第二节　空间点、直线、平面之间的位置关系

课程标准

1. 借助长方体，在直观认识空间点、直线、平面的位置关系的基础上，抽象出空间点、直线、平面的位置关系的定义.

2. 了解四个基本事实和定理，了解空间两条直线位置关系的判定.

目录

CONTENTS

1 知识 体系构建

2 考点 分类突破

3 课时 跟踪检测

PART 1

知识 体系构建

必备知识 系统梳理 基础重落实

空间点、直线、平面之间的位置关系

基本事实

基本事实1：过不在一条直线上的三个点，有且只有一个平面；

基本事实2：如果一条直线上的______在一个平面内，那么这条直线在这个平面内；

基本事实3：如果两个不重合的平面有____公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线；

基本事实4：平行于同一条直线的两条直线____

$\xrightarrow{\text{三个推论}}$

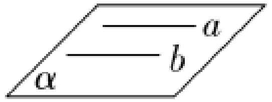
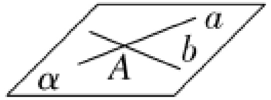
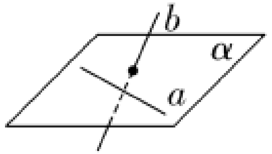
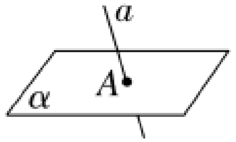
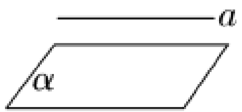
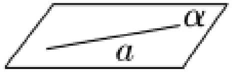
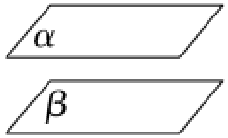
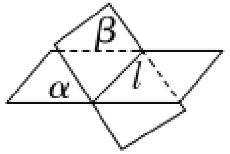
推论1：经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面；

推论2：经过两条相交直线，有且只有一个平面；

推论3：经过两条平行直线，有且只有一个平面

空间点、直线、平面之间的位置关系

空间点、线、面的位置关系

		图形语言	符号语言	公共点
直线与直线	平行		$a/\!/b$	____个
	相交		________	1个
	异面		a，b是异面直线	____个
直线与平面	相交		________	1个
	平行		$a/\!/\alpha$	0个
	在平面内		________	____个
平面与平面	平行		$\alpha/\!/\beta$	0个
	相交		$\alpha\cap\beta=l$	____个

空间点、直线、平面之间的位置关系

异面直线所成的角

(1)定义：已知两条异面直线a，b，经过空间任一点O分别作直线$a'//a$，$b'//b$，把直线a'与b'所成的角叫做异面直线a与b所成的角(或夹角)；(2)范围：________

等角定理　如果空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角________

对点自测

1. 直线m与平面α平行，且直线$a\subset\alpha$，则直线m和直线a的位置关系不可能为（　　）

A. 平行　　B. 异面

C. 相交　　D. 没有公共点

解析：直线m与平面α平行，且直线$a\subset\alpha$，则直线m和直线a的位置关系可能平行，可能异面，即没有公共点，但不可能相交，故选C.

2. 如果直线$a\subset$平面α，直线$b\subset$平面β，且α∥β，则a与b（　　）

A. 共面

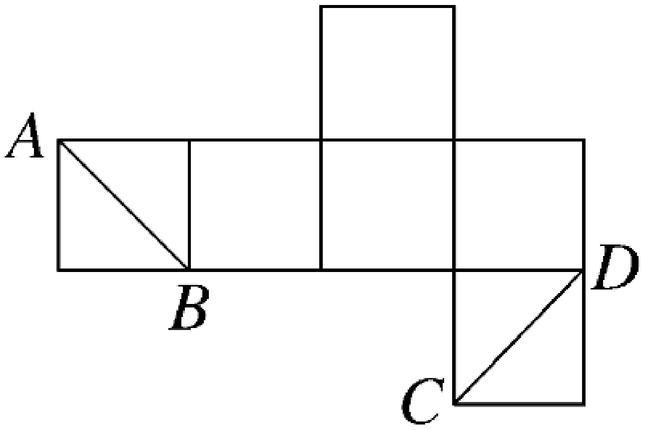
B. 平行

C. 是异面直线

D. 可能平行，也可能是异面直线

解析：　α∥β，说明a与b无公共点，∴a与b可能平行也可能是异面直线.

