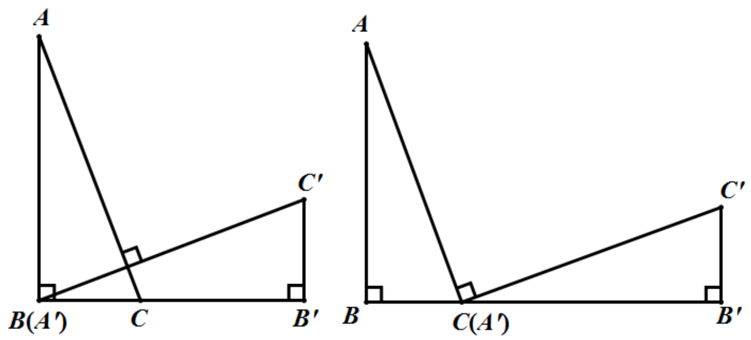
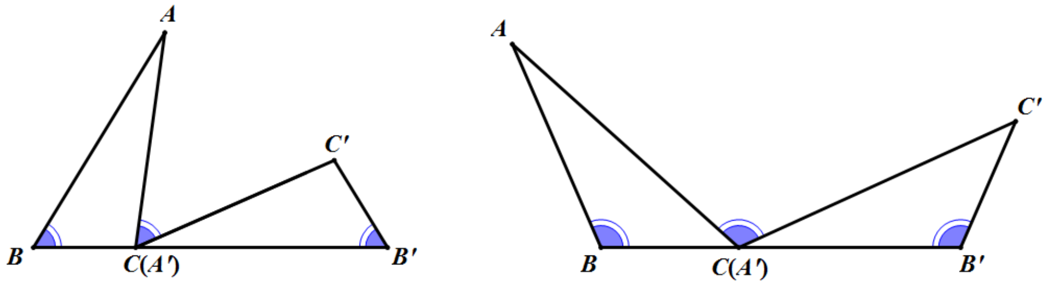
专题 11 全等三角形模型之一线三等角模型全攻略

【模型说明】

①三垂直全等模型



②线三等角模型



【例题精讲】

例 1．（基本模型 1）在直线 m 上依次取互不重合的三个点 D，A，E，在直线 m 上方有 $AB=AC$，且满足 $\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC=\alpha$．

【积累经验】

（1）如图 1，当 $\alpha=90°$ 时，猜想线段 DE，BD，CE 之间的数量关系是______；

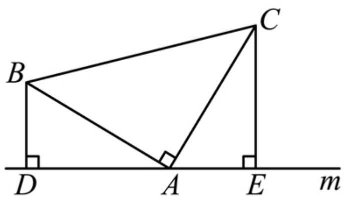


图1

【类比迁移】

（2）如将 2，当 $0<\alpha<180°$ 时，问题（1）中结论是否仍然成立？如成立，请你给出证明；若不成立，请说明理由；

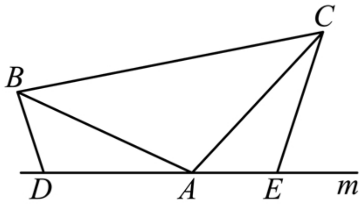


图2

【拓展应用】

（3）如图 3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 是钝角，$AB=AC$，$\angle BAD<\angle CAE$，$\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC$，直线 m 与 CB 的延长线交于点 F，若 $BC=3FB$，$\triangle ABC$ 的面积是 12，请直接写出 $\triangle FBD$ 与 $\triangle ACE$ 的面积之和.

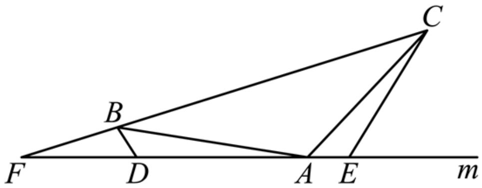


图3

【答案】（1）$DE=BD+CE$；（2）$DE=BD+CE$ 仍然成立，理由见解析；（3）$\triangle FBD$ 与 $\triangle ACE$ 的面积之和为 4.

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质，解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定与性质.

