专题三　导数

栏目导航

命题观察·高考定位

(对应学生用书第 9 页)

1．(2017·江苏高考)已知函数 $f(x)=x^3-2x+e^x-\dfrac{1}{e^x}$，其中 e 是自然对数的底数．若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围是________．

$\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ [因为 $f(-x)=(-x)^3-2(-x)+e^{-x}-\dfrac{1}{e^{-x}}$

$=-x^3+2x-e^x+\dfrac{1}{e^x}=-f(x)$，

所以 $f(x)=x^3-2x+e^x-\dfrac{1}{e^x}$ 是奇函数．

因为$f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，

所以$f(2a^2)\leqslant -f(a-1)$，即$f(2a^2)\leqslant f(1-a)$.

因为$f'(x)=3x^2-2+e^x+e^{-x}\geqslant 3x^2-2+2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=3x^2\geqslant 0$，

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，

所以$2a^2\leqslant 1-a$，即$2a^2+a-1\leqslant 0$，

所以$-1\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$.]

2．(2014·江苏高考)本在平面直角坐标系 xOy 中，若曲线 $y=ax^2+\frac{b}{x}$(a，b 为常数)过点 $P(2，-5)$，且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行，则 $a+b$ 的值是________.

-3　[$y=ax^2+\frac{b}{x}$的导数为 $y'=2ax-\frac{b}{x^2}$，

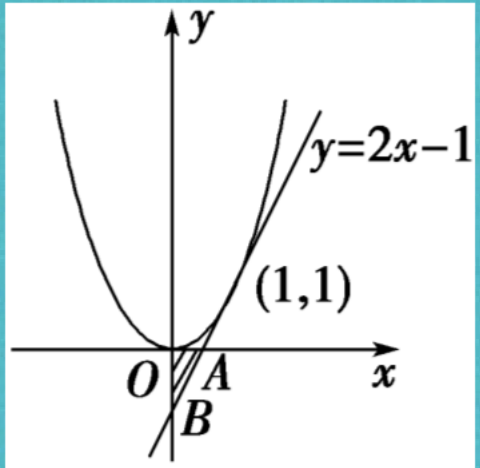
直线 $7x+2y+3=0$ 的斜率为 $-\frac{7}{2}$.

由题意得$\begin{cases}4a+\frac{b}{2}=-5,\\4a-\frac{b}{4}=-\frac{7}{2},\end{cases}$　解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\end{cases}$　则 $a+b=-3$.]

3．(2013·江苏高考)抛物线 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形区域为 D(包含三角形内部与边界)．若点 $P(x，y)$是区域 D 内的任意一点，则 $x+2y$ 的取值范围是________.

$\left[-2，\frac{1}{2}\right]$ [由于 $y'=2x$，所以抛物线在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$.

画出可行域(如图)．设 $x+2y=z$，则 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，可知当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 经过点 $A\left(\frac{1}{2}，0\right)$，$B(0，-1)$时，$z$ 分别取到最大值和最小值，此时最大值 $z_{\max}=\frac{1}{2}$，最小值 $z_{\min}=-2$，故取值范围是$\left[-2，\frac{1}{2}\right]$.]



4．(2015·江苏高考)已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b(a，b\in\mathbf{R})$.

(1)试讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $b=c-a$(实数 c 是与 a 无关的常数)，当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时，a 的取值范围恰好是 $(-\infty，-3)\cup\left(1，\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}，+\infty\right)$，求 c 的值.

【导学号：56394014】

[解]　(1)$f'(x)=3x^2+2ax$，令 $f'(x)=0$，

解得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{2a}{3}$.

当 $a=0$ 时，因为 $f'(x)=3x^2\geq 0$，所以函数 $f(x)$

在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；

当 $a>0$ 时，$x\in\left(-\infty,-\frac{2a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$x\in\left(-\frac{2a}{3},0\right)$时，$f'(x)$

<0，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\frac{2a}{3}\right)$，$(0,\ +\infty)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{2a}{3},\ 0\right)$ 上单调递减；

当 $a<0$ 时，$x\in(-\infty,\ 0)\cup\left(-\frac{2a}{3},\ +\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in\left(0,\ -\frac{2a}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$，$\left(-\frac{2a}{3},\ +\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\ -\frac{2a}{3}\right)$ 上单调递减.

(2)由(1)知，函数 $f(x)$ 的两个极值为 $f(0)=b$，

$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3+b$，则函数 $f(x)$ 有三个零点等价于 $f(0)\cdot f\left(-\frac{2a}{3}\right)=b\left(\frac{4}{27}a^3+b\right)<0$，

从而 $\begin{cases} a>0, \\ -\frac{4}{27}a^3<b<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0, \\ 0<b<-\frac{4}{27}a^3. \end{cases}$

又 $b=c-a$，所以当 $a>0$ 时，$\frac{4}{27}a^3-a+c>0$ 或当 $a<0$ 时，$\frac{4}{27}a^3-a+c<0$.

设 $g(a)=\frac{4}{27}a^3-a+c$，因为函数 $f(x)$ 有三个零点时，a 的取值范围恰好是 $(-\infty,-3)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$，则在 $(-\infty,-3)$ 上 $g(a)<0$，且在 $\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上 $g(a)>0$ 均恒成立，

从而 $g(-3)=c-1\leqslant 0$，且 $g\left(\frac{3}{2}\right)=c-1\geqslant 0$，因此 $c=1$.

此时，$f(x)=x^3+ax^2+1-a=(x+1)[x^2+(a-1)x+1-a]$.