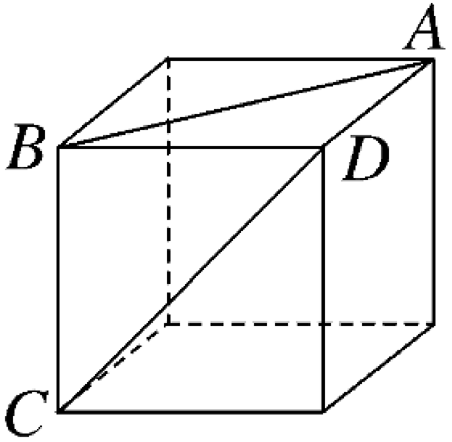
3. 如图所示的是一个正方体的平面展开图，在原正方体中，线段 AB 与 CD 所在直线的位置关系为（　　）



A. 相交　　B. 平行

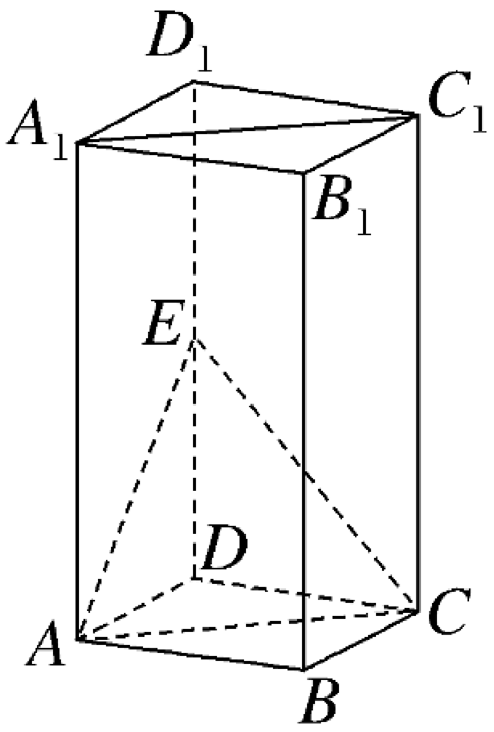
C. 异面　　D. 无法判断

解析： 由题意，将正方体展开图还原为正方体，如图所示，在正方体中找到对应的 AB、CD 两条直线，由图可知，AB 与 CD 异面.故选C.



4. 在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，若$AB=AD=\frac{1}{2}AA_1$，E是棱DD_1的中点，则直线A_1C_1与AE所成的角的大小为$\underline{\quad\frac{\pi}{3}\quad}$.

解析：如图，连接AC，EC，在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，显然$A_1C_1 /\!/ AC$，则$\angle EAC$为直线A_1C_1与AE所成的角，由E为DD_1的中点，且$AD=\frac{1}{2}AA_1$，则$DE=AD=DC$，即$AC=AE=CE$，故$\triangle ACE$为等边三角形，则$\angle EAC=\frac{\pi}{3}$.



常用结论

唯一性定理

(1) 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行；

(2) 过直线外一点有且只有一个平面与已知直线垂直；

(3) 过平面外一点有且只有一条直线与已知平面垂直；

(4) 过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行.

应用

（多选）（2024·苏州第一次模拟）下列命题正确的是（　　）

A. 过平面外一点有且只有一条直线与已知平面垂直

B. 过直线外一点有且只有一个平面与已知直线平行

C. 过平面外一点有无数条直线与已知平面平行

D. 过平面外一点有且只有一个平面与已知平面垂直

解析：　由结论可得A、C正确.

考点 分类突破

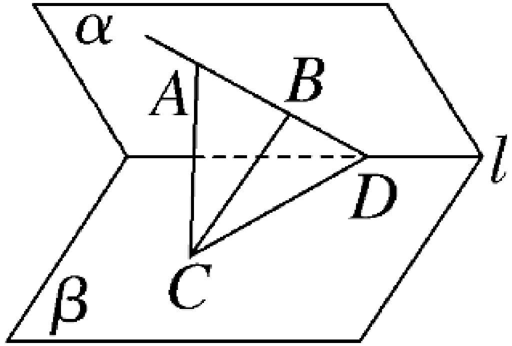
精选考点 典例研析 技法重悟通

PART 2

考点一　平面基本事实的应用

（基础自学过关）

1. 如图所示，平面$\alpha\cap$平面$\beta=l$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$AB\cap l=D$，$C\in\beta$，$C\notin l$，则平面ABC与平面β的交线是（　　）



A. 直线AC　　B. 直线AB

C. 直线CD　　D. 直线BC

解析： 由题意知，$D\in l$，$l\subset \beta$，所以$D\in \beta$，又因为$D\in AB$，所以$D\in$平面ABC，所以点D在平面ABC与平面β的交线上.又因为$C\in$平面ABC，$C\in \beta$，所以点C在平面β与平面ABC的交线上，所以平面$ABC\cap$平面$\beta=CD$.