（1）由 $\angle BDA=\angle BAC=\angle AEC=90^\circ$ 得到 $\angle BAD+\angle EAC=\angle BAD+\angle DBA=90^\circ$，进而得到 $\angle DBA=\angle EAC$，然后结合 $AB=AC$ 得证 $\triangle DBA\cong\triangle EAC$，最后得到 $DE=BD+CE$；

（2）由 $\angle BDA=\angle BAC=\angle AEC=\alpha$ 得到 $\angle BAD+\angle EAC=\angle BAD+\angle DBA=180^\circ-\alpha$，进而得到 $\angle DBA=\angle EAC$，然后结合 $AB=AC$ 得证 $\triangle DBA\cong\triangle EAC$，最后得到 $DE=BD+CE$.

（3）由 $\angle BAD<\angle CAE$，$\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC$，得出 $\angle CAE=\angle ABD$，由 AAS 证得 $\triangle ABD\cong\triangle CAE$，得出 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CAE}$，再由不同底等高的两个三角形的面积之比等于底的比，得出 $S_{\triangle ABF}=4$ F 即可得出结果.

【详解】解：（1）$DE=BD+CE$，理由如下，

$\because \angle BDA=\angle BAC=\angle AEC=90^\circ$，

$\therefore \angle BAD+\angle EAC=\angle BAD+\angle DBA=90^\circ$，

$\therefore \angle DBA=\angle EAC$，

$\because AB=AC$，

$\therefore \triangle DBA\cong\triangle EAC(\text{AAS})$，

$\therefore AD=CE$，$BD=AE$，

$\therefore DE=AD+AE=BD+CE$，

故答案为：$DE=BD+CE$.

（2）$DE=BD+CE$ 仍然成立，理由如下，

$\because \angle BDA=\angle BAC=\angle AEC=\alpha$，

$\therefore \angle BAD+\angle EAC=\angle BAD+\angle DBA=180^{\circ}-\alpha$，

$\therefore \angle DBA=\angle EAC$，

$\because AB=AC$，

$\therefore \triangle DBA\cong\triangle EAC(\text{AAS})$，

$\therefore BD=AE, AD=CE$，

$\therefore DE=AD+AE=BD+CE$；

（3）$\because \angle BAD<\angle CAE$，$\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC$，

$\therefore \angle CAE=\angle ABD$，

在$\triangle ABD$和$\triangle CAE$中，

$$\begin{cases}\angle ABD=\angle CAE\\ \angle BDA=\angle CEA\\ AB=AC\end{cases}，$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CAE(\text{AAS})$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CAE}$，

设$\triangle ABC$的底边BC上的高为h，则$\triangle ABF$的底边BF上的高为h，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h=12$，$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}BF\cdot h$，

$\because BC=3BF$，

$\therefore S_{\triangle ABF}=4$，

$\because S_{\triangle ABF}=S_{\triangle BDF}+S_{\triangle ABD}=S_{\triangle FBD}+S_{\triangle ACE}=4$，

$\therefore \triangle FBD$与$\triangle ACE$的面积之和为 4.

例 2.（基本模型 2）在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=BC$，直线MN经过点C，且$AD\perp MN$于D，$BE\perp MN$于E.

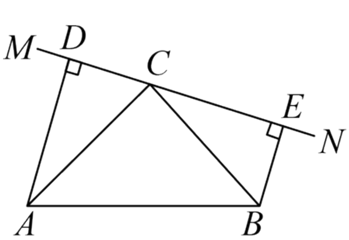


图1

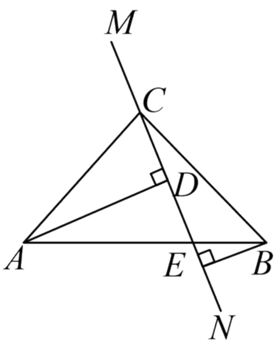


图2

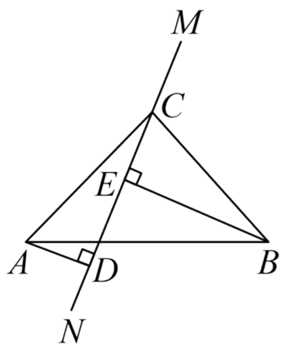


图3

(1)当直线MN绕点C旋转到图 1 位置时，求证：$DE=AD+BE$；

(2)当直线 MN 绕点 C 旋转到图 2 位置时，试问：DE、AD、BE 有怎样的等量关系？请写出这个等量关系，并加以证明；

(3)当直线 MN 绕点 C 旋转到图 3 位置时，DE、AD、BE 之间的等量关系是___（直接写出答案，不需证明）.

