2024届湖南明德中学高三1月模拟调研数学试题

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

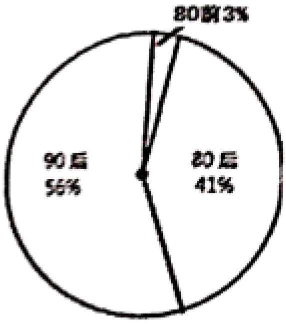
一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

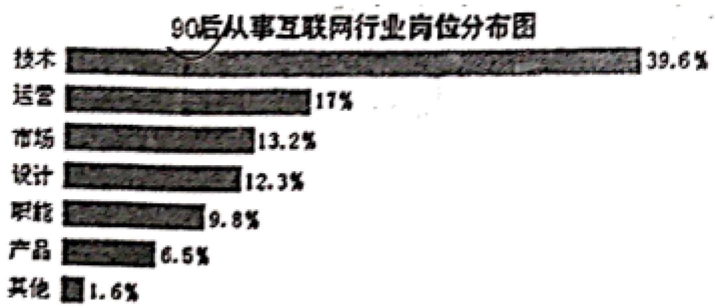
1．已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$7S_2=4S_4$，则公比q的值为（　　）

A．1　　B．1或$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

2．某调查机构对全国互联网行业进行调查统计，得到整个互联网行业从业者年龄分布饼状图，90后从事互联网行业岗位分布条形图，则下列结论中不正确的是（　　）

注：90后指1990年及以后出生，80后指1980-1989年之间出生，80前指1979年及以前出生.





A．互联网行业从业人员中90后占一半以上

B．互联网行业中从事技术岗位的人数超过总人数的20%

C．互联网行业中从事运营岗位的人数90后比80前多

D．互联网行业中从事技术岗位的人数90后比80后多

3．费马素数是法国大数学家费马命名的,形如$2^{2^n}+1(n\in N)$的素数(如：$2^{2^0}+1=3$)为费马素数,在不超过30的正偶数中随机选取一数,则它能表示为两个不同费马素数的和的概率是(　　)

A．$\frac{2}{15}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{4}{15}$　　D．$\frac{1}{3}$

4．已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$2S_n=2^{n+1}+\lambda$，则λ的值是(　)

A．4　　B．2　　C．-2　　D．-4

5．若$\left(2x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$的二项式展开式中二项式系数的和为32，则正整数$n$的值为（　　）

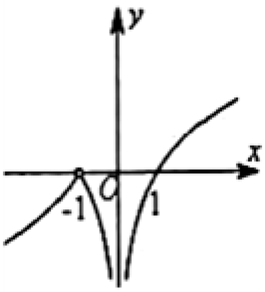
A．7　　B．6　　C．5　　D．4

6．将函数 $f\left(x\right)=\cos 2x$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，如果 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,a\right]$ 上单调递减，那么实数 a 的最大值为（　　）

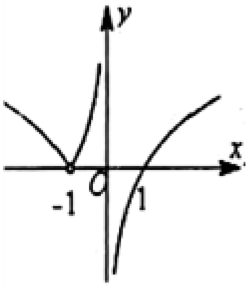
A． $\frac{\pi}{8}$　　　　**B．** $\frac{\pi}{4}$　　　　**C．** $\frac{\pi}{2}$　　　　**D．** $\frac{3}{4}\pi$

7．函数 $f\left(x\right)=\frac{x+1}{\left|x+1\right|}\log_a\left|x\right|$（$0<a<1$）的图象的大致形状是（　　）

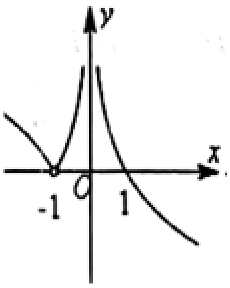
A．



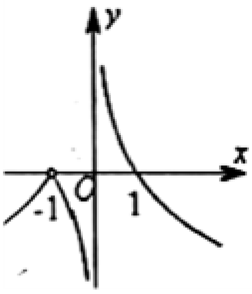
B．



C．



D．



8．已知 M 是函数 $f(x)=\ln x$ 图象上的一点，过 M 作圆 $x^2+y^2-2y=0$ 的两条切线，切点分别为 A,B，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最小值为（　　）

A． $2\sqrt{2}-3$　　　　**B．** -1　　　　**C．** 0　　　　**D．** $\frac{5\sqrt{2}}{2}-3$

9．已知抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 经过点 $M\left(2,2\sqrt{2}\right)$，焦点为 F，则直线 MF 的斜率为（　　）

A． $2\sqrt{2}$　　　　**B．** $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　　　**C．** $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　**D．** $-2\sqrt{2}$