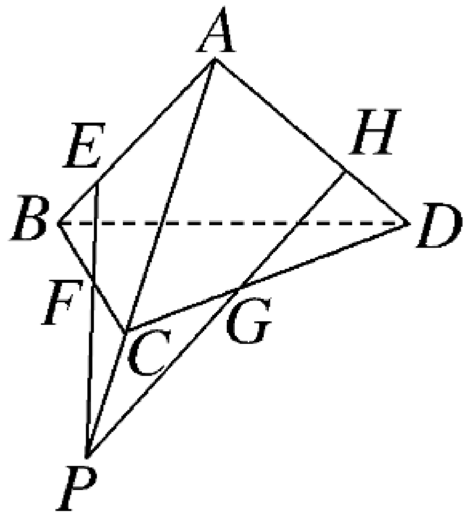
2. 在三棱锥A-BCD的边AB，BC，CD，DA上分别取E，F，G，H四点，如果$EF\cap HG=P$，则点P（　　）

A. 一定在直线BD上

B. 一定在直线AC上

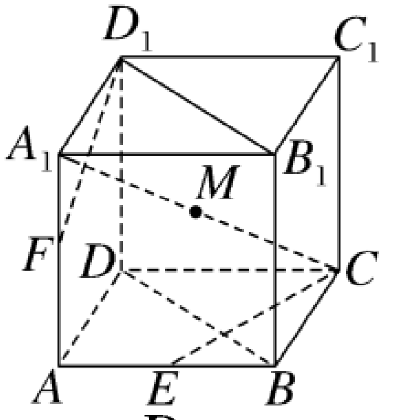
C. 在直线AC或BD上

D. 不在直线AC上，也不在直线BD上



解析：　如图所示，因为$EF\subset$平面ABC，$HG\subset$平面ACD，$EF\cap HG=P$，所以$P\in$平面ABC，$P\in$平面ACD. 又因为平面$ABC\cap$平面$ACD=AC$，所以$P\in AC$.

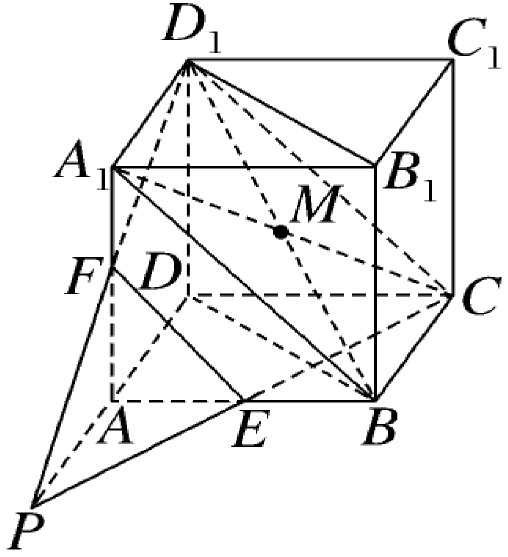
3. 如图所示，在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别是AB和AA_1的中点，平面BB_1D_1D与A_1C交于点M. 求证：



（1）E，C，D_1，F四点共面；

证明： 如图，连接EF，CD_1，A_1B. ∵E，F分别是AB，AA_1的中点，∴$EF\parallel BA_1$.

又$A_1B\parallel D_1C$，∴$EF\parallel CD_1$，∴E，C，D_1，F四点共面.

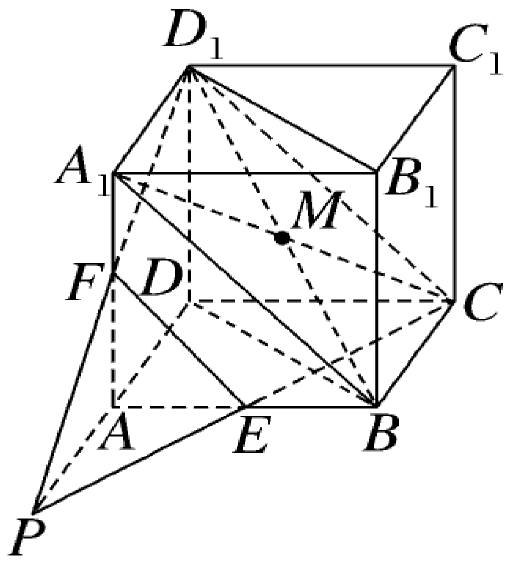


（2）CE，D_1F，DA三线共点；

证明：$\because EF \parallel CD_1$，$EF < CD_1$，

$\therefore CE$与D_1F必相交，

设交点为P，如图所示.