【答案】(1)见解析

(2) $AD=BE+DE$，证明见解析

(3) $BE=AD+DE$

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质．余角的性质，解题的关键在于找出证明三角形全等的条件.

（1）先用 AAS 证明 $\triangle ADC\cong\triangle CEB$，得 $AD=CE$，$BE=CD$，进而得出 $DE=BE+CD$；

（2）先用 AAS 证明 $\triangle ADC\cong\triangle CEB$，可得 $AD=CE$，$BE=CD$，进而得出

$AD=CD+DE=BE+DE$；

（3）证明过程同（2），进而可得 $BE=AD+DE$.

【详解】（1）证明：由题意知，$\angle BCA=90°$，$\angle ADC=\angle BEC=90°$，

$\therefore\angle ACD+\angle BCE=90°$，$\angle BCE+\angle CBE=90°$，

$\therefore\angle ACD=\angle CBE$，

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEB$ 中，

$\because\begin{cases}\angle ADC=\angle CEB=90°\\ \angle ACD=\angle CBE\\ AC=BC\end{cases}$，

$\therefore\triangle ADC\cong\triangle CEB(\mathrm{AAS})$，

$\therefore AD=CE$，$BE=CD$，

$\therefore DE=DC+CE=BE+AD$，

$\therefore DE=AD+BE$.

（2）解：$AD=BE+DE$.

证明：$\because AD\perp MN$，$BE\perp MN$，

$\therefore\angle ADC=\angle BEC=90°$，

$\therefore\angle ACD+\angle BCE=90°$，$\angle BCE+\angle CBE=90°$，

$\therefore\angle ACD=\angle CBE$，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$\because\begin{cases}\angle ADC=\angle CEB\\ \angle ACD=\angle CBE\\ AC=BC\end{cases}$，

$\therefore\triangle ACD\cong\triangle CBE(\mathrm{AAS})$，

$\therefore AD = CE$， $BE = CD$，

又$\because CE = CD + DE = BE + DE$，

$\therefore AD = BE + DE$．

（3）解： $BE = AD + DE$．

证明：$\because AD \perp MN$ 于 D， $BE \perp MN$ 于 E，

$\therefore \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$，

$\therefore \angle BCE + \angle EBC = 90^\circ$， $\angle ACD + \angle BCE = 90^\circ$，

$\therefore \angle ACD = \angle EBC$，

在$\triangle ACD$和$\triangle CBE$中，

$$\because \begin{cases} \angle ADC = \angle CEB \\ \angle ACD = \angle CBE \\ AC = BC \end{cases}，$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE(\mathrm{AAS})$，

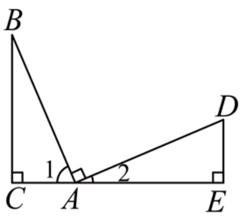
$\therefore AD = CE$， $BE = CD$，

又$\because CD = CE + DE = AD + DE$，

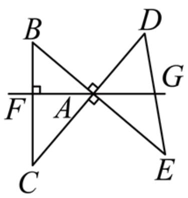
$\therefore BE = AD + DE$．

例 3．（模型拓展 1）通过对下面数学模型的研究学习，解决下列问题：（模型呈现）

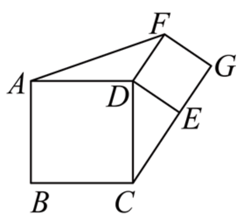
（1）如图1， $\angle BAD = 90^\circ, AB = AD$，过点$B$作$BC \perp AC$于点$C$，过点$D$作$DE \perp AC$于点$E$．由$\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle D = 90^\circ$，得$\angle 1 = \angle D$．又$\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$，可以推理得到$\triangle ABC \cong \triangle DAE$．进而得到$AC =$____________，$BC = AE$．我们把这个数学模型称为"$K$字"模型或"一线三等角"模型；



(图1)



(图2)



(图3)

