《概率论与数理统计》试卷 1

注：标准正态分布的分布函数值

Φ（2.33）=0.9901；Φ（2.48）=0.9934；Φ（1.67）=0.9525

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1.设 A、B 均为非零概率事件，且 $A\subset B$ 成立，则　　（　）

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\mid B)=\dfrac{P(A)}{P(B)}$　　D. $P(A-B)=P(A)-P(B)$

2. 掷三枚均匀硬币，若 A={两个正面，一个反面}，则有 P(A)=　　（　）

A. 1/2　　B. 1/4　　C. 3/8　　D. 1/8

3. 对于任意两个随机变量 ξ 和 η，若 $E(\xi\eta)=E\xi E\eta$，则有　　（　）

A. $D(\xi\eta)=D\xi D\eta$　　B. $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$

C. ξ 和 η 独立　　D. ξ 和 η 不独立

4. 设 $P(x)=\begin{cases}2\sin x, x\in[0,A\pi]\\ 0, x\notin[0,A\pi]\end{cases}$。若 P(x)是某随机变量的密度函数，则常数 A=　　（　）

A. 1/2　　B. 1/3　　C. 1　　D. 3/2

5. 若 ξ_1，ξ_2，…，ξ_6 相互独立，分布都服从 $N(u,\ \sigma^2)$，则 $Z=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{6}(\xi_i-u)^2$ 的密度函数最可能是　　（　）

A. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}z^2e^{z/2}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$　　B. $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{12\pi}}e^{z^2/12}, -\infty<z<+\infty$

C. f(z)= $\frac{1}{\sqrt{12\pi}}e^{-z^2/12}, -\infty < z < +\infty$ D. f(z)= $\begin{cases}\frac{1}{16}z^2e^{-z/2}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$

6. 设（ξ，η）服从二维正态分布，则下列说法中错误的是 （ ）

A.（ξ，η）的边际分布仍然是正态分布

B. 由（ξ，η）的边际分布可完全确定（ξ，η）的联合分布

C. （ξ，η）为二维连续性随机变量

D. ξ与η相互独立的充要条件为ξ与η的相关系数为 0

二、填空题（每空 3 分，共 27 分）

1. 设随机变量 X 服从普阿松分布，且 P(X=3)=$\frac{4}{3}e^{-2}$，则 EX=__________。

2. 已知 DX=25，DY=36，r_{XY}=0.4，则 cov (X,Y)= _________.

3. 设离散型随机变量 X 分布率为 P{X=k}=5A$(\frac{1}{2})^k$ (k=1, 2, ⋯), 则 A= ________ .

4. 设ξ表示 10 次独立重复试验中命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.6，则ξ^2的数学期望 E(ξ^2)= __________ .

5. 设随机变量ξ的分布函数 F(x)=$\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ （λ＞0），则ξ的密度函数 p(x)=______________，Eξ=________，Dξ=_________.

6. 设 X～N(2, σ^2)，且 P{2<X<4}=0.3, 则 P{X<0}= __________

7. 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个黄的，30 个白的。现在两个人不放回地依次从袋中随机各取一球，则第二人取到黄球的概率是__________。

三、（本题 8 分）在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 到 10 号的纪念章，任选 3 人纪录其纪念章的号码，试求下列事件的概率：

（1）A=“最小号码为 6”； （2）B=“不含号码 4 或 6”。

四、(本题 12 分)设二维随机变量(ξ · η)具有密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases}Ce^{-2(x+y)},x>0,y>0\\0,\text{其它}\end{cases}$$

试求(1)常数 C;　　(2)P($\xi+\eta$<1);　　(3) ξ与η是否相互独立?为什么?

(4)ξ和η的数学期望、方差、协方差。

五、(本题 8 分)已知产品中 96%为合格品。现有一种简化的检查方法,它把真正的合格品确认为合格品的概率为 0.98,而误认废品为合格品的概率为 0.05.求在这种简化检查下被认为是合格品的一个产品确实是合格品的概率?

六、(本题 8 分)一个复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成。在运行期间,每个部件损坏的概率为 0.1,而为了使整个系统正常工作,至少必须有 85 个部件工作。求整个系统正常工作的概率。

七、(本题 12 分)有一类特定人群的出事率为 0.0003，出事赔偿每人 30 万元，预计有 500 万以上这样的人投保。若每人收费 M 元(以整拾元为单位，以便于收费管理。如 122 元就取为 130 元、427 元取成 430 元等)，其中需要支付保险公司的成本及税费，占收费的 40%，问 M 至少要多少时才能以不低于 99%的概率保证保险公司在此项保险中获得 60 万元以上的利润？

八、(本题 7 分)叙述大数定理，并证明下列随机变量序列服从大数定理。

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ 1/n & 1-2/n & 1/n \end{pmatrix}，n=2, 3, 4\cdots$$