则由$P \in CE$，$CE \subset$平面$ABCD$，

得$P \in$平面$ABCD$.

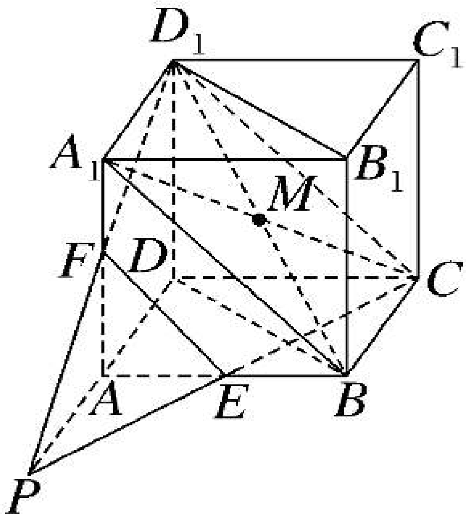
同理$P \in$平面ADD_1A_1.

又平面$ABCD \cap$平面$ADD_1A_1 = DA$，

$\therefore P \in$直线DA，$\therefore CE$，D_1F，DA三线共点.

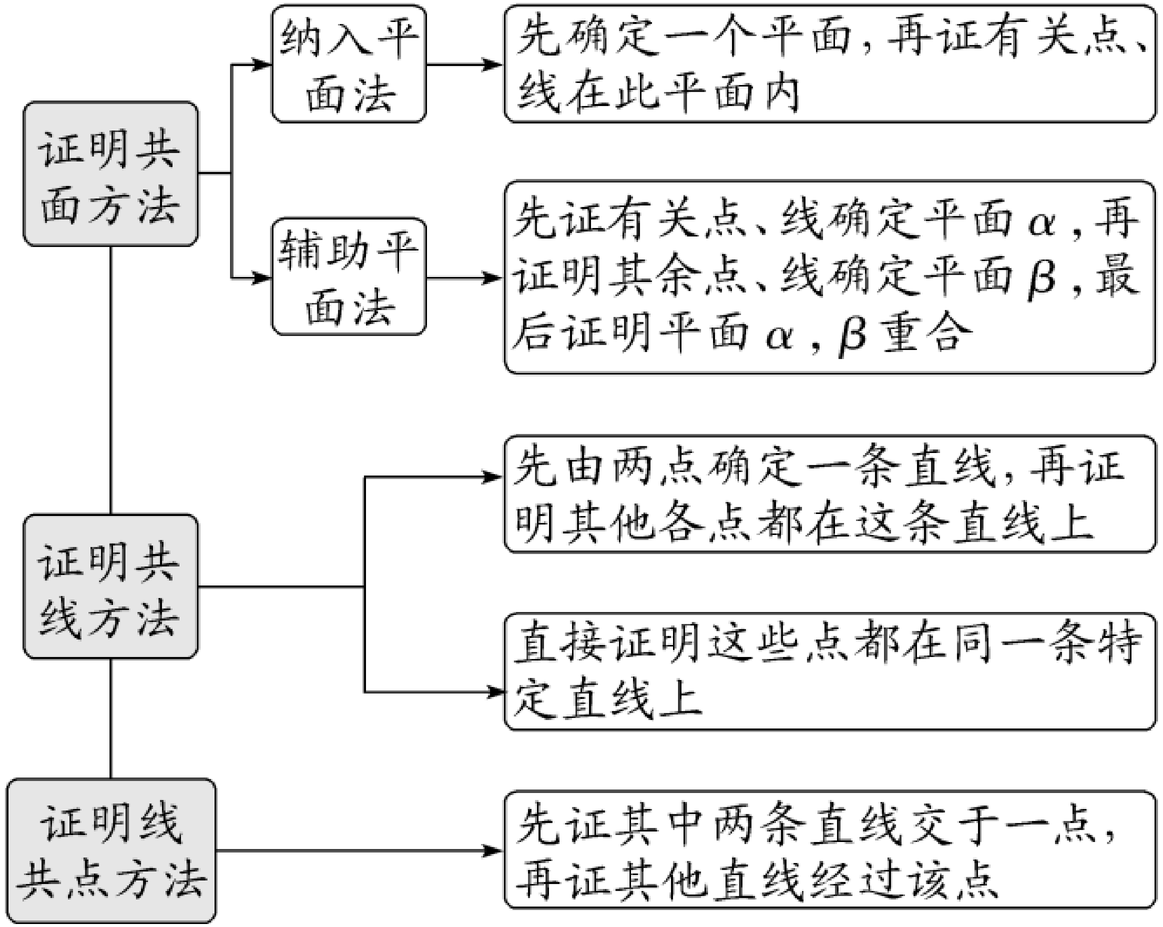
（3）B，M，D_1三点共线.