（模型应用）

（2）如图2， $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ, AB = AD, AC = AE$，连接$BC, DE$，且$BC \perp AF$于点$F$，$DE$与直线$AF$交于点$G$．求证：点$G$是$DE$的中点；

（深入探究）

（3）如图，已知四边形$ABCD$和$DEGF$为正方形，$\triangle AFD$的面积为S_1，$\triangle DCE$的面积为S_2，则有S_1____________S_2（填">、=、<"）

【答案】（1） $AC = DE$；（2）见解析；（3）=。

【分析】（1）根据全等三角形的性质可直接进行求解；

（2）分别过点 D 和点 E 作 $DH \perp FG$ 于点 H， $EQ \perp FG$ 于点 Q，进而可得 $\angle BAF = \angle ADH$，然后可证 $\triangle ABF \cong \triangle DAH$，则有 $AF = DH$，进而可得 $DH = EQ$，通过证明 $\triangle DHG \cong \triangle EQG$ 可求解问题；

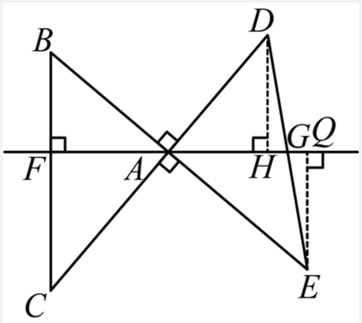
（3）过点 D 作 $DO \perp AF$ 交 AF 于 O，过点 E 作 $EN \perp OD$ 交 OD 延长线于 N，过点 C 作 $CM \perp OD$ 交 OD 延长线于 M，由题意易得 $\angle ADC = \angle 90°$， $AD = DC$， $DF = DE$，然后可得 $\angle ADO = \angle DCM$，则有 $\triangle AOD \cong \triangle DMC$， $\triangle FOD \cong \triangle DNE$，进而可得 $OD = NE$，通过证明 $\triangle ENP \cong \triangle CMP$ 及等积法可进行求解问题.

【详解】解：（1）$\because \triangle ABC \cong \triangle DAE$，

$\therefore AC = DE$，

故答案为 $AC = DE$；

（2）分别过点 D 和点 E 作 $DH \perp FG$ 于点 H， $EQ \perp FG$ 于点 Q，如图所示：



$\therefore \angle DAH + \angle ADH = 90°$，

$\because \angle BAD = 90°$，

$\therefore \angle BAF + \angle DAH = 90°$，

$\therefore \angle BAF = \angle ADH$，

$\because BC \perp AF$，

$\therefore \angle BFA = \angle AHD = 90°$，

$\because AB = DA$，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DAH$，

$\therefore AF = DH$，

同理可知 $AF = EQ$，

$\therefore DH = EQ$，

$\because DH \perp FG$， $EQ \perp FG$，

$\therefore \angle DHG = \angle EQG = 90°$，

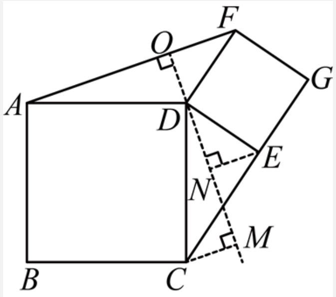
$\because \angle DGH = \angle EGQ$

$\therefore \triangle DHG \cong \triangle EQG$，

$\therefore DG = EG$，即点 G 是 DE 的中点；

（3）$S_1=S_2$，理由如下：

如图所示，过点 D 作 $DO\perp AF$ 交 AF 于 O，过点 E 作 $EN\perp OD$ 交 OD 延长线于 N，过点 C 作 $CM\perp OD$ 交 OD 延长线于 M



∵四边形 $ABCD$ 与四边形 $DEGF$ 都是正方形

∴$\angle ADC=\angle 90^\circ$，$AD=DC$，$DF=DE$

∵$DO\perp AF$，$CM\perp OD$，

∴$\angle AOD=\angle CMD=90^\circ$，$\angle OAD+\angle ODA=90^\circ$，$\angle CDM+\angle DCM=90^\circ$，

