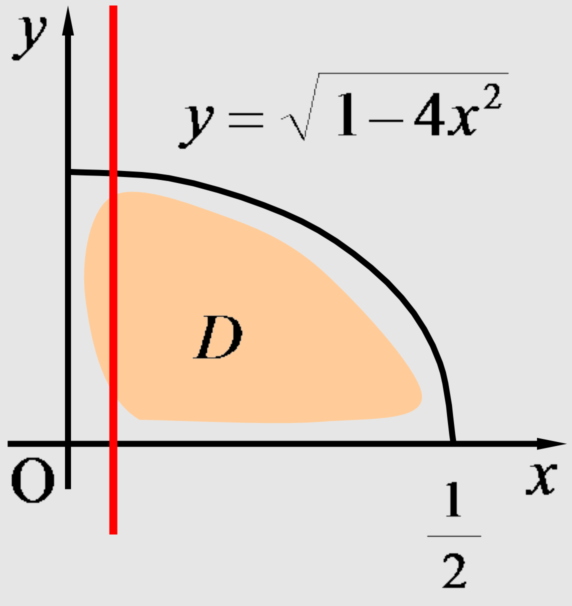
$$\begin{cases} z=1-4x^2-y^2 \\ z=0 \end{cases}$$



围成的积分区域关于 x 轴和 y 轴对称，故只需计算第一卦限中的体积，然后乘以4倍即可.

被积函数是谁？

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \frac{1}{2},\ \ 0\le y\le \sqrt{1-4x^2}\}$$



故所求体积为

二重积分的几何意义

$$V=4\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}(1-4x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(y-4x^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t$$

令 $2x=\sin t$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{(4-1)!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\mathrm{L}\ =\frac{\pi}{4}。$$

(2). y -型区域上的二重积分计算

具有以下特征的区域称为 y —型区域：

$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \ h_1(y)\le x\le h_2(y)\},$$

其中，$h_1(y)$，$h_2(y)\in C([c,d])$，且垂直于 y 轴的直线与区域 D 的边界的交点不多于两个。