证明：连接BD_1，∵BD_1与A_1C均为正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的体对角线，故BD_1与A_1C相交，则令BD_1与A_1C的交点为O，则B，O，D_1共线，∵$BD_1\subset$平面BB_1D_1D，故A_1C与平面BB_1D_1D的交点为O，即O与M重合，故B，M，D_1三点共线.



练后悟通

共面、共线、共点问题的证明方法



考点二 空间两条直线的位置关系

（定向精析突破）

考向1 空间两条直线位置关系的判断

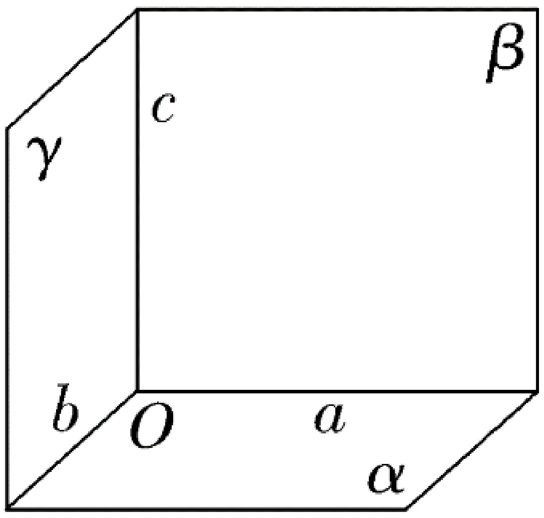
【例1】 （1）已知α，β，γ是三个平面，$\alpha\cap\beta=a$，$\alpha\cap\gamma=b$，$\beta\cap\gamma=c$，且$a\cap b=O$，则下列结论正确的是（　　）

A. 直线b与直线c可能是异面直线

B. 直线a与直线c可能平行

√C. 直线a，b，c必然交于一点（即三线共点）

D. 直线c与平面α可能平行



解析：因为$\alpha\cap\beta=a$，$\alpha\cap\gamma=b$，$a\cap b=O$，所以$O\in\alpha$，$O\in\beta$，$O\in\gamma$，因为$\beta\cap\gamma=c$，所以$O\in c$，所以直线a，b，c必然交于一点（即三线共点），A、B错误，C正确；D选项，假设直线c与平面α平行，由$O\in c$，可知$O\notin\alpha$，这与$O\in\alpha$矛盾，故假设不成立，D错误，故选C.

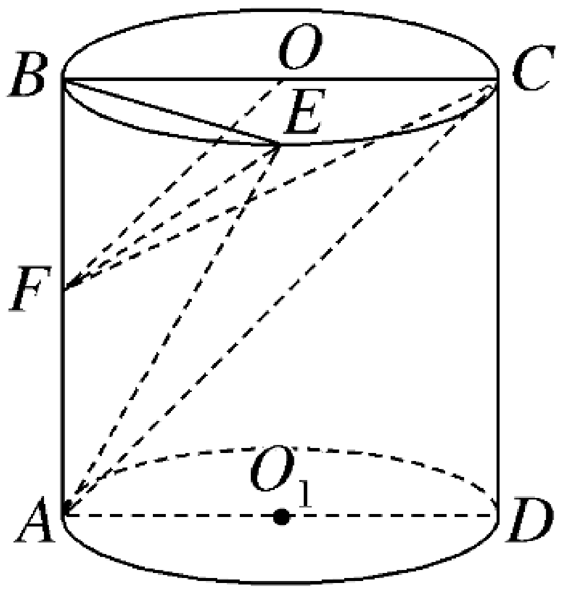
(2) 在底面半径为1的圆柱OO_1中，过旋转轴OO_1作圆柱的轴截面$ABCD$，其中母线$AB=2$，E是弧BC的中点，F是AB的中点，则(　　)

A. $AE=CF$，AC与EF是共面直线

B. $AE\neq CF$，AC与EF是共面直线

C. $AE=CF$，AC与EF是异面直线

D. $AE\neq CF$，AC与EF是异面直线



解析：如图，在底面半径为1的圆柱OO_1中，母线$AB=2$，$BC=2$，E是$\overset{\frown}{BC}$的中点，则$BE=\sqrt{2}$，因为F是AB的中点，又$AB=2$，则$BF=1$，$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{4+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，$CF=\sqrt{BC^2+BF^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，所以$AE\neq CF$，在$\triangle ABC$中，$O$是$BC$的中点，$F$是$AB$的中点，所以$OF\parallel AC$，所以$AC$与$OF$是共面直线，若$AC$与$EF$是共面直线，则$O$，$F$，$A$，$C$，$E$在同一平面上，显然矛盾，故$AC$与$EF$是异面直线，故选D.