又∵$\angle ODA+\angle CDM=90^\circ$，

∴$\angle ADO=\angle DCM$，

∴$\triangle AOD\cong\triangle DMC$，

∴$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle DMC}$，$OD=MC$，

同理可以证明$\triangle FOD\cong\triangle DNE$，

∴$S_{\triangle FOD}=S_{\triangle DNE}$，$OD=NE$，

∴$MC=NE$，

∵$EN\perp OD$，$CM\perp OD$，$\angle EPN=\angle CMP$，

∴$\triangle ENP\cong\triangle CMP$，

∴$S_{\triangle ENP}$=$S_{\triangle CMP}$，

∵$S_{\triangle ADF}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle FOD}, S_{\triangle DCE}=S_{\triangle DCM}-S_{\triangle CMP}+S_{\triangle DEN}+S_{\triangle ENP}$，

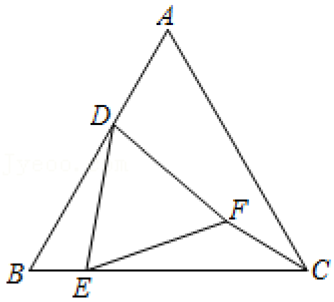
∴$S_{\triangle DCE}=S_{\triangle DCM}+S_{\triangle DEN}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle FOD}$，

∴$S_{\triangle DCE}$=$S_{\triangle ADF}$ 即 $S_1=S_2$，

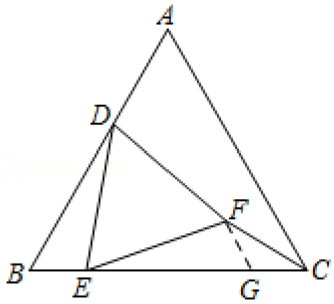
故答案为：=.

【点睛】本题主要考查全等三角形的性质与判定、直角三角形的两个锐角互余及等积法，熟练掌握全等三角形的判定条件是解题的关键.

例 4．（模型拓展 2）如图，等边三角形 ABC 中，放置等边三角形 DEF，且点 D，E 分别落在 AB，BC 上，AD=5，连结 CF，若 CF 平分∠ACB，则 BE 的长度为 ___2.5___．



【解答】解：如图，在 BC 上截取 $EG=BD$，连接 FG，



∵△ABC 和△DEF 是等边三角形，

∴$DE=EF$，$AB=BC$，$\angle DEF=\angle B=\angle ACB=60^\circ$，

∵$\angle DEC=\angle BDE+\angle B=\angle DEF+\angle FEG$，∴$\angle BDE=\angle FEG$，

在△BED 和△GFE 中，$\begin{cases} DE=EF \\ \angle BDE=\angle FEG \\ BD=EG \end{cases}$，∴△$BED$≌△$GFE$（$SAS$），

∴$\angle B=\angle EGF=60^\circ$，$BE=FG$，

∵FC 平分$\angle ACB$，∴$\angle ACF=\angle ECF=30^\circ$，

∵$\angle EGF=\angle GFC+\angle FCG$，∴$\angle GFC=\angle GCF=30^\circ$，∴$FG=CG=BE$，

∵$AB=BC$，$BD=EG$，∴$AD=BE+CG=2BE=5$，∴$BE=2.5$．故答案为：2.5．

例 5（培优综合）如图所示，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，点 D 是线段 CA 延长线上一点，且 $AD=AB$．点 F 是线段 AB 上一点，连接 DF，以 DF 为斜边作等腰 Rt△DFE．连接 EA，且 $EA\perp AB$．

