专题三 旋转问题

知识与方法

旋转的定义

在平面内，将一个图形绕一个定点按某个方向转动一个角度，这样的图形运动称为旋转.这个定点称为旋转中心，转动的角称为旋转角.

旋转三要素

旋转中心(绕哪转)——定点还是动点?

旋转方向(向哪转)——顺时针还是逆时针?

旋转角度(转多少)——转了多少度?

旋转的性质

经过旋转，图形上的每一点都绕旋转中心沿相同方向转动了相同的角度，任意一组对应点与旋转中心的连线所成的角都等于旋转角，对应点到旋转中心的距离相等，对应线段相等，对应角相等.举例：如图 2-3-1，由旋转得与对应点有关的结论： $\angle AOA' = \angle BOB', OA = OA'$;

与对应线段有关的结论： $AB = A'B'$,对应线段 AB 和 A'B'所在的直线相交所成的角与旋转角相等或互补.

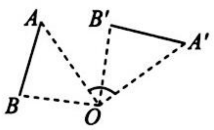


图 2-3-1

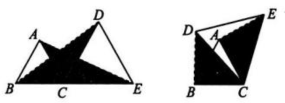
旋转中心可以看作对应点连线的垂直平分线的交点.当出现有一对相邻等线段，可构造旋转全等；相邻线段如不相等，也可构造旋转相似.

一、旋转全等变换

1. 共顶点旋转模型

有两对相邻等线段，直接寻找旋转全等.

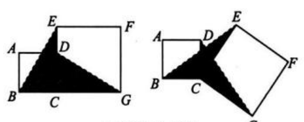
等边三角形共顶点旋转模型



△ACE≌△BCD

图 2-3-2

正方形共顶点旋转模型



△DCG≌△BCE

图 2-3-3

反思与总结

共顶点旋转(即“手拉手”模型)可用于任意共顶点的等腰三角形旋转问题，均能通过旋转构造全等三角形.旋转过程中第三边所成的角是一个经常考查的内容.(由“8 字型”可以证明角度问题)

模型的变形主要用于两个正多边形或等腰三角形夹角的变化，也可是等腰直角三角形与正方形的混用.(其他变形不再展示)

2. 半角模型

等腰直角三角形半角模型

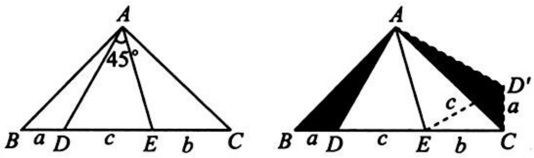


图 2-3-4

正方形半角模型

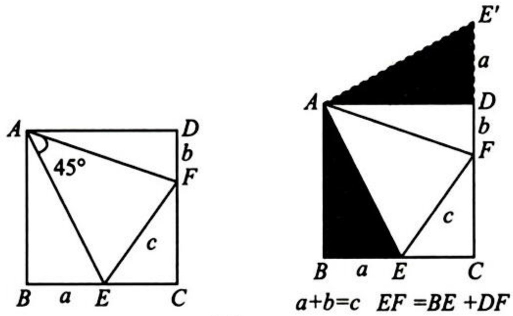


图 2-3-5

正方形形外半角模型

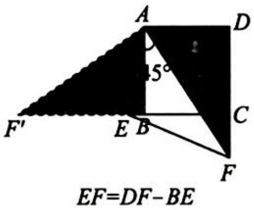


图 2-3-6

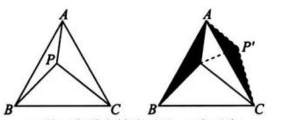
反思与总结

旋转半角的特征是"相邻等线段所成角含一个二分之一角"，通过旋转将另外两个和为二分之一的角拼接在一起，形成旋转全等.

3. 自旋转模型(Y 型模型)

有一对相邻等线段，需要构造旋转全等.