解题技法

空间两直线位置关系的判定方法

空间两直线位置关系 —判定方法→

- 异面直线：直接法或反证法
- 平行直线：可利用中位线性质、基本事实4、线面、面面平行的性质定理
- 垂直关系：利用线面垂直的性质定理

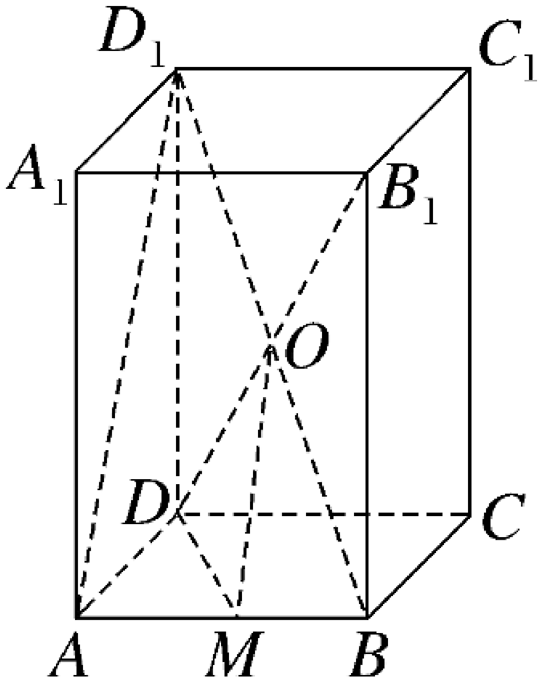
—技巧→ 可构造几何模型(长方体或正方体)

考向2　异面直线所成的角

【例2】　在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线AD_1与DB_1所成角的余弦值为（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



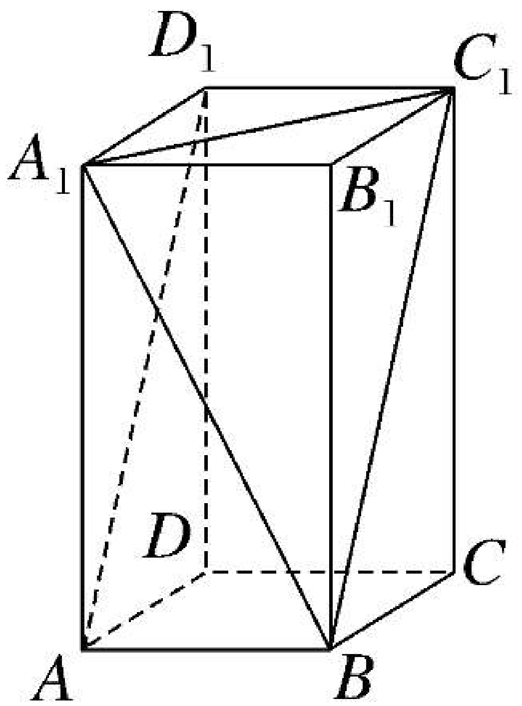
解析：　如图，连接BD_1，交DB_1于点O，取AB的中点M，连接DM，OM. 易知O为BD_1的中点，所以$AD_1 // OM$，则$\angle MOD$为异面直线AD_1与DB_1所成角或其补角.因为在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AB=$

$BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，$AD_1=\sqrt{AD^2+DD_1^2}=2$，$DM=\sqrt{AD^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$DB_1=\sqrt{AB^2+AD^2+DD_1^2}=\sqrt{5}$.所以$OM=\frac{1}{2}AD_1=1$，$OD=\frac{1}{2}DB_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$，于是在$\triangle DMO$中，由余弦定理，得$\cos\angle MOD=\frac{1^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\times1\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.故异面直线$AD_1$与$DB_1$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

变式

1. （变条件）若将本例中条件“$AA_1=\sqrt{3}$”变为“$AA_1=2$”，其他条件不变，则异面直线A_1B与AD_1所成角的余弦值为$\underline{\quad \frac{4}{5} \quad}$.