（1）若$\angle AEF=20^\circ$，$\angle ADE=50^\circ$，则$\angle ABC=$__60__°；

（2）过 D 点作 $DG\perp AE$，垂足为 G．

①填空：△DEG≌△__EFA__；

②求证：$AE=AF+BC$；

（3）如图 2，若点 F 是线段 BA 延长线上一点，其他条件不变，请写出线段 AE，AF，BC 之间的数量关系，并简要说明理由．

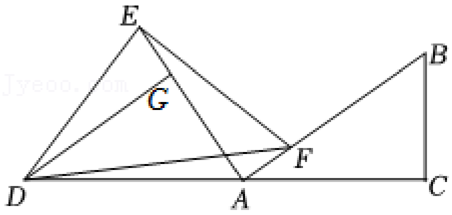


图1

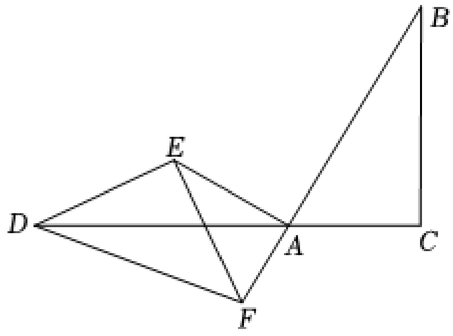


图2

【解答】（1）解：∵$\angle AEF=20^\circ$，$\angle DEF=90^\circ$，

∴$\angle DEA=70^\circ$，

∵$\angle ADE=50^\circ$，

∴$\angle DAE=60^\circ$，

∵$\angle EAB=90^\circ$，

∴$\angle BAC=30^\circ$，

∵$\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle ABC=60^\circ$，

故答案为，60．

（2）①解：∵$DG\perp AE$，

∴$\angle DEG+\angle EDG=90^\circ$，

∵$\angle DEF=90^\circ$，

∴$\angle DEG+\angle AEF=90^\circ$，

∴$\angle EDG=\angle FEA$，

在△DEG 和△EFA 中，

$$\begin{cases}\angle DGE=\angle EAF\\ \angle EDG=\angle FEA,\\ DE=EF\end{cases}$$

∴△DEG≌△EFA（AAS），

故答案为：EFA．

②证明：∵$\angle GDA+\angle GAD=90^\circ$，$\angle GAD+\angle BAC=90^\circ$，

∴$\angle GDA=\angle BAC$，

∵$AD=AB$，$\angle DGA=\angle C=90^\circ$，

∴△GDA≌△CAB（AAS），

∴$BC=AG$，

∵△DEG≌△EFA，

∴$EC=AF$，

∴$AE=AG+GE=AF+BC$.

（3）解：$BC=AE+AF$，理由如下，

如图 2，过点 D 作 $DG\perp AE$，交 AE 的延长线于点 G，则$\angle DGE=90°$，

∵$AE\perp AB$，∴$\angle EAF=\angle DGE=90°$，

∵$\triangle DEF$ 是以 DF 为斜边的等腰直角三角形，

∴$\angle DEF=90°$，$DE=EF$，

∴$\angle GDE+\angle GED=\angle GED+\angle AEF=90°$，

∴$\angle GDE=\angle AEF$，

∴$\triangle GDE\cong\triangle AEF$（$AAS$），

∴$GE=AF$，

∵$\angle DGE=\angle EAF=90°$，

∴$DG/\!/AB$，

∴$\angle GDA=\angle CAB$，

在$\triangle GDA$ 和$\triangle CAB$ 中，$\begin{cases}\angle DGA=\angle C\\ \angle GDA=\angle CAB,\\ AD=AB\end{cases}$

∴$\triangle GDA\cong\triangle CAB$（$AAS$），

∴$BC=AG$，

∴$BC=EG+AE=AF+AE$.

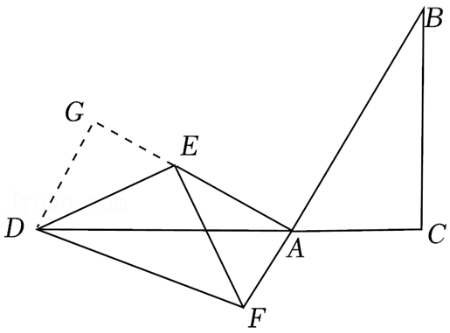
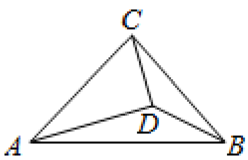


图2

【课后训练】

1．如图，在等腰Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，D 为$\triangle ABC$ 内一点，且$\angle BCD=\angle CAD$，若$CD=4$，则$\triangle BCD$ 的面积为______.