因为函数有三个零点，则 $x^2+(a-1)x+1-a=0$ 有两个异于 -1 的不等实根，

所以 $\Delta=(a-1)^2-4(1-a)=a^2+2a-3>0$，且 $(-1)^2-(a-1)+1-a\neq0$，

解得 $a\in(-\infty,\ -3)\cup\left(1,\ \frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$.

综上 $c=1$.

5．(2016·江苏高考)已知函数 $f(x)=a^x+b^x(a>0，b>0，a\neq 1，b\neq 1)$.

(1)设 $a=2，b=\frac{1}{2}$.

①求方程 $f(x)=2$ 的根；

②若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(2x)\geq mf(x)-6$ 恒成立，求实数 m 的最大值.

(2)若 $0<a<1，b>1$，函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点，求 ab 的值.

[解]　(1)因为 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=2^x+2^{-x}$.

①方程 $f(x)=2$，即 $2^x+2^{-x}=2$，亦即 $(2^x)^2-2\times2^x+1=0$，所以 $(2^x-1)^2=0$，于是 $2^x=1$，解得 $x=0$.

②由条件知 $f(2x)=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2=(f(x))^2-2$.

因为 $f(2x)\geqslant mf(x)-6$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，且 $f(x)>0$，

所以 $m\leqslant\frac{(f(x))^2+4}{f(x)}$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

而 $\frac{(f(x))^2+4}{f(x)}=f(x)+\frac{4}{f(x)}\geqslant2\sqrt{f(x)\cdot\frac{4}{f(x)}}=4$，且 $\frac{(f(0))^2+4}{f(0)}=4$，

所以 $m\leqslant4$，故实数 m 的最大值为 4.

(2)因为函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点，而 $g(0)=f(0)-2=a^0+b^0-2=0$，

所以 0 是函数 $g(x)$的唯一零点.

因为 $g'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b$，又由 $0<a<1$，$b>1$ 知 $\ln a<0$，$\ln b>0$，

所以 $g'(x)=0$ 有唯一解 $x_0=\log_{\frac{b}{a}}\left(-\dfrac{\ln a}{\ln b}\right)$.

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=(a^x\ln a+b^x\ln b)'=a^x(\ln a)^2+b^x(\ln b)^2$，

从而对任意 $x\in\mathbf{R}$，$h'(x)>0$，所以 $g'(x)=h(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的单调增函数.

于是当 $x\in(-\infty,x_0)$时，$g'(x)<g'(x_0)=0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)>g'(x_0)=0$.

因而函数 $g(x)$ 在 $(-\infty，x_0)$ 上是单调减函数，在 $(x_0，+\infty)$ 上是单调增函数.

下证 $x_0=0$.

若 $x_0<0$ 则 $x_0<\frac{x_0}{2}<0$，于是 $g\left(\frac{x_0}{2}\right)<g(0)=0$.

又 $g(\log_a 2)=a\log_a 2+b\log_a 2-2>a\log_a 2-2=0$，且函数 $g(x)$ 在以 $\frac{x_0}{2}$ 和 $\log_a 2$ 为端点的闭区间上的图象不间断，所以在 $\frac{x_0}{2}$ 和 $\log_a 2$ 之间存在 $g(x)$ 的零点，记为 x_1.因为 $0<a<1$，

所以 $\log_a 2<0$.

又$\frac{x_0}{2}<0$，所以$x_1<0$，与“0是函数$g(x)$的唯一零点”矛盾.

若$x_0>0$，同理可得，在$\frac{x_0}{2}$和$\log_a 2$之间存在$g(x)$的非0的零点，与“0是函数$g(x)$的唯一零点”矛盾.

因此，$x_0=0$.

于是$-\frac{\ln a}{\ln b}=1$，故$\ln a+\ln b=0$，

所以$ab=1$.

[命题规律]

(1)在小题中以考查导数的几何意义为主(求切线方程).

(2)在大题中以导数为工具研究讨论函数的性质、不等式求解等综合问题.

主干整合·归纳拓展

(对应学生用书第 9 页)

[第 1 步 | 核心知识再整合]

1．导数的几何意义

(1)函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数就是曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0，f(x_0))$处的切线的斜率，则 $k=f'(x_0)$.

(2)函数 $y=f(x)$在点 $P(x_0，f(x_0))$处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

(3)在关于函数图象的切线问题中，如果涉及确定参数值的问题，首先设切点，然后注意三个条件的使用，其一切点在切线上，其二切点在曲线上，其三切线斜率 $k=f'(x_0)$.

2．导数与单调性的关系

(1)若函数在某个区间 D 可导，$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$在区间 D 内单调递增；$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$在区间 D 内单调递减.

(2) 若函数在某个区间 D 可导，$f(x)$在区间 D 内单调递增$\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$；$f(x)$在区间 D 内单调递减$\Rightarrow f'(x)\leqslant 0$.

3．导数和函数极值、最值的关系

(1)求极值的步骤：

①先求$f'(x)=0$的根x_0(定义域内的或者定义域端点的根舍去)；

②分析x_0两侧导数$f'(x)$的符号：若左侧导数负右侧导数正，则x_0为极小值点；若左侧导数正右侧导数负，则x_0为极大值点.

(2)对于可导函数，导数为0是点为极值点的必要而不充分条件.

(3)设函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，则 $y=f(x)$在$[a, b]$上必有最大值和最小值且在极值点或端点取得，所以只需比较极值点和端点函数值即得到函数的最值.

(4)求函数的单调区间、极值、最值是统一的，极值是函数的拐点，也是单调区间的划分点，而求函数的最值是在求极值的基础上，通过判断函数的大致图象，从而得到最值，大前提是要考虑函数的定义域.