2023年高考数学模拟试卷

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0．5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用2B铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用05毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设x，y满足约束条件$\begin{cases}3x-4y+10\geq 0\\ x+6y-4\geq 0\\ 2x+y-8\leq 0\end{cases}$，则$z=x+2y$的最大值是（　　）

A．4　　B．6　　C．8　　D．10

2．某高中高三（1）班为了冲刺高考，营造良好的学习氛围，向班内同学征集书法作品贴在班内墙壁上，小王，小董，小李各写了一幅书法作品，分别是："入班即静"，"天道酬勤"，"细节决定成败"，为了弄清"天道酬勤"这一作品是谁写的，班主任对三人进行了问话，得到回复如下：

小王说："入班即静"是我写的；

小董说："天道酬勤"不是小王写的，就是我写的；

小李说："细节决定成败"不是我写的．

若三人的说法有且仅有一人是正确的，则"入班即静"的书写者是（　　）

A．小王或小李　　B．小王　　C．小董　　D．小李

3．已知ΔABC中内角A,B,C所对应的边依次为a,b,c，若$2a=b+1,c=\sqrt{7},C=\dfrac{\pi}{3}$，则$\Delta ABC$的面积为（　　）

A．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

4．已知函数$f\left(x\right)=e^{\frac{x}{2}-1}$，$g\left(x\right)=\ln\dfrac{x}{2}+1$，若$f\left(m\right)=g\left(n\right)$成立，则$n-m$的最小值为（　　）

A．0　　B．4　　C．$3e-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{5+\ln 6}{2}$

5．已知等边**Δ*ABC***内接于圆τ：$x^2+y^2=1$，且P是圆τ上一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最大值是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

6．已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足$|\vec{b}|=2,|\vec{a}+\vec{b}|=1,\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$且$\lambda+2\mu=1$，若对每一个确定的向量$\vec{a}$，记$|\vec{c}|$的最小值为$m$，则当$\vec{a}$变化时，$m$的最大值为（　　）

A． $\frac{1}{4}$　　　　B． $\frac{1}{3}$　　　　C． $\frac{1}{2}$　　　　D．1

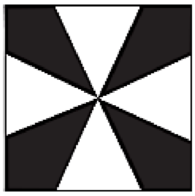
7．若函数 $f(x)=x^3+ax^2+3x-9$ 在 $x=-3$ 时取得极值，则 $a=$（　　）

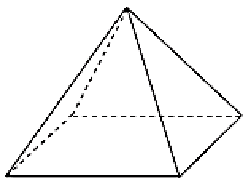
A． 2　　　　B． 3　　　　C． 4　　　　D． 5

8．已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} x\ge y, \\ x+y-1\le 0, \\ y\ge -1, \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为（　　）

A．2　　　　B． $\frac{3}{2}$　　　　C．1　　　　D．0

9．将一块边长为 $a\text{cm}$ 的正方形薄铁皮按如图（1）所示的阴影部分裁下，然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥形容器，将该容器按如图（2）放置，若其正视图为等腰直角三角形，且该容器的容积为 $72\sqrt{2}\text{cm}^3$，则 a 的值为（　　）


（1）


（2）

A．6　　　　B．8　　　　C．10　　　　D．12

10．已知 ***a***>0，***b***>0，***a***+***b*** =1，若 $\alpha=a+\frac{1}{a}$，$\beta=b+\frac{1}{b}$，则 $\alpha+\beta$ 的最小值是（　　）

A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

11．若复数 $z=1+\frac{2i}{1+i}$（i 为虚数单位），则 z 的共轭复数的模为（　　）

A． $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　　B．4　　　　C．2　　　　D． $\sqrt{5}$

12．设递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 ***n*** 项和为 S_n，已知 $S_4=\frac{40}{3}$，$3a_4-10a_3+3a_2=0$，则 $a_4=$（　　）

A．9　　　　B．27　　　　C．81　　　　D． $\frac{8}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．根据如图所示的伪代码，输出 I 的值为______.

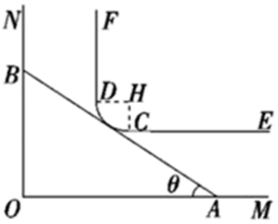
```
S←1
I←1
While S≤9
  S←S+I
  I←I+2
End While
Print  I
```

14．已知矩形 ABCD，AB= 4 ，BC =3，以 A, B 为焦点，且 过 C, D 两点的双曲线的离心率为____________.