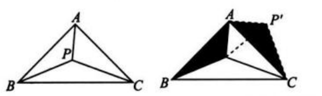
构造方法：遇 60°旋 60°，造等边三角形；遇 90°旋 90°，造等腰直角三角形；遇中点旋 180°，造中心对称；遇等腰旋含腰的三角形，造旋转全等.60°自旋转模型



可将三条线段转移至同一三角形中

图 2-3-7

90°自旋转模型



可将三条线段转移至同一三角形中（AP被放大$\sqrt{2}$倍）

图 2-3-8

中点旋转模型

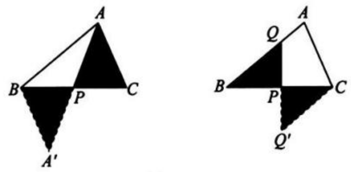


图 2-3-9

等腰旋转模型

图 2-3-10

反思与总结

“旋转出等腰，等腰可旋转”，当图形具有邻边相等这一特征时，可以把图形的某部分绕其邻边的公共顶点旋转到另一位置，将分散的条件集中起来，从而解决问题.

4. 对角互补模型

等腰直角三角形对角互补模型

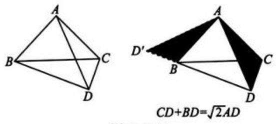


图 2-3-11

等边三角形对角互补模型

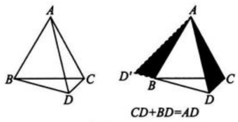


图 2-3-12

邻边相等、对角互补的半角模型

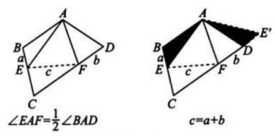
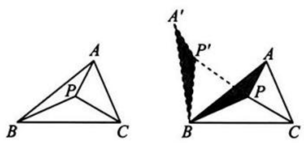


图 2-3-13

5. 费马旋转模型

费马旋转 60°模型



′，PP′，PC 三条线段共线时，$PA+PB+PC$ 最短

图 2-3-14

二、旋转相似变换

1. 共顶点旋转模型

“一转成双”旋转模型

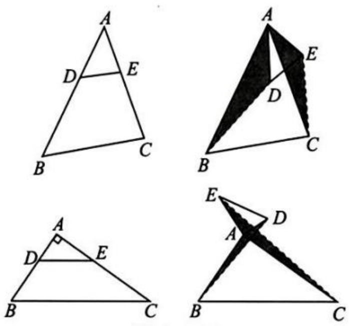


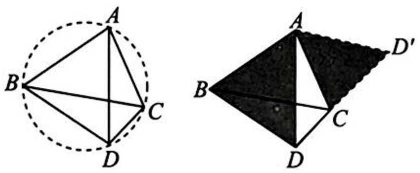
图 2-3-15

反思与总结

任意两个相似三角形旋转形成一定的角度，构成新的旋转相似.第三边所成夹角符合旋转“8 字型”的规律.

2. 对角互补模型

对角互补旋转模型



作出$\angle D'=\angle ADB$,$\triangle ABD \backsim \triangle ACD'$

图 2-3-16

典例精析

例 1 如图 2-3-17,在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle C=90°$,AC=4,D,E 分别是边 AC,AB 的中点，连接 DE.将$\triangle ADE$绕点 A 按逆时针方向旋转.则：(1)在旋转过程中，BE 的最大值为______;

(2)当旋转至 B，D，E 三点共线时，线段 CD 的长为________.

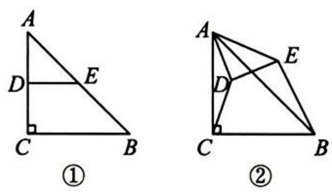


图 2-3-17

答案:(1)6 $\sqrt{2}$ (2)$\sqrt{14}+\sqrt{2}$或 $\sqrt{14}-\sqrt{2}$

【简析】(1)由相似三角形之“一转成双”知：$\triangle ADE \backsim \triangle ACB$,$\triangle ACD \backsim \triangle ABE$.