解析：连接BC_1，易证$BC_1 \parallel AD_1$，则$\angle A_1BC_1$（或其补角）为异面直线A_1B与AD_1所成的角.连接A_1C_1，由$AB=BC=1$，$AA_1=2$，易得$A_1C_1=\sqrt{2}$，$A_1B=BC_1=\sqrt{5}$，$\therefore \cos\angle A_1BC_1=\frac{A_1B^2+BC_1^2-A_1C_1^2}{2A_1B\cdot BC_1}=\frac{4}{5}$.



2. （变条件，变设问）若将本例中条件“$AA_1=\sqrt{3}$”变为“异面直线A_1B与AD_1所成角的余弦值为$\frac{9}{10}$”，则$AA_1=$____3____.

解析：设$AA_1=t$，$\because AB=BC=1$，$\therefore A_1C_1=\sqrt{2}$，$A_1B=BC_1=\sqrt{t^2+1}$.$\therefore \cos\angle A_1BC_1=\frac{A_1B^2+BC_1^2-A_1C_1^2}{2\times A_1B\times BC_1}=\frac{t^2+1+t^2+1-2}{2\times\sqrt{t^2+1}\times\sqrt{t^2+1}}=\frac{9}{10}$.解得$t=3$，则$AA_1=3$.

解题技法

用平移法求异面直线所成的角的三个步骤

（1）一作：根据定义作平行线，作出异面直线所成的角；

（2）二证：证明作出的角是异面直线所成的角；

（3）三求：解三角形，求出所作的角.

训练

1. 若直线l_1和l_2是异面直线，l_1在平面α内，l_2在平面β内，l是平面α与平面β的交线，则下列命题正确的是（　　）

A. l与l_1，l_2都不相交

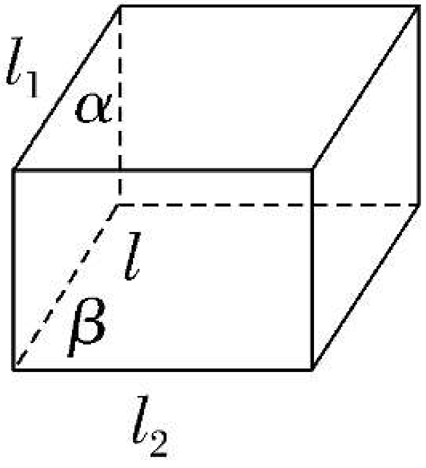
B. l与l_1，l_2都相交

C. l至多与l_1，l_2中的一条相交

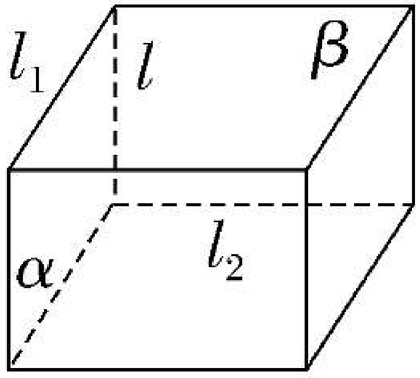
D. l至少与l_1，l_2中的一条相交

解析：D　法一（反证法）　由于l与直线l_1，l_2分别共面，故直线l与l_1，l_2要么都不相交，要么至少与l_1，l_2中的一条相交.若l∥l_1，l∥l_2，则l_1∥l_2，这与l_1，l_2是异面直线矛盾.故l至少与l_1，l_2中的一条相交.

法二（模型法）　如图①，l_1与l_2是异面直线，l_1与l平行，l_2与l相交，故A、B不正确；如图②，l_1与l_2是异面直线，l_1，l_2都与l相交，故C不正确.



图①

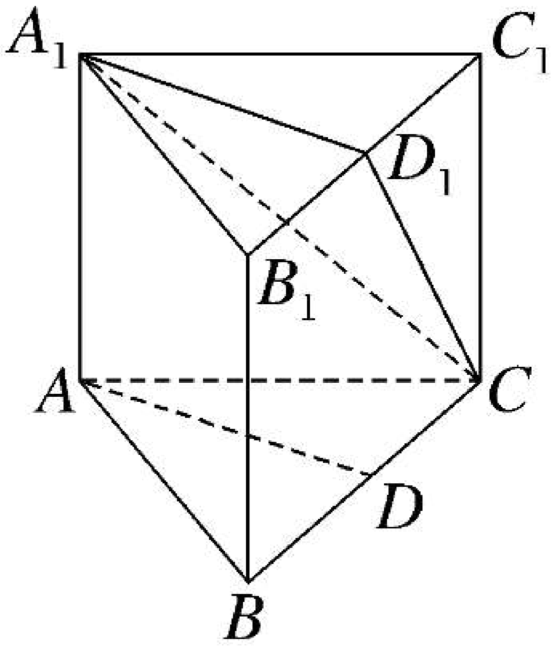


图②

2. 在直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，底面ABC为等腰直角三角形，且斜边$BC=2$，D是BC的中点，若$AA_1=\sqrt{2}$，则异面直线A_1C与AD所成角的大小为（　　）