15．根据如图所示的伪代码，若输入的 x 的值为 **2**，则输出的 y 的值为____________.

```
Read x
 If  x > 2  then
     y ← 3x − 4
   Else
     y ← 2^(x−2)
End If
  Print y
```

16．如图，某市一学校 H 位于该市火车站 O 北偏东 $45°$ 方向，且 $OH=4\sqrt{2}km$，已知 OM, ON 是经过火车站 O 的两条互相垂直的笔直公路，***CE,DF*** 及圆弧 CD 都是学校道路，其中 $CE//OM$， $DF//ON$，以学校 H 为圆心，半径为 $2km$ 的四分之一圆弧分别与 CE, DF 相切于点 C, D .当地政府欲投资开发 $\triangle AOB$ 区域发展经济，其中 A,B 分别在公路 OM, ON 上，且 AB 与圆弧 CD 相切，设 $\angle OAB=\theta$，$\triangle AOB$ 的面积为 Skm^2 .



（1）求 S 关于 θ 的函数解析式；

（2）当 θ 为何值时，$\triangle AOB$ 面积 S 为最小，政府投资最低？

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在 $\triangle ABC$ 中，***a***，***b***，***c*** 分别是角 ***A***，***B***，***C*** 的对边，并且 $b^2+c^2-a^2=bc$.

（1）已知_______________，计算 $\triangle ABC$ 的面积；

请①$a=\sqrt{7}$，②$b=2$，③$\sin C=2\sin B$ 这三个条件中任选两个，将问题（1）补充完整，并作答.注意，只需选择其中的一种情况作答即可，如果选择多种情况作答，以第一种情况的解答计分.

（2）求 $\cos B+\cos C$ 的最大值.

18．（12 分）某大型公司为了切实保障员工的健康安全，贯彻好卫生防疫工作的相关要求，决定在全公司范围内举行一次 NCP 普查，为此需要抽验 **1000** 人的血样进行化验，由于人数较多，检疫部门制定了下列两种可供选择的方案.方案①：将每个人的血分别化验，这时需要验 **1000** 次.方案②：按 k 个人一组进行随机分组，把从每组 k 个人抽来的血混合在一起进行检验，如果每个人的血均为阴性，则验出的结果呈阴性，这 k 个人的血只需检验一次（这时认为每个人的血化验 $\frac{1}{k}$ 次）；否则，若呈阳性，则需对这 k 个人的血样再分别进行一次化验，这样，该组 k 个人的血总共需要化验 $k+1$ 次.假设此次普查中每个人的血样化验呈阳性的概率为 p，且这些人之间的试验反应相互独立.

（1）设方案②中，某组 k 个人的每个人的血化验次数为 X，求 X 的分布列；

（2）设 $p=0.1$，试比较方案②中，分别取 2，3，4 时，各需化验的平均总次数；并指出在这三种分组情况下，相比方案①，化验次数最多可以平均减少多少次？（最后结果四舍五入保留整数）

19．（12 分）某商场以分期付款方式销售某种商品，根据以往资料统计，顾客购买该商品选择分期付款的期数 X 的分布列为：

X	2	3	4
P	0.4	a	b

其中 $0<a<1$，$0<b<1$

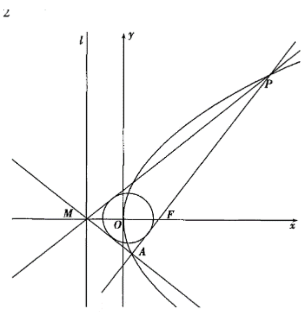
（Ⅰ）求购买该商品的 3 位顾客中，恰有 2 位选择分 2 期付款的概率；

（Ⅱ）商场销售一件该商品，若顾客选择分 2 期付款，则商场获得利润 l00 元，若顾客选择分 3 期付款，则商场获得利润 150 元，若顾客选择分 4 期付款，则商场获得利润 200 元.商场销售两件该商品所获的利润记为 Y（单位：元）

（ⅰ）求 Y 的分布列；

（ⅱ）若 $P\left(Y\le 300\right)\ge 0.8$，求 Y 的数学期望 $E\left(Y\right)$ 的最大值.