要求 BE 最大，则求 CD 最大.即可转化为点到圆的距离问题.

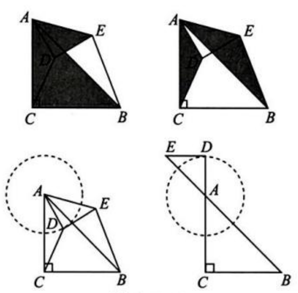


图 2-3-18

则可知 CD 最大为 6，即 BE 的最大值为 6 $\sqrt{2}$

(2)因为 B,D,E 三点共线,∠ADE=90°,所以∠ADB=90°.所以 BD 是⊙A 的切线.即本题分两种情况讨论.求 CD 的长转化为求 BE 的长.

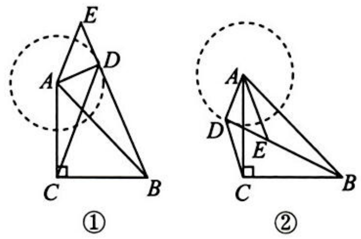


图 2-3-19

不难得出 BE 的长分别为 $2\sqrt{7}+2$和 $2\sqrt{7}-2$,则 CD 分别为 $\sqrt{14}+\sqrt{2}$和 $\sqrt{14}-\sqrt{2}$.

进阶训练

1. 如图 2-3-20①②,在等边三角形 ABC 中,点 D,E 分别在边 AB,AC 上,AD=AE,连接 BE,CD,M,N,P 分别是 BE,CD,BC 的中点.把△ADE 绕点 A 在平面内自由旋转，若 AD=1,AB=3,则△PMN 的周长的最大值为_______.

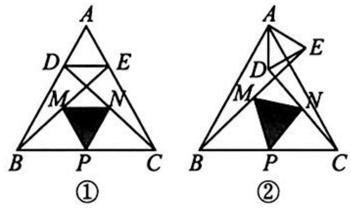


图 2-3-20

2. 如 图 2-3-21, 正方形 ABCD 和正方形 CEFG 边长分别为 a 和 b，正方形 CEFG 绕点 C 旋转，给出下 列结论：①BE=DG;②BE⊥DG;(③$DE^2+BG^2=2a^2+2b^2$，其中正确的结论是_______(填序号).

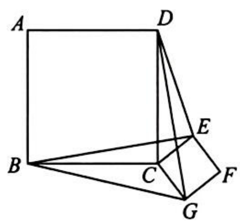


图 2-3-21

典例精析

例 2 如图 2-3-22①,在 Rt△ABC 中,∠ACB=90°,∠B=60°,点 D,E 分别在 BC,AB 上,DE⊥AB,连接 AD,F 是 AD 的中点.

(1)∠CFE 的度数为_______;

(2)如图②，把△BDE 绕点 B 在平面内自由旋转得△BD'E',若 F 是 AD'的中点,BD=2,BC=3，请直接写出△CFE' 周长的最大值.

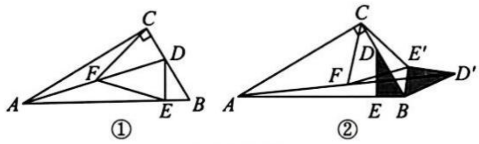


图 2-3-22

答案:(1)60° (2)△CFE'周长的最大值为 12.

【简析】(1)60°

(2)由上问可猜想△CFE'为等边三角形，如猜想成 立，只需 求 出 其 中 一 边 的 最 大 值 即 可 知△CFE'的周长最大值.

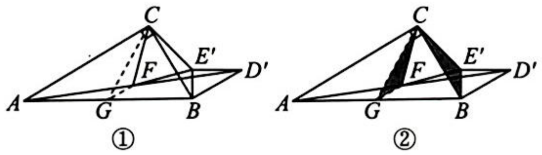


图 2-3-23

取 AB 中点 G,连接 CG,FG,易得:CG=3=CB,FG=1=BE',△GCB 为等边三角形,即∠GCB=60°,易证△CFG≌△CE'B,即 CF=CE',由三角形全等 与 角 度 转 化 不 难 得 出. $\angle FCE'=60°$,即△CFE'为等边三角形.