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°



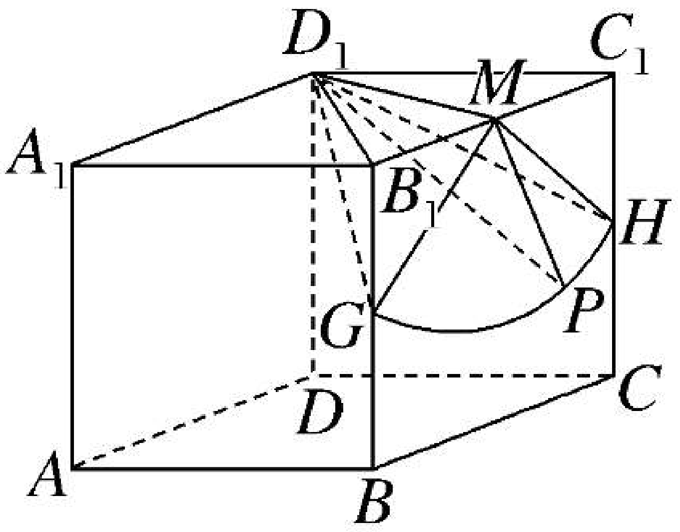
解析：C　如图，取B_1C_1的中点D_1，连接A_1D_1，则$AD \parallel A_1D_1$，$\angle CA_1D_1$（或其补角）就是异面直线A_1C与AD所成的角，连接D_1C. $\because A_1B_1=A_1C_1$，$\therefore A_1D_1 \perp B_1C_1$，由已知可得$A_1D_1=1$，$D_1C=\sqrt{3}$，$A_1C=2$，$\because A_1C^2=A_1D_1^2+D_1C^2$，$\therefore \triangle A_1D_1C$为直角三角形且$\angle A_1D_1C=90°$，在$Rt\triangle A_1CD_1$中，$A_1C=2$，$CD_1=\sqrt{3}$，$\therefore \angle CA_1D_1=60°$.

考点三　空间几何体的交线与截面问题

（定向精析突破）

考向1　空间几何体的交线问题

【例3】　（2020·新高考Ⅰ卷16题）已知直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长均为2，$\angle BAD=60°$.以D_1为球心，$\sqrt{5}$为半径的球面与侧面BCC_1B_1的交线长为$\underline{\quad \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \quad}$.



解析：如图，连接B_1D_1，易知$\triangle B_1C_1D_1$为正三角形，所以$B_1D_1=C_1D_1=2$.分别取B_1C_1，BB_1，CC_1的中点M，G，H，连接D_1M，D_1G，D_1H，则易得$D_1G=D_1H=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$D_1M\perp B_1C_1$，且$D_1M=\sqrt{3}$.由题意知$G$，$H$分别是$BB_1$，$CC_1$与球面的交点.在侧面$BCC_1B_1$内任取一点$P$，使$MP=\sqrt{2}$，连接$D_1P$，则$D_1P=\sqrt{D_1M^2+MP^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$，连接$MG$，$MH$，易得

$MG=MH=\sqrt{2}$，故可知以M为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆弧GH为球面与侧面BCC_1B_1的交线.由$\angle B_1MG=\angle C_1MH=45°$知$\angle GMH=90°$，所以$\overset{\frown}{GH}$的长为$\frac{1}{4}\times 2\pi\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

解题技法

作交线的方法有两种：（1）利用基本事实3作交线；（2）利用线面平行及面面平行的性质定理去寻找线面平行及面面平行，然后根据性质作出交线.

考向2　空间几何体的截面问题

【例4】　（1）在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，M，N分别是棱DD_1和BB_1上的点，$DM=\frac{1}{3}DD_1$，$BN=\frac{1}{3}BB_1$，那么正方体中过M，N，C_1的截面图形是（　　）

A. 三角形　　B. 四边形

C. 五边形　　D. 六边形