20．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，准线 l 与 x 轴交于点 M，点 P 在抛物线上，直线 PF 与抛物线 C 交于另一点 A.

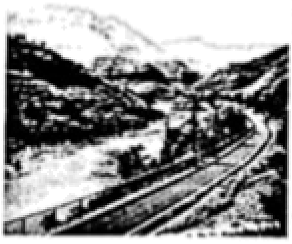


（1）设直线 MP，MA 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：k_1+k_2 常数；

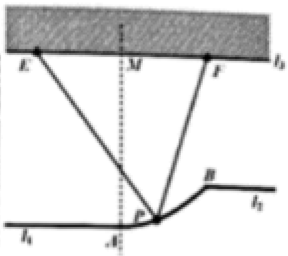
（2）①设 ΔPMA 的内切圆圆心为 $G(a,b)$ 的半径为 r，试用 r 表示点 G 的横坐标 a；

②当 ΔPMA 的内切圆的面积为 $\dfrac{1}{2}\pi$ 时，求直线 PA 的方程.

21．（12 分）某地为改善旅游环境进行景点改造．如图，将两条平行观光道 l_1 和 l_2 通过一段抛物线形状的栈道 **AB** 连通（道路不计宽度），l_1 和 l_2 所在直线的距离为 0.5（百米），对岸堤岸线 l_3 平行于观光道且与 l_2 相距 1.5（百米）（其中 **A** 为抛物线的顶点，抛物线的对称轴垂直于 l_3，且交 l_3 于 **M**），在堤岸线 l_3 上的 **E**，**F** 两处建造建筑物，其中 **E**，**F** 到 **M** 的距离为 1（百米），且 **F** 恰在 **B** 的正对岸（即 $BF\perp l_3$）.



图①



图②

（1）在图②中建立适当的平面直角坐标系，并求栈道 AB 的方程；

（2）游客（视为点 P）在栈道 AB 的何处时，观测 EF 的视角($\angle EPF$)最大？请在（1）的坐标系中，写出观测点 P 的坐标.

22.（10 分）已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(a-b-1)x+b+1(a,b\in R)$.

（1）若 $a=0$，试讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $0<a<2,b=1$，实数 x_1,x_2 为方程 $f(x)=m-ax^2$ 的两不等实根，求证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>4-2a$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

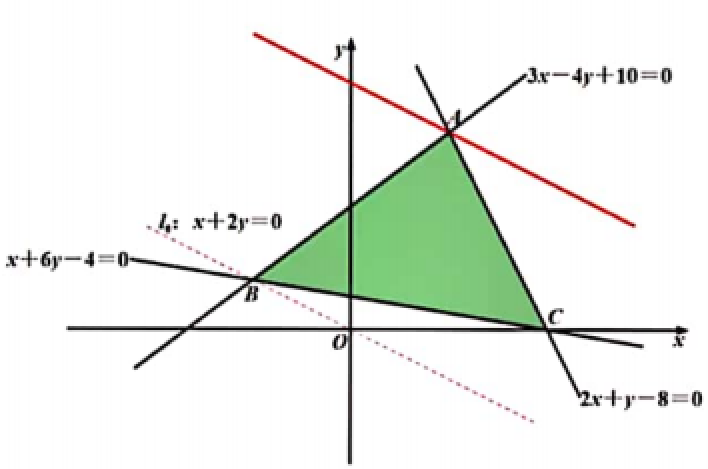
1、D

【解析】

作出不等式对应的平面区域，由目标函数的几何意义，通过平移即可求 z 的最大值.

【详解】

作出不等式组的可行域，如图阴影部分，作直线 l_0：$x+2y=0$ 在可行域内平移当过点 A 时，$z=x+2y$ 取得最大值.



由$\begin{cases}3x-4y+10\ge 0\\ 2x+y-8\le 0\end{cases}$得：$A(2,4)$，$\therefore z_{\max}=10$

故选：**D**

【点睛】

本题主要考查线性规划的应用，利用数形结合是解决线性规划题目的常用方法，属于基础题.

2、**D**

【解析】

根据题意，分别假设一个正确，推理出与假设不矛盾，即可得出结论.