《概率论与数理统计》试卷 2

注：标准正态分布的分布函数值

Φ（1.0）=0.8413；Φ（2.33）=0.9901；Φ（2.5）=0.9938；Φ（2.42）=0.9922

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $X\sim N(u,\sigma^2)$，则概率 $P(X\le 1+u)$　　　　（　）

A. 随 u 的增大而增大　　　　B. 随 u 的增加而减小

C. 随σ的增加而增加　　　　D. 随σ的增加而减小

2. 设 A、B 是任意两事件，则 $P(A-B)=$　　　　（　）

A. $P(A)-P(B)$　　　　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$

C. $P(A)-P(AB)$　　　　D. $P(A)+P(B)-P(AB)$

3. 设ξ是一个连续型变量，其概率密度为$\varphi(x)$，分布函数为 $F(x)$，则对于任意 x 值有（　）

A. $P(\xi=x)=0$　　　　B. $F'(x)=\varphi(x)$

C. $P(\xi=x)=\varphi(x)$　　　　D. $P(\xi=x)=F(x)$

4. 对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$，则　　　　（　）

A. $D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$　　　　B. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

C. X 和 Y 独立　　　　D. X 和 Y 不独立

5. 设ξ的分布率为

而 F(x)=P{ξ< x}, 则 $F(\sqrt{2})=$ （ ）

A. 0.6　　B. 0.35　　C. 0.25　　D. 0

二、填空题（每空 3 分，共 21 分）

1. 某射手有 5 发子弹，射一次命中的概率为 0.75，若果命中了就停止射击，否则就一直射到子弹用尽。则耗用子弹数ξ的数学期望为________。

2. 已知 DY=36，cov(X,Y)=12, 相关系数 $r_{XY}=0.4$, 则 DX=________.

3. 三次独立的试验中，成功的概率相同，已知至少成功一次的概率为 37/64，则每次试验成功的概率为__________.

4. 设 X ~ B(3,p), Y ~ B(4,p), 且 X、Y 相互独立，则 X+Y 服从二项分布__________________.

5. 若 X ~ U(0,5), 方程 $x^2+2Xx+5X-4=0$ 有实根的概率为__________.

6. 设 $3X+5\sim N(11,\ \sigma^2)$, 且 P{2<X<4}=0.15, 则 P{X<0}=_________.

7. 相关系数是两个随机变量之间__________程度的一种度量。

ξ	0	1	2
P	0.25	0.35	0.4

三、（本题 10 分）设一仓库中有 10 箱同种规格的产品，其中由甲、乙、丙三厂生产的分别为 5 箱、3 箱、2 箱，三厂产品的次品率依次为 0.1，0.2，0.3。从这 10 箱中任取一箱，再从这箱中任取一件，求这件产品为正品的概率。若取出的产品为正品，则它是甲厂生产的概率是多少？

四、（本题 8 分）离散型随机变量 x 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le -1\\ 0.3, -1<x\le 1\\ 0.8, 1<x\le 3\\ 1, x>3\end{cases}$$ ，求 X 的分布列及 X 的数学期望。

五、（本题 15 分）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$$

求：（1）X 的概率分布函数；　（2）X 落在（-5，10）内的概率；

（3）求 X 的方差。

六、（本题 10 分）设由 2000 台同类机床各自独立加工一件产品，每台机床生产的次品率均服从（0.005，0.035）上的均匀分布。问这批产品的平均次品率小于 0.025 的概率是多少？

七、（本题 15 分）设二维随机变量（X,Y）在区域：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 上服从均匀分布。

（1）求（X,Y）的联合概率密度及边缘概率密度；　　（2）已知 DX=25，DY=4, 求参数 a、 b;(3)判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立？

八、(本题 6 分)设随机变量 X 服从(0,1)上均匀分布,Y 服从参数为 $\lambda=5$ 的指数分布,且 X,Y 独立。求 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数与密度函数。

《概率论与数理统计》试卷 3

注：标准正态分布的分布函数值

$$\Phi(1.0)=0.8413, \Phi(2.575)=0.9950 \quad \Phi(2.81)=0.9975 \quad \Phi(2.42)=0.9922$$

$$\Phi(1.285)=0.9, \quad \Phi(1.645)=0.95, \quad \Phi(1.96)=0.975, \quad \Phi(2.33)=0.99$$

一、（10 分）假设一枚弹道导弹击沉航空母舰的概率为$\frac{1}{3}$，击伤的概率为$\frac{1}{2}$，击不中的概率为$\frac{1}{6}$，并设击伤两次也会导致航空母舰沉没，求发射 4 枚弹道导弹能击沉航空母舰的概率？