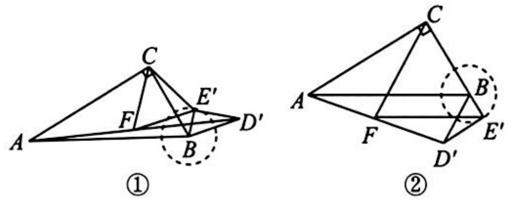


图 2-3-24

即本题求△CFE'周长最大值转化为求 CE'的最大值.再次转化为点到圆的距离问题.

易得，CE'的最大值为 4，则△CFE'的周长最大值为 12.

进阶训练

3. (1)如图2-3-25①,P 是等边三角形ABC 内一点,已知 PA=3,PB=4,PC=5,求∠APB的度数.请补充下列解答过程.

分析：要直接求∠APB 的度数显然很困难，注意到条件中的三条线段长恰好是一组勾股数，因此考虑借助旋转把这三条线段集中到一个三角形内.

解:如图②,作∠PAD=60°,使 AD=AP,连接 PD,CD,则△PAD 是等边三角形.

∴_________ =AD=AP =3,∠ADP =∠PAD=60°.

∵△ABC 是等边三角形，

∴AC=AB,∠BAC=60°.

∴∠BAP=_________.

∴△ABP≌△ACD.

∴BP=CD=4,________=∠ADC.

∵在△PCD 中,PD=3,PC=5,CD=4, $PD^2+CD^2=PC^2$,

∴∠PDC=_________°.

∴∠APB=∠ADC=∠ADP+∠PDC=_____________°.

(2)如图③,在△ABC 中,AB=BC,∠ABC=90°,P 是△ABC 内一点,PA=1,PB=2,PC=3,求∠APB 的度数.

(3)拓展应用:如图④,△ABC 中,∠ABC=30°,AB=4,BC=5,P 是△ABC 内部的任意一点,连接 PA,PB,PC,则 PA+PB+PC 的最小值为________.

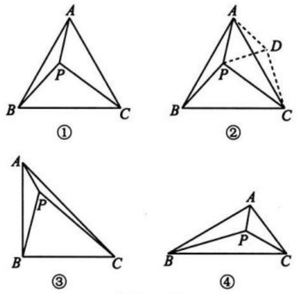


图 2-3-25

4. 如图 2-3-26,在等边三角形 ABC 中,P 为三角形外一点,且 PA=4,PB=5,PC=3,则∠APC=________°.

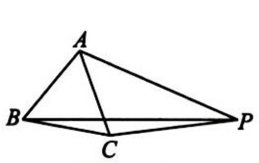


图 2-3-26

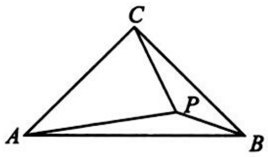


图 2-3-27

5. 如图 2-3-27,在等腰直角三角形 ABC 中,∠ACB=90°,点 P 为三角形内一点,且 PC= $\sqrt{2}$,PB=1,PA= $\sqrt{5}$,则∠BPC=_______°.________

6. 如图 2-3-28, 在直角三角形 ABC 中,∠ACB=90°,∠CAB=30°,P 为三角形内一点，且. $PC=1,PB=\sqrt{3},PA=\sqrt{13}$,则∠BPC=________°.

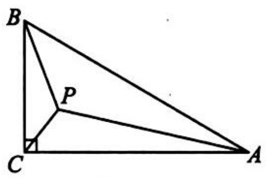


图 2-3-28

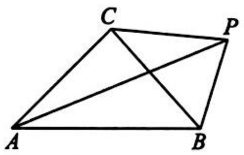


图 2-3-29

7. 如图 2-3-29,在等腰直角三角形 ABC 中,∠ACB=90°,P 为三角形外一点,且 PC= $2\sqrt{2},PB=2,PA=2\sqrt{7}$,,则∠BPC=________.