10．已知复数 $z_1=1+ai\left(a\in R\right)$，$z_2=1+2i$（i 为虚数单位），若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，则 $a=$（　　）

A． -2　　　　**B．** 2　　　　**C．** $-\frac{1}{2}$　　　　**D．** $\frac{1}{2}$

11．要得到函数 $f(x)=\sin(3x+\frac{\pi}{3})$ 的导函数 $f^{'}(x)$ 的图像，只需将 $f(x)$ 的图像（　　）

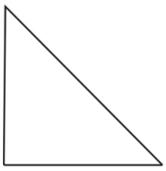
A．向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再把各点的纵坐标伸长到原来的 **3** 倍

B．向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把各点的纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$倍

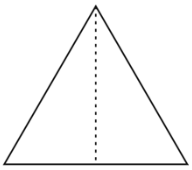
C．向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再把各点的纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$倍

D．向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把各点的纵坐标伸长到原来的 **3** 倍

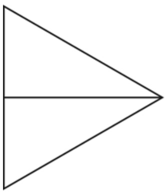
12．某几何体的三视图如图所示，若侧视图和俯视图均是边长为2的等边三角形，则该几何体的体积为



正视图



侧视图



俯视图

A．$\frac{8}{3}$　　　　B．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　　　C．1　　　　D．2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，则向量$\vec{a}$在$\vec{b}$的夹角为______.

14．我国古代数学著作《九章算术》中记载“今有人共买物，人出八，盈三；人出七，不足四．问人数、物价各几何？”设人数、物价分别为x、y，满足$\begin{cases}8x=y+3\\7x=y-4\end{cases}$，则$x=$_____，$y=$_____.

15．若双曲线 ***C***：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的顶点到渐近线的距离为$\frac{b}{2}$，则$\frac{b^2+1}{\sqrt{3}a}$的最小值________.

16．某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品，制作过程必须先后经过两次烧制，当第一次烧制合格后方可进入第二次烧制，再次烧制过程相互独立.根据该厂现有的技术水平，经过第一次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 **0.5**、**0.6**、**0.4**，经过第二次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 **0.6**、**0.5**、**0.75**；则第一次烧制后恰有一件产品合格的概率为________；经过前后两次烧制后，合格工艺品的件数为ξ，则随机变量ξ的期望为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）选修 **4-5**：不等式选讲

已知函数$f(x)=|x-2|$

（Ⅰ）解不等式 $f(x)+f(2x+1)\ge 6$；

（Ⅱ）对 $a+b=1(a,b>0)$ 及 $\forall x\in R$，不等式 $f(x-m)-f(-x)\le \frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

18.（12 分）已知中心在原点 O 的椭圆 C 的左焦点为 $F_1(-1,0)$，C 与 y 轴正半轴交点为 A，且 $\angle AF_1O=\frac{\pi}{3}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过点 A 作斜率为 k_1、$k_2(k_1k_2\ne 0)$ 的两条直线分别交 C 于异于点 A 的两点 M、N.证明：当 $k_2=\frac{k_1}{k_1-1}$ 时，直线 MN 过定点.

19.（12 分）已知函数 $f(x)=x^2+ax-a\ln x$，$a\in R$

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）设 $g(x)=f(x)+(a+2)\ln x-(a+2b-2)x$，且 $g(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，若 $b\ge 1+\frac{4\sqrt{3}}{3}$，求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值.

20.（12 分）某单位准备购买三台设备，型号分别为 A,B,C 已知这三台设备均使用同一种易耗品，提供设备的商家规定：可以在购买设备的同时购买该易耗品，每件易耗品的价格为 100 元，也可以在设备使用过程中，随时单独购买易耗品，每件易耗品的价格为 200 元.为了决策在购买设备时应购买的易耗品的件数.该单位调查了这三种型号的设备各 60 台，调查每台设备在一个月中使用的易耗品的件数，并得到统计表如下所示.

每台设备一个月中使用的易耗品的件数		6	7	8
频数	型号 A	30	30	0
	型号 B	20	30	10
	型号 C	0	45	15

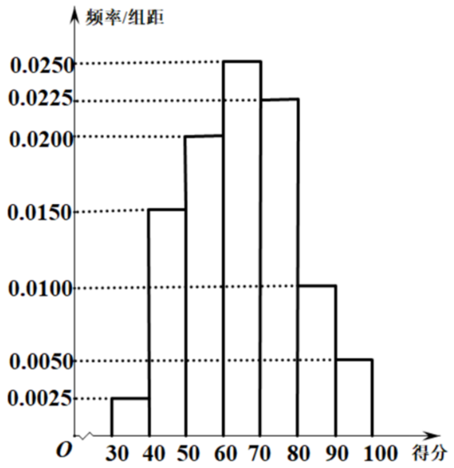
将调查的每种型号的设备的频率视为概率，各台设备在易耗品的使用上相互独立.