【详解】

解：由题意知，若只有小王的说法正确，则小王对应“入班即静”，

而否定小董说法后得出：小王对应“天道酬勤”，则矛盾；

若只有小董的说法正确，则小董对应“天道酬勤”，

否定小李的说法后得出：小李对应“细节决定成败”，

所以剩下小王对应“入班即静”，但与小王的错误的说法矛盾；

若小李的说法正确，则“细节决定成败”不是小李的，

则否定小董的说法得出：小王对应“天道酬勤”，

所以得出“细节决定成败”是小董的，剩下“入班即静”是小李的，符合题意.

所以“入班即静”的书写者是：小李.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查推理证明的实际应用.

3、**A**

【解析】

由余弦定理可得 $a^2+b^2-ab=7$，结合 $2a=b+1$ 可得 **a**，**b**，再利用面积公式计算即可.

【详解】

由余弦定理，得 $7=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$，由 $\begin{cases}7=a^2+b^2-ab\\2a=b+1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$，

所以，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

故选：**A.**

【点睛】

本题考查利用余弦定理解三角形，考查学生的基本计算能力，是一道容易题.

4、**A**

【解析】

令 $f\left(m\right)=g\left(n\right)=t$，进而求得 $n-m=2e^{t-1}-2\ln t-2$，再转化为函数的最值问题即可求解.

【详解】

$\because f\left(m\right)=g\left(n\right)=t \therefore e^{\frac{m}{2}-1}=\ln\dfrac{n}{2}+1=t$（$t>0$），$\therefore n-m=2e^{t-1}-2\ln t-2$，

令：$h\left(t\right)=2e^{t-1}-2\ln t-2$，$h'\left(t\right)=2e^{t-1}-\dfrac{2}{t}$，$h'\left(t\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上增，

且 $h'\left(1\right)=0$，所以 $h\left(t\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上增，

所以 $h\left(t\right)_{\min}=h\left(1\right)=2-2=0$，所以 $n-m$ 的最小值为 **0.**故选：**A**

【点睛】

本题主要考查了导数在研究函数最值中的应用，考查了转化的数学思想，恰当的用一个未知数来表示 n 和 m 是本题的关键，属于中档题.

5、**D**

【解析】

如图所示建立直角坐标系，设 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=1-\cos\theta$，计算得到答案.

【详解】

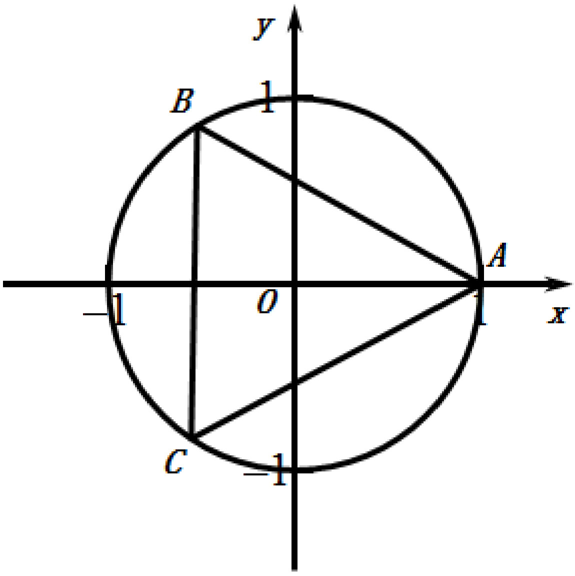
如图所示建立直角坐标系，则 $A(1,0)$，$B\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=(1-\cos\theta,-\sin\theta)\cdot(-1-2\cos\theta,-2\sin\theta)$

$=(1-\cos\theta)(-1-2\cos\theta)+2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-\cos\theta-1+2\sin^2\theta=1-\cos\theta\le 2$.

当 $\theta=-\pi$，即 $P(-1,0)$ 时等号成立.

故选：D.



【点睛】

本题考查了向量的计算，建立直角坐标系利用坐标计算是解题的关键.

6、**B**

【解析】

根据题意,建立平面直角坐标系.令 $\overrightarrow{OP}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. E 为 OB 中点.由 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$ 即可求得 P 点的轨迹方程.将 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 变形,结合 $\lambda+2\mu=1$ 及平面向量基本定理可知 P,C,E 三点共线.由圆切线的性质可知 $|\vec{c}|$ 的最小值 m 即为 O 到直线 PE 的距离最小值,且当 PE 与圆 M 相切时,m 有最大值.利用圆的切线性质及点到直线距离公式即可求得直线方程,进而求得原点到直线的距离,即为 m 的最大值.