典例精析

例 3　如图 2-3-30, 已知△ABC 中,AB=1,BC=2,在 AC 右侧构造等边三角形 ACD，连接 BD，则线段 BD 的最大值为________.

答案：3

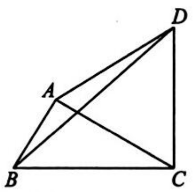


图 2-3-30

【简析】解法一：“主从联动”

分析：如图 2-3-31，将线段 BC 看成固定线段，则线段 BA 可理解为点 A 在以点 B 为圆心，半径为 1 的圆上运动.

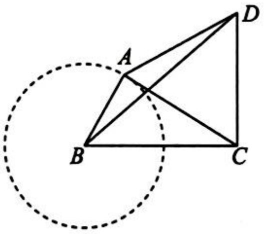


图 2-3-31

如图 2-3-32①,点 D 可看成点 A 绕定点 C 顺时针旋转 60°所得，∵点 A 的轨迹是圆，∴点 D 的轨迹也是圆(可看成圆 B 绕点 C 顺时针旋转 60°所得).

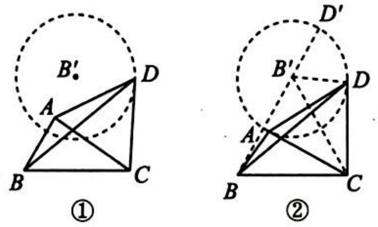


图 2-3-32

那么点 D 所在圆的圆心和半径可以确定吗?

易知，点 B 绕点 C 顺时针旋转 60°即为 D 所在圆的圆心,因为 A 绕 C 旋转到 D 过程中,CA=CD，圆 B'的半径与圆 B 相同，也为 1.则要求最大值，立即转化为求点 B 到圆 B'的最大值，根据“点圆最值”可知，连接 BB'并延长交圆 B'于点 D',则 BD'最长,如图 2-3-32②.

可知 BD 的最大值为 3.

解法二：“旋转变换”(阴影三角形绕点 C 顺时针旋转 60°)

如图 2-3-33,将△BAC 绕点 C 顺时针旋转 60°,

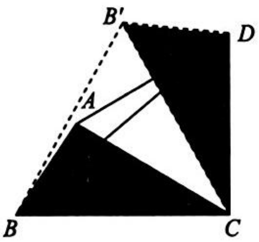


图 2-3-33

可得△B'DC,则 $DB' = BA = 1$, △ BCB'为等边三角形，则 $BB' = BC = 2$,

在△BB'D 中, $BB' = 2, DB' = 1$,

可知 1<BD<3,

当 B,B',D 三点共线时,BD 有最大值,为 3.

同理也可绕点 C 逆时针旋转 60°去求.

解法三：“旋转变换”

如图 2-3-34,将△BAD 绕点 A 顺时针旋转 60°,可得△B'AC,则 BD=B'C,△BAB'为等边三角形 则. $BB' = BA = 1$,

在△BB'C 中,当 B,B',C 三点共线时,B'C 有最大值，为 3.

∴BD 的最大值为 3.

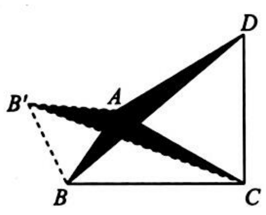


图 2-3-34

进阶训练

8. 如图 2-3-35,已知△ABC 中,AB=1,BC= $\sqrt{2}$，在 AC 右侧构造等腰直角三角形 ACD，其中∠ACD=90°,AC=CD,连接 BD,则线段 BD 的最大值为______.