【答案】8

【分析】由线段 CD 的长求ΔBCD 的面积，故过 B 作 CD

的垂线，则由三角形面积公式可知：$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\times CD\times BE$，再由题中的$\angle BCD=\angle CAD$和等腰直角三角形 ABC，即可求证$\Delta ACD\cong\Delta CBE$，最后由$CD=BE=4$即可求解．

【详解】解：过点 B 作 CD 的垂线，交 CD 的延长线于点 E

$\because \angle ACB=90^\circ$

$\therefore \angle BCD+\angle ACD=90^\circ$

$\because \angle BCD=\angle CAD$

$\therefore \angle ACD+\angle CAD=90^\circ$

$\therefore \angle ADC=90^\circ$

$\because BE\perp CD$

$\therefore \angle E=90^\circ$

$\therefore \angle BCD+\angle CBE=90^\circ$

$\therefore \angle ACD=\angle CBE$

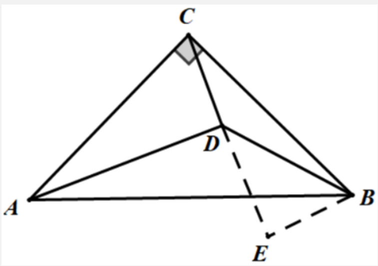
$\because AC=CB$

$\therefore \Delta ACD\cong\Delta CBE$

$\therefore CD=BE=4$

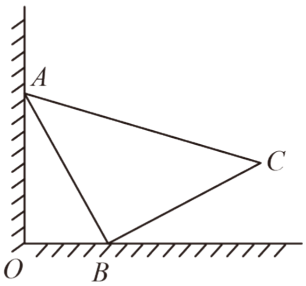
$\therefore S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\times CD\times BE=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

故答案是：8．



【点睛】本题主要考查全等三角形的证明、辅助线的画法、等腰三角形的性质和三角形面积公式，属于中档难度的几何证明题．解题的关键是由三角形面积公式画出合适的辅助线．

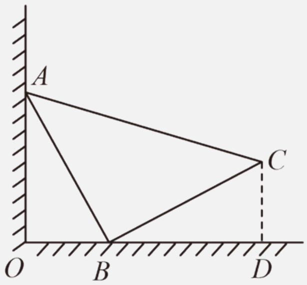
2．如图，一个等腰直角三角形 ABC 物件斜靠在墙角处（$\angle O$=90°），若 OA=50cm，OB=28cm，则点 C 离地面的距离是____ cm．



【答案】28

【分析】作 $CD\perp OB$ 于点 D，依据 AAS 证明 $\Delta AOB\cong\Delta BDC$,GMF，再根据全等三角形的性质即可得到结论.

【详解】解：过点 C 作 $CD\perp OB$ 于点 D，如图，



$\therefore\angle CDB=\angle AOB=90^\circ$

$\because\Delta ABC$ 是等腰直角三角形

$\therefore AB=CB$， $\angle ABC=90^\circ$

$\therefore\angle ABO+\angle CBD=90^\circ$

又 $\angle CBD+\angle BCD=90^\circ$

$\therefore\angle ABO=\angle BCD$

在 ΔABO 和 ΔBCD 中，

$$\begin{cases}\angle AOB=\angle BDC\\ \angle ABO=\angle BCD\\ AB=CB\end{cases}$$

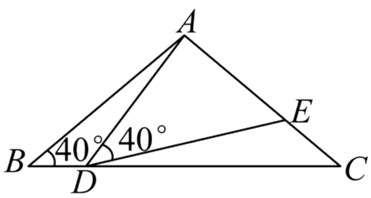
$\therefore\Delta ABO\cong\Delta BCD(AAS)$

$\therefore CD=BO=28\text{cm}$

故答案为：28.

【点睛】本题主要考查了等腰直角三角形的性质、三角形全等的判定与性质，正确作出辅助线构造全等三角形是解答本题的关键.

3．如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=2$， $\angle B=\angle C=40^\circ$，点 D 在线段 BC 上运动（D 不与 B、C 重合），连接 AD，作 $\angle ADE=40^\circ$， DE 交线段 AC 于 E.



(1)当 $\angle BDA=115^\circ$ 时， $\angle EDC=$____°， $\angle DEC=$____°；点 D 从 B 向 C 运动时， $\angle BDA$ 逐渐变____（填“大”或“小”）；

(2)当 DC 等于多少时， $\triangle ABD\cong\triangle DCE$，请说明理由；

(3)在点 D 的运动过程中，$\triangle ADE$ 的形状可以是等腰三角形吗？若可以，请直接写出 $\angle BDA$ 的度数．若不可以，请说明理由.