（1）求该单位一个月中 A,B,C 三台设备使用的易耗品总数超过 21 件的概率；

（2）以该单位一个月购买易耗品所需总费用的期望值为决策依据，该单位在购买设备时应同时购买 20 件还是 21 件易耗品？

21.（12 分）

为了解广大学生家长对校园食品安全的认识，某市食品安全检测部门对该市家长进行了一次校园食品安全网络知识问卷调查，每一位学生家长仅有一次参加机会，现对有效问卷进行整理，并随机抽取出了 **200** 份答卷，统计这些答卷的得分（满分：**100** 分）制出的频率分布直方图如图所示，由频率分布直方图可以认为，此次问卷调查的得分 Z 服从正态分布 $N\left(\mu,210\right)$，其中 μ 近似为这 **200** 人得分的平均值（同一组数据用该组区间的中点值作为代表）．



（1）请利用正态分布的知识求 $P(36<Z\le 79.5)$；

（2）该市食品安全检测部门为此次参加问卷调查的学生家长制定如下奖励方案：

①得分不低于 μ 的可以获赠 **2** 次随机话费，得分低于 μ 的可以获赠 **1** 次随机话费：

②每次获赠的随机话费和对应的概率为：

获赠的随机话费（单位：元）	10	20
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

市食品安全检测部门预计参加此次活动的家长约 **5000** 人，请依据以上数据估计此次活动可能赠送出多少话费？

附：①$\sqrt{210}\approx 14.5$；②若 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$；则 $P\left(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\right)=0.6827$，

$P\left(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\right)=0.9545$，$P\left(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\right)=0.9973$．

22．（10 分）已知函数 $f(x)=e^x-x^2+2a+b$（$x\in\mathbf{R}$）的图象在 $x=0$ 处的切线为 $y=bx$（e 为自然对数的底数）

（1）求 a,b 的值；

（2）若 $k\in Z$，且 $f(x)+\frac{1}{2}(3x^2-5x-2k)\ge 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 k 的最大值．

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由$7S_2=4S_4$可得$3(a_1+a_2)=4(a_3+a_4)$，故可求q的值.

【详解】

因为$7S_2=4S_4$，所以$3(a_1+a_2)=4(S_4-S_2)=4(a_3+a_4)$，

故$q^2=\frac{3}{4}$，因$\{a_n\}$为正项等比数列，故$q>0$，所以$q=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 C.

【点睛】

一般地，如果$\{a_n\}$为等比数列，S_n为其前n项和，则有性质：

（1）若$m,n,p,q\in N^*,m+n=p+q$，则$a_ma_n=a_pa_q$；

（2）公比$q\neq 1$时，则有$S_n=A+Bq^n$，其中A,B为常数且$A+B=0$；

（3）$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$ 为等比数列（$S_n\neq 0$）且公比为q^n.

2、D

【解析】

根据两个图形的数据进行观察比较，即可判断各选项的真假.

【详解】

在 A 中，由整个互联网行业从业者年龄分别饼状图得到互联网行业从业人员中 90 后占 56%，所以是正确的；

在 B 中，由整个互联网行业从业者年龄分别饼状图，90 后从事互联网行业岗位分布条形图得到：

$56\%\times 39.6\%=22.176\%>20\%$，互联网行业从业技术岗位的人数超过总人数的$20\%$，所以是正确的；

在 C 中，由整个互联网行业从业者年龄分别饼状图，90 后从事互联网行业岗位分别条形图得到：

$13.7\%\times 39.6\%=9.52\%>3\%$，互联网行业从事运营岗位的人数 90 后比 80 后多，所以是正确的；

在 D 中，互联网行业中从事技术岗位的人数 90 后所占比例为$56\%\times 39.6\%=22.176\%<41\%$，所以不能判断互联网行业中从事技术岗位的人数 90 后比 80 后多.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了命题的真假判定，以及统计图表中饼状图和条形图的性质等基础知识的应用，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

3、B

【解析】

基本事件总数$n=15$，能表示为两个不同费马素数的和只有$8=3+5$，$20=3+17$，$22=5+17$，共有3个，根据古典概型求出概率.

【详解】

在不超过30的正偶数中随机选取一数，基本事件总数$n=15$

能表示为两个不同费马素数的和的只有$8=3+5$，$20=3+17$，$22=5+17$，共有3个

则它能表示为两个不同费马素数的和的概率是$P=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查概率的求法，考查列举法解决古典概型问题，是基础题.