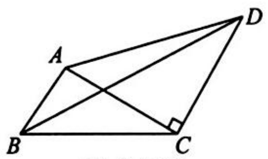


图 2-3-35

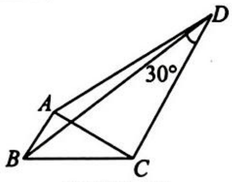


图 2-3-36

9. 如图 2-3-36,已知△ABC 中,AB=1,BC= $\sqrt{3}$,在 AC 右侧构造含 30°角的直角三角形 ACD,其中∠ACD=90°,∠ADC=30°,连接 BD,则线段 BD 的最大值为________.

10. 如图 2-3-37,已知△ABC 中, $AB=\sqrt{2},\ BC=2\sqrt{2},$，在 AC 右侧构造如图所示的等腰直角三角形 ACD,连接 BD,则线段 BD 的最大值为_______.

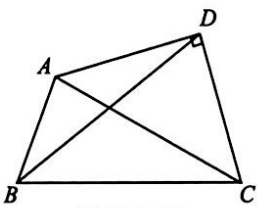


图 2-3-37

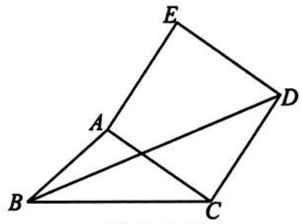


图 2-3-38

11. 如图 2-3-38,已知△ABC 中,AB=1,BC= $\sqrt{2}$,在 AC 右侧构造如图所示的正方形 ACDE ,连接 BD ,则线段 BD 的最大值为______.

12. 如图 2-3-39,已知等边三角形 ABC,点 D 在△ABC 外,且 DA=3,DB=5,DC=4,则∠ADC 的度数为_______.

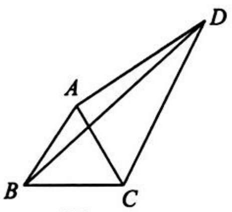


图 2-3-39

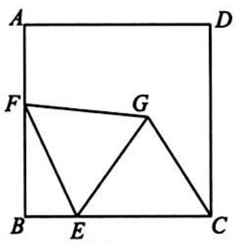


图 2-3-40

13. 如图 2-3-40,正方形 ABCD 的边长为 4,E 为 BC 上一点,且 BE=1,F 为 AB 边上的一个动点 ,连接 EF ,以 EF

为边向右侧作等边三角形 EFG,连接 CG,则 CG 的最小值为________

综合训练

1. 如 图 2-3-41, 在 正 方 形 ABCD 中,点 E,F 分别在边 BC,CD 上,且∠EAF=45°,AE 交 BD 于 M 点,AF 交 BD 于 N 点.

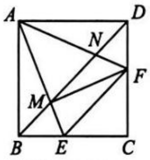


图 2-3-41

(1)若正方形的边长为 2，则△CEF 的周长是________

(2)下列结论:(①$BM^2+DN^2=MN^2$;;②若 F 是 CD 的中点,则 tan∠AEF =2;③连接 MF ,则△AMF 为等腰直角三角形.其中正确结论的序号是_______(把你认为所有正确的都填上).

2. 如图 2-3-42,在正方形 ABCD 中,E 是 AB 上一点,F 是 AD 延长线上一点,且 DF=BE.

(1)求证:CE=CF.

(2)图①中,若 G 在 AD 上,且∠GCE=45°,则 GE=BE+GD 成立吗? 为什么?

(3)运用(1)(2)解答中所积累的经验和知识，完成下题：如图②，在直角梯形 ABCD 中，AD∥BC(BC>AD),∠B=90°,AB=BC=6,E 是 AB 上一点,且∠DCE=45°,BE=2,求 DE 的长.

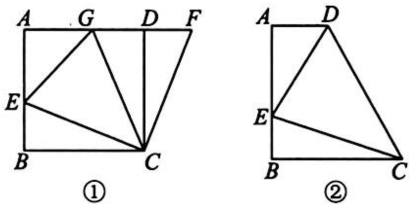


图 2-3-42

3. 定义:如图 2-3-43①,点 M,N 把线段 AB 分割成 AM,MN 和 BN,若以 AM,MN,BN 为边的三角形是一个直角三角形，则称点 M，N 是线段 AB 的勾股分割点.

