关于大学物理实验数据处理基础知识

一、测量

1、概念

- 测量就是以确定被测量对象的量值为目的的所有操作。
- 记录下来的测量结果应该包含测量值的大小和单位，二者缺一不可。

2、测量的分类

- 按测量方式分：直接测量和间接测量

直接测量：待测物理量的大小可以从选定好的测量仪器或仪表上直接读出来的测量。相应的待测物理量称为直接测量量。

间接测量：待测物理量需根据直接测量的值，通过一定的函数关系，才能计算出来的测量过程。相应的待测量称为间接测量量。

- 按测量条件分：等精度测量和不等精度测量

等精度测量：在相同的测量方法和条件下，多次测量同一个物理量。

不等精度测量：在不同的测量方法和条件下，多次测量同一个物理量。

二、误差

1、真值、测量值、平均值（最佳估计值）

- **真值**：被测量物理量所具有的、客观的、真实的数值，记为 x_0。
- **测量值**：通过测量所获得的被测物理量的值，记为 x 。
- **平均值（最佳估计值）**：在相同条件下，对某物理量进行n次测量，$x_1, x_2, \cdots x_n$，这n个测量结果称为一个**测量列**，取这n次独立测量值的算术平均值，记为 $\bar{x}$ 。即

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

注：在处理测量数据时常用物理量的平均值代替其真值。

2、误差

(1) 概念：测量值与真值之差定义为误差，记为 ε_i，即

$$\varepsilon_i = x_i - x_0$$

(2) 表示方法：绝对误差= 测量值 —真值

$$相对误差=\frac{绝对误差}{真值}\times 100\%$$

(3) 分类：系统误差和随机误差

系统误差

- 概念：在相同的条件下，多次测量同一物理量时，若误差的大小及符号都保持不变或按一定规律变化，这种误差称为系统误差。
- 特征：系统误差表现出恒偏大、恒偏小或周期性的特点。增加测量次数系统误差不能减少。
- 来源：仪器、理论、观测等
- 处理方法：修正已定系统误差；估计未定系统误差分布范围

随机误差

- 概念 ：在相同条件下，多次测量同一物理量时，若误差的大小和符号都不确定，这种误差称为随机误差。
- 特征：随机误差的绝对值和符号以不可预知的方式变化，随机误差使测量值围绕某一平均值上下涨落。
- 来源：环境、观测者等。
- 处理方法：取多次测量的平均值有利于消减随机误差。

三、误差的估算

1、偏差（残差）

- **定义：** 测量值 x_i 与相同条件下多次测量所得平均值 $\overline{x}$ 的差值称为偏差或残差，记为 v_i，即

$$v_i = x_i - \overline{x}$$

- **说明：** 一般情况下，我们所说的误差就是指偏差。

2、(实验)标准偏差

$$s(x)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

3、算术平均值 $\bar{x}$ 的实验标准偏差

$$s(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

算术平均值的实验标准偏差反映了测量结果的不确定度大小。

四、测量结果的评定

1、不确定度的评定方法

(1) 不确定度的概念：

用于表示测量结果可能出现的具有一定置信水平的误差范围的量，用u表示。

(2) 对概念的说明：

- 不确定度表示一个区间，被测量的真值以一定的概率存在于此区间中，此概率称为置信率，此区间称为置信区间。(而误差表示测量值偏离真值的大小，是个确定的值。)
- 不确定度可以根据实验、资料、经验等进行评定，从而可以定量确定。（而误差无法计算）

2、不确定度的计算

引言：不确定度的分量

不确定度的数值一般包含几个分量，按不确定度的数值评定方式，可分为

*A*类不确定度——用统计方法确定的分量

*B*类不确定度——用其他方法确定的分量

要计算不确定度，首先要求出所有的 *A* 类和*B*类分量，然后再合成不确定度。

1、直接测量量的A类标准不确定度的计算

A类标准不确定度用一个测量列的算术平均值$\overline{x}$的实验标准偏差$s(\overline{x})$表示，记为$u_A(x)$，即

$$u_A(x)=s(\overline{x})=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

说明 使用此式时，测量次数n应充分多，一般认为n应大于6。

2、直接测量量的B类标准不确定度的计算

如果已知被测量的测量值 x_i 分散区间的半宽为 a，且落在 $(\bar{x}-a)$ 至 $(\bar{x}+a)$ 区间的概率为100%，通过对其分布规律的估计可得出B类标准不确定度u为：

$$u_B(x)=\frac{a}{k}$$

k 是包含因子，取决于测量值的分布规律。

说明 包含因子k和半宽a 的确定方式为：

(1)如果检定证书、说明书等资料明确给出了不确定度 $U(x)$ 及包含因子 k 时，则 $a=U(x)$，B 类标准不确定度为

$$u_B(x)=\frac{a}{k}=\frac{U(x)}{k}$$

【例题】校准证书上给出标称值为1kg的砝码质量，$m=1000.00032g$ 包含因子 $k=3$（扩展）不确定度为$U=0.24$ mg，由此可确定砝码的B类标准不确定度