4、**C**

【解析】

利用S_n先求出a_n，然后计算出结果.

【详解】

根据题意，当$n=1$时，$2S_1=2a_1=4+\lambda,\therefore a_1=\dfrac{4+\lambda}{2}$,

故当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$,

Q数列$\{a_n\}$是等比数列,

则$a_1=1$，故$\dfrac{4+\lambda}{2}=1$,

解得$\lambda=-2$,

故选C.

【点睛】

本题主要考查了等比数列前n项和S_n的表达形式，只要求出数列中的项即可得到结果，较为基础.

5、**C**

【解析】

由二项式系数性质，$(a+b)^n$的展开式中所有二项式系数和为2^n计算.

【详解】

$\left(2x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$的二项展开式中二项式系数和为$2^n$，$\therefore 2^n=32,\therefore n=5$.

故选：C．

【点睛】

本题考查二项式系数的性质，掌握二项式系数性质是解题关键．

6、B

【解析】

根据条件先求出$g\left(x\right)$的解析式，结合三角函数的单调性进行求解即可．

【详解】

将函数$f\left(x\right)=\cos 2x$图象上所有点向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度后得到函数$g\left(x\right)$的图象，

则$g\left(x\right)=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，

设$\theta=2x+\frac{\pi}{2}$，

则当$0<x\le a$时，$0<2x\le 2a$，$\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{2}\le 2a+\frac{\pi}{2}$，

即$\frac{\pi}{2}<\theta\le 2a+\frac{\pi}{2}$，

要使$g\left(x\right)$在区间$\left[0,a\right]$上单调递减，

则$2a+\frac{\pi}{2}\le\pi$得$2a\le\frac{\pi}{2}$，得$a\le\frac{\pi}{4}$，

即实数a的最大值为$\frac{\pi}{4}$，

故选：B.

【点睛】

本小题主要考查三角函数图象变换，考查根据三角函数的单调性求参数，属于中档题.

7、C

【解析】

对 x 分类讨论，去掉绝对值，即可作出图象.

【详解】

$$f\left(x\right)=\frac{x+1}{\left|x+1\right|}\log_a\left|x\right|=\begin{cases}-\log_a\left(-x\right), & x<-1,\\ \log_a\left(-x\right), & -1<x<0,\\ \log_a x, & x>0.\end{cases}$$

故选 **C**.

【点睛】

识图常用的方法

(1)定性分析法：通过对问题进行定性的分析，从而得出图象的上升(或下降)的趋势，利用这一特征分析解决问题；

(2)定量计算法：通过定量的计算来分析解决问题；

(3)函数模型法：由所提供的图象特征，联想相关函数模型，利用这一函数模型来分析解决问题.

8、**C**

【解析】

先画出函数图像和圆，可知$\left|MA\right|=\left|MB\right|$，若设$\angle AMB=2\theta$，则$\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|=\dfrac{1}{\tan\theta}$，所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2\cos2\theta=2\sin^2\theta+\dfrac{1}{\sin^2\theta}-3$，而要求$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$的最小值，只要$\sin\theta$取得最大值，若设圆$x^2+y^2-2y=0$的圆心为$C$，则$\sin\theta=\dfrac{1}{\left|MC\right|}$，所以只要$\left|MC\right|$取得最小值，若设$M(x,\ln x)$，则$|MC|^2=x^2+(\ln x-1)^2$，然后构造函数$g(x)=x^2+(\ln x-1)^2$，利用导数求其最小值即可.

【详解】

记圆$x^2+y^2-2y=0$的圆心为C，设$\angle AMC=\theta$，则$\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|=\dfrac{1}{\tan\theta},\sin\theta=\dfrac{1}{\left|MC\right|}$，设

$M(x,\ln x),|MC|^2=x^2+(\ln x-1)^2$，记$g(x)=x^2+(\ln x-1)^2$，则

$g'(x)=2x+2(\ln x-1)\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}(x^2+\ln x-1)$，令$h(x)=x^2+\ln x-1$，

因为$h(x)=x^2+\ln x-1$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$h(1)=0$，所以当$0<x<1$时，$h(x)<h(1)=0,g'(x)<0$；当$x>1$时，$h(x)>h(1)=0,g'(x)>0$，则$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)_{\min}=g(1)=2$，即

$\left|MC\right|\geq\sqrt{2},0<\sin\theta\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2\cos2\theta=2\sin^2\theta+\dfrac{1}{\sin^2\theta}-3\geq0$（当$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立）.

故选：**C**