(1)如图②,已知点 C,D 是线段 AB 的勾股分割点,若 AC=3,DB=4,求 CD 的长.

(2)如图③,正方形 ABCD 中,点 M 在 BC 上(不与 B,C 重合),点 N 在 CD 上(不与 C,D 重合),且∠MAN=45°,AM,AN 分别交 BD 于 E,F.

①求证：E，F 是线段 BD 的勾股分割点；②求 $\frac{AN}{AE}$的值.

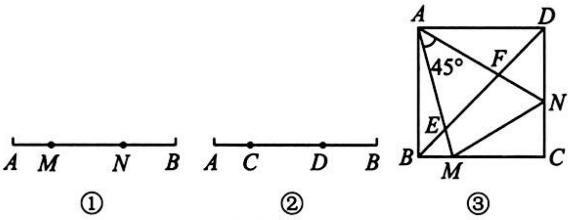


图 2-3-43

4. 如图 2-3-44①,在 Rt△ABC 中,∠BAC=90°,AB=AC,D 为△ABC 内一点,将线段AD 绕点 A 逆时针旋转 90°得到 AE,连接 CE,BD 的延长线与 CE 交于点 F.

(1)求证:BD=CE,BD⊥CE;

(2)如图②,连接 AF,DC,已知∠BDC=135°，判断 AF 与 DC 的位置关系，并说明理由.

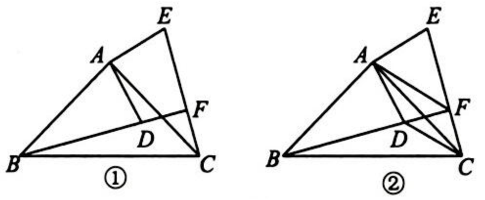


图 2-3-44

5. 如图 2-3-45,在等边三角形 ABC 中,点 E 是边 AC 上一定点，点 D 是直线 BC 上一动点，以 DE 为一边作等边三角形 DEF，连接 CF.

【问题解决】

如图①,若点 D 在边 BC 上,求证:CE+CF=CD.

【类比探究】

如图②，若点 D 在边 BC 的延长线上，请探究线段 CE，CF 与 CD 之间存在怎样的数量关系? 并说明理由.

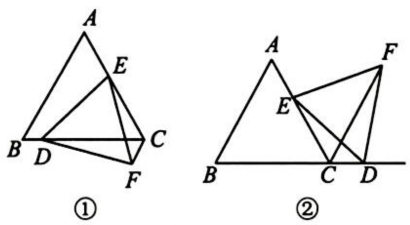


图 2-3-45

6. 旋转是一种重要的图形变换，当图形中有一组邻边相等时往往可以通过旋转解决问题.

(1)尝试解决：如图 2-3-46①，在等腰直角三角形 ABC 中,∠BAC=90°,AB=AC,M 是 BC 上的一点,BM= 1 cm,CM=2 cm,将△ABM 绕点 A 旋转后得到△ACN,连接 MN,则 AM=______ cm.

(2)类比探究:如图②，在“筝形”四边形 ABCD 中,AB=AD=a,CB=CD,AB⊥BC 于点 B,AD⊥CD 于点 D,P,Q 分别是 AB,AD 上的点,且∠PCB+∠QCD=∠PCQ,求△APQ 的周长(结果用 a 表示).

(3)拓展应用:如图③,已知四边形 ABCD,AD=CD,∠ADC=60°,∠ABC=75°,AB=2 $\sqrt{2}$,BC=2,求四边形 ABCD 的面积.