【详解】

根据题意,$|\vec{b}|=2$, 设 $\overrightarrow{OP}=\vec{a}=(x,y),\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(2,0),\overrightarrow{OC}=\vec{c},E(1,0)$

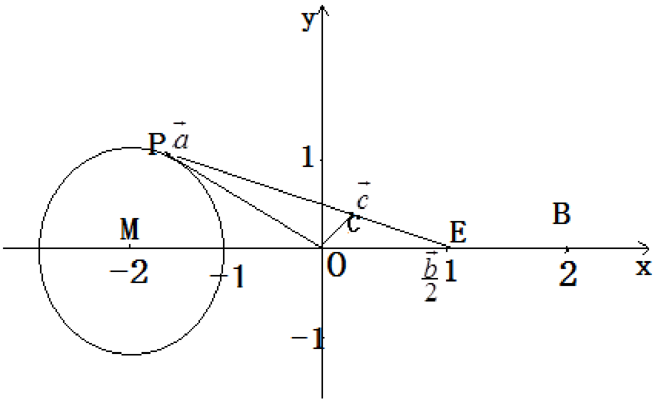
则 $\overrightarrow{OE}=\dfrac{\vec{b}}{2}$

由 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$ 代入可得 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=1$

即 P 点的轨迹方程为 $(x+2)^2+y^2=1$

又因为 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$,变形可得 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+2\mu\left(\dfrac{\vec{b}}{2}\right)$,即 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OP}+2\mu\overrightarrow{OE}$,且 $\lambda+2\mu=1$

所以由平面向量基本定理可知 P,C,E 三点共线,如下图所示:



所以 $|\vec{c}|$ 的最小值 m 即为 O 到直线 PE 的距离最小值

根据圆的切线性质可知,当 PE 与圆 M 相切时,m 有最大值

设切线 PE 的方程为 $y=k(x-1)$,化简可得 $kx-y-k=0$

由切线性质及点 M 到直线距离公式可得 $\dfrac{|-2k-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,化简可得 $8k^2=1$

即 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

所以切线方程为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}x-y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$

所以当 $\vec{a}$ 变化时，O 到直线 PE 的最大值为 $m=\dfrac{\left|-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(\pm1)^2}}=\dfrac{1}{3}$

即 m 的最大值为 $\dfrac{1}{3}$

故选:**B**

【点睛】

本题考查了平面向量的坐标应用,平面向量基本定理的应用，圆的轨迹方程问题,圆的切线性质及点到直线距离公式的应用,综合性强,属于难题.

7、**D**

【解析】

对函数求导，根据函数在 $x=-3$ 时取得极值，得到 $f'(-3)=0$，即可求出结果.

【详解】

因为 $f\left(x\right)=x^{3}+ax^{2}+3x-9$，所以 $f'\left(x\right)=3x^{2}+2ax+3$，

又函数 $f\left(x\right)=x^{3}+ax^{2}+3x-9$ 在 $x=-3$ 时取得极值，

所以 $f'\left(-3\right)=27-6a+3=0$，解得 $a=5$.

故选 **D**

【点睛】

本题主要考查导数的应用，根据函数的极值求参数的问题，属于常考题型.

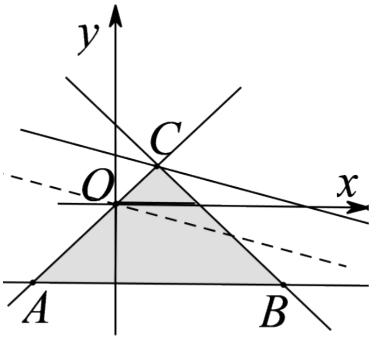
8、**B**

【解析】

作出可行域，平移目标直线即可求解.

【详解】

解：作出可行域：



由 $z=x+2y$ 得，$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}z$

由图形知，$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}z$ 经过点时，其截距最大，此 z 时最大

$\begin{cases} y=x \\ x+y-1=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$，$C\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

当 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 时，$z_{\max}=\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{2}{2}=\dfrac{3}{2}$

故选：**B**

【点睛】

考查线性规划，是基础题.