$$u_B(m)=\frac{U(m)}{k}=\frac{0.24}{3}=0.08mg$$

(2) 在缺乏任何信息的情况下，一般使用均匀分布，$k=\sqrt{3}$，而a 则取仪器的最大允许误差（误差限）$\Delta(x)$，所以B 类标准不确定度为

$$u_B(x)=\frac{a}{k}=\frac{\Delta(x)}{\sqrt{3}}$$

3、直接测量量的合成标准不确定度

A类和B类不确定度的合成标准不确度 $u_c(x)$：

$$u_c(x)=\sqrt{u_A^2(x)+u_B^2(x)}$$

说明

(1) 当进行的测量只有一次时，取 $u_A(x)=0$

(2) 如果一个测量量的B类不确定度由多个部分构成，则B类不确定度的合成不确定度为

$$u_B(x)=\sqrt{u_{B1}^2(x)+u_{B2}^2(x)+\ldots}$$

【例题】用螺旋测微计测某一钢丝的直径，6次测量值 y_i 分别为：0.245，0.255，0.249，0.247，0.253，0.251；单位mm，已知螺旋测微计的仪器误差为$\Delta_{仪}$=0.004mm，请给出测量的合成标准不确定度。

解:测量最佳估计值

$$\bar{y}=\frac{1}{6}(0.245+0.255+0.249+0.247+0.253+0.251)=0.250mm$$

A类标准不确定度 $u_A=s(\bar{y})=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n(n-1)}}=0.0015\text{mm}$

B类标准不确定度 $u_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.004}{\sqrt{3}}=0.0023mm$

合成不确定度 $u_c(y)=\sqrt{u_A{}^2+u_B{}^2}\approx 0.0028\text{mm}$

4、间接测量量的不确定度计算

间接测量量$Y = f(X_1, X_2, \cdots X_N)$，其中 $X_1, X_2, \cdots X_N$ 为直接测量量。

Y的估计值y 的标准不确定度，要由 $X_1, X_2, \cdots X_N$ 的标准不确定度适当合成求得，称为估计值y 的合成标准不确定度，记为$u_c(y)$ 。

(1) 对于形如 $Y = f(X_1, X_2, \cdots X_N) = aX_1 + bX_2 + cX_3 \cdots$ 的函数形式（和差关系），合成标准不确定度的计算方法为:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} u_c(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} u_c(x_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} u_c(x_3)\right)^2 + \ldots}$$

【例题】某实验的测量式为 $Y = 4X_1 + 3X_2$， X_1, X_2 为直接测量量，其中 $u_c(x_1) = 0.03g$，$u_c(x_2) = 0.05g$，则间接测量量的合成标准不确定度为

$$u_c(y) = \sqrt{(4 \times 0.03)^2 + (3 \times 0.05)^2}\, g = 0.19g$$

(2) 对于形如 $Y=f(X_1,X_2,\cdots X_N)=cX_1^{p_1}X_2^{p_2}\cdots X_N^{p_N}$ 的函数形式（积商关系），则先求其相对合成标准不确定度：

$$u_{rel}(y)=\frac{u_c(y)}{\bar{y}}=\sqrt{\left(\frac{p_1}{\bar{x}_1}u_c(x_1)\right)^2+\left(\frac{p_2}{\bar{x}_2}u_c(x_2)\right)^2+\left(\frac{p_3}{\bar{x}_3}u_c(x_3)\right)^2+\ldots}$$

合成标准不确定度 $u_c(y)=\bar{y}\cdot u_{rel}(y)$

说明：对于被测量Y的平均值$\bar{y}$，按如下方式计算：

$$\bar{y}=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots)$$

【例题】圆柱体的体积公式为 $V=\frac{1}{4}\pi d^2 h$。设已经测得 $d=\bar{d}\pm u_c(d)$，$h=\bar{h}\pm u_c(h)$，写出体积的相对合成标准不确定度表达式。

解：此体积公式形如

$$Y=f(X_1,X_2,\cdots X_N)=cX_1^{p_1}X_2^{p_2}\cdots X_N^{p_N}$$

其中 $X_1=d$，$X_2=h$，$p_1=2$，$p_2=1$。

根据 $u_{rel}(y)=\frac{u_c(y)}{\bar{y}}=\sqrt{\left(\frac{p_1}{\bar{x}_1}u_c(x_1)\right)^2+\left(\frac{p_2}{\bar{x}_2}u_c(x_2)\right)^2+\left(\frac{p_3}{\bar{x}_3}u_c(x_3)\right)^2+\ldots}$

体积的相对合成标准不确定度表达式为

$$u_{rel}(V)=\frac{u_c(V)}{\bar{V}}=\sqrt{\left(\frac{2}{\bar{d}}u_c(d)\right)^2+\left(\frac{1}{\bar{h}}u_c(h)\right)^2}$$