

第二章 一元二次方程

专题4 一元二次方程根的判别式、
根与系数的关系的综合应用问题



A级 基础训练

1. 下列方程中，有两个相等实数根的是 (A)

A. $x^2 + 9 = 6x$

B. $x^2 - 1 = 0$

C. $x^2 - 4x = 4$

D. $x^2 - 2x = 0$

2. 已知 α , β 是一元二次方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两个实数根，则 $\alpha + \beta - \alpha\beta$ 的值是 (B)

A. 3

B. 1

C. -1

D. -3

3. 已知关于 x 的方程 $kx^2 - 6x + 9 = 0$ 有实数根，则 k 的取值范围是 (**D**)

A. $k < 1$ 且 $k \neq 0$

B. $k < 1$

C. $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$

D. $k \leq 1$

4. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 有实数根, 则 m 的取值范围是 $m \leq 25$.

5. 对于任意实数 k , 关于 x 的方程 $\frac{1}{4}x^2 - (k+4)x + 8k = 0$ 的根的情况为 有两个不相等的实数根.

6. 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的两根, 则:

$$(1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \underline{2};$$

$$(2) |x_1 - x_2| = \underline{2\sqrt{2}};$$

$$(3) (x_1 + 1)(x_2 + 1) = \underline{7}.$$

7. (2023·岳阳) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2mx + m^2 - m + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根, 且 $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2$, 求实数 m 的值.

解: \because 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2mx + m^2 - m + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (2m)^2 - 4(m^2 - m + 2) = 4m - 8 > 0.$$

解得 $m > 2$.

由根与系数的关系, 得 $x_1 + x_2 = -2m$, $x_1x_2 = m^2 - m + 2$.

$$\because x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2, \therefore -2m + m^2 - m + 2 = 2.$$

解得 $m_1 = 3$, $m_2 = 0$ (不合题意, 舍去) $\therefore m = 3$.

8. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \sqrt{m}x - 2 = 0$ 有两个实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

解: (1) 由题可知, $m \geq 0$.

又 \because 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \sqrt{m}x - 2 = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore \Delta = (\sqrt{m})^2 - 4 \times 1 \times (-2) = m + 8 \geq 0.$$

解得 $m \geq -8$.

$$\therefore m \geq 0.$$

(2) 设方程的两根为 x_1 , x_2 , 且满足 $(x_1 - x_2)^2 - 17 = 0$, 求 m 的值.

解: (2) \because 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \sqrt{m}x - 2 = 0$ 有两个实数根 x_1 , x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\sqrt{m}, \quad x_1 x_2 = -2.$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 - 17 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 17 = 0,$$

$$\text{即 } m + 8 - 17 = 0.$$

解得 $m = 9 > 0$, 符合题意.

故 $m = 9$.

B级 能力训练

9. 已知关于 x 的一元二次方程 $(\frac{1}{4}m - 1)x^2 - x + 1 = 0$ 有两个实数根, 则 m 的取值范围是 $m \leq 5$ 且 $m \neq 4$.

【解析】由题意, 可得 $\frac{1}{4}m - 1 \neq 0$, $\Delta = (-1)^2 - 4(\frac{1}{4}m - 1) \times 1 \geq 0$. 解得 $m \neq 4$, $m \leq 5$. 故答案为 $m \leq 5$ 且 $m \neq 4$.

10. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)^2x^2+3mx+3=0$ 有一个实数根为 -1 , 则该方程的另一个实数根为 $-\frac{1}{3}$.

【解析】将 $x=-1$ 代入原方程, 得 $(m-1)^2-3m+3=0$. 化简, 得 $m^2-5m+4=0$. 解得 $m_1=1, m_2=4$. 又 \because 原方程是一元二次方程, $\therefore (m-1)^2 \neq 0$, 即 $m \neq 1$. $\therefore m=4$. 将 $m=4$ 代入原方程并化简, 得 $3x^2+4x+1=0$. 由根与系数的关系, 得 $x_1x_2=\frac{1}{3}$.

$\because x_1=-1, \therefore x_2=-\frac{1}{3}$. 故答案为 $-\frac{1}{3}$.

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$.

(1) 当 $b = a + 2$ 时, 利用根的判别式判断该方程根的情况;

解: (1) 由题意, 得 $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = (a + 2)^2 - 4a = a^2 + 4a + 4 - 4a = a^2 + 4$.

$\because a^2 > 0, \therefore \Delta > 0$.

\therefore 该方程有两个不相等的实数根.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/778061046014006106>