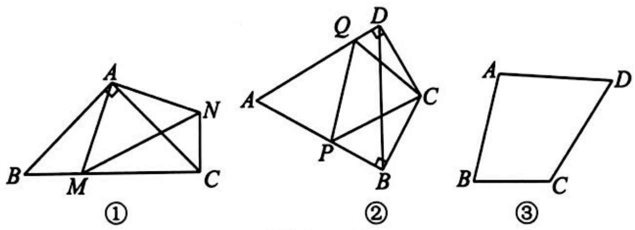


图 2-3-46

7. 已知等边三角形 ABC，过 A 点作 AC 的垂线 l，点 P 为 l 上一动点(不与点 A 重合)，连接 CP,把线段 CP 绕点 C 逆时针方向旋转 60°得到 CQ,连接 QB.

(1)如图 2-3-47①,直接写出线段 AP 与 BQ 的数量关系；

(2)如图②,当点 P,B 在 AC 同侧且 AP =AC 时，求证：直线 PB 垂直平分线段 CQ；

(3)如图③ ,若等边三角形 ABC 的边长为 4 ,点 P,B 分别位于直线 AC 异侧,且△APQ 的面积等于 $\frac{\sqrt{3}}{4}$,求线段 AP 的长度.

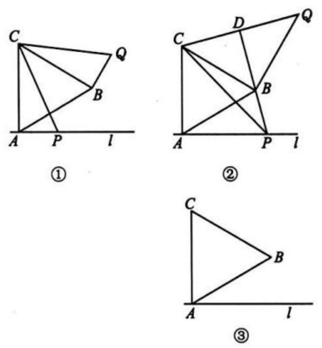


图 2-3-47

8. (1)【操作发现】

如图 2-3-48①,将△ABC 绕点 A 顺时针旋转 60°得到△ADE,连接 BD,则∠ABD=_______度.

(2)【类比探究】

如图②，在等边三角形 ABC 内任取一点 P，连接 PA,PB,PC,求证:以 PA,PB,PC 的长为三边必能组成三角形.

(3)【解决问题】

如图③，在边长为 $\sqrt{7}$的等边三角形 ABC 内有一点 P,$\angle APC = 90°$,$\angle BPC = 120°$,求△APC 的面积.

(4)【拓展应用】

如图④是 A，B，C 三个村子位置的平面图，经测量 AC=4,BC=5,$\angle ACB = 30°$, P 为△ABC 内的一个动点,连接 PA,PB,PC,求 PA+PB+PC 的最小值.

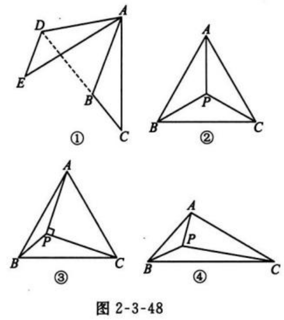


图 2-3-48

9. 如图 2-3-49①,在 Rt△ABC 中,∠BAC=90°,AB=AC,D 是 BC 边上一动点,连接 AD,把 AD 绕点 A 逆时针旋转 90°,得到 AE,连接 CE,DE. F 是 DE 的中点,连接 CF.

(1)求证: $CF=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$.

(2)如图②所示，在点 D 运动的过程中，当 BD=2CD 时,分别延长 CF,BA,相交于点 G，猜想 AG 与 BC 存在的数量关系，并证明你猜想的结论.

(3)在点 D 运动的过程中，在线段 AD 上存在一点 P,使 PA+PB+PC 的值最小.当 PA+PB+PC 的值取得最小值时，AP 的长为 m，请直接用含 m 的式子表示 CE 的长.

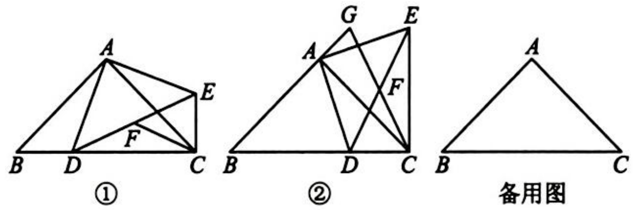


图 2-3-49

答案