解：设 A_i =｛第 i 枚弹道导弹击沉航空母舰｝，B_i =｛第 i 枚弹道导弹击伤航空母舰｝

C_i =｛第 i 枚弹道导弹没有击中航空母舰｝，i＝1，2，3，4

D＝｛发射 4 枚弹道导弹能击沉航空母舰｝

$P(A_i)=\frac{1}{3}$，$P(B_i)=\frac{1}{2}$，$P(C_i)=\frac{1}{6}$，i＝1，2，3，4

$$\overline{D}=C_1C_2C_3C_4UB_1C_2C_3C_4UC_1B_2C_3C_4UC_1C_2B_3C_4UC_1C_2C_3B_4$$

$$P(\overline{D})=P(C_1C_2C_3C_4)+P(B_1C_2C_3C_4)+P(C_1B_2C_3C_4)+P(C_1C_2B_3C_4)+P(C_1C_2C_3B_4)$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^4+4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{13}{6^4}$$

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{13}{6^4}=0.99$$

二、（12 分）在

某种牌赛中，5 张牌为一组，其大小与出现的概率有关。一付 52 张的牌（四种花色：黑桃、红心、方块、梅花各 13 张，即 2-10、J、Q、K、A），

求（1）同花顺（5 张同一花色连续数字构成）的概率；

（2）3 张带一对（3 张数字相同、2 张数字相同构成）的概率；

（3）3 张带 2 散牌（3 张数字相同、2 张数字不同构成）的概率。

解：(1) A = { 同花顺（5 张同一花色连续数字构成）}

$$P(A)=\frac{4\times(13-4)}{C_{52}^5}=\frac{36}{C_{52}^5}$$ （只要说明顺子的构成，分子 40 也算对）

（2）A = {3 张带一对（3 张数字相同、2 张数字相同构成）}

$$P(A)=\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2}{C_{52}^5}$$

（3）A = {3 张带 2 散牌（3 张数字相同、2 张数字不同构成）}

$$P(A)=\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^2C_4^1C_4^1}{C_{52}^5}$$

三、(10 分) 某安检系统检查时，非危险人物过安检被误认为是危险人物的概率是 0.02；而危险人物又被误认为非危险人物的概率是 0.05。假设过关人中有 96%是非危险人物。问：

（1）在被检查后认为是非危险人物而确实是非危险人物的概率？

（2）如果要求对危险人物的检出率超过 0.999 概率，至少需安设多少道这样的检查关卡？

解：(1) 设 A = { 被查后认为是非危险人物 }， B = { 过关的人是非危险人物 }，则

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.96\times0.98+0.04\times0.05=0.9428$$

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=0.998$$

（2）设需要 n 道卡，每道检查系统是相互独立的，则

Ci={第 i 关危险人物被误认为非危险人物}，$P\{C_1 \cdots C_n\} = 0.05^n$，所以

$1-0.05^n \ge 0.999$，$n \ge \dfrac{\ln 0.0001}{\ln 0.05}$，即 $n = \left[\dfrac{\ln 0.0001}{\ln 0.005}\right]+1$ =[3.0745]+1 = 4

四、(8 分) 随机变量 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=a^X, a>0$ 的密度函数

解：当 $a=1$ 时，$Y=1$，则 $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 1\\ 1 & y>1\end{cases}$

当 $0<a<1$ 时，当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y<y)=0$，$f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(a^X<y)=P(X\ln a<\ln y)$

$$F_Y(y)=P\left(X>\frac{\ln y}{\ln a}\right)=1-P\left(X\le\frac{\ln y}{\ln a}\right)=1-\Phi\left(\frac{\ln y}{\ln a}\right)$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=-\frac{1}{y\ln a}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{\ln y}{\ln a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

当 $a>1$ 时，当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y<y)=0$，$f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\left(X<\dfrac{\ln y}{\ln a}\right)=\Phi\left(\dfrac{\ln y}{\ln a}\right)$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{y\ln a}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{\ln y}{\ln a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

五、(12 分) 设随机变量 X、Y 的联合分布律为：

X \ Y	-1	0	1	2
-2	*a*	0	0	0
-1	0.14	*b*	0	0

0	0.01	0.02	0.03	0
1	0.12	0.13	0.14	0.15

已知 E(X+Y)=0，求：(1)a，b；(2) X 的概率分布函数；(3) E(XY)。

解：(1) E(X+Y)=

$$E(X+Y)=-3a-2\times0.14-b-1\times0.01+1\times0.03+1\times0.13+2\times0.14+3\times0.15$$
$$=-3a-b+0.6=0$$

$$a+0.14+b+0.01+0.02+0.03+0.12+0.13+0.14+0.15=a+b+0.74=1$$

联立解得：$a=0.17$ ，$b=0.09$

(2) X 的概率分布函数：

X	-2	-1	0	1
	0.17	0.23	0.06	0.54

(3) E(XY) = $2\times0.17+1\times0.14-1\times0.12+1\times0.14+2\times0.15=0.8$

六、(10 分) 某学校北区食堂为提高服务质量，要先对就餐率 p 进行调查。决定在某天中午，随机地对用过午餐的同学进行抽样调查。设调查了 n 个同学，其中在北区食堂用过餐的学生数为 m，若要求以大于 95%的概率保证调查所得的就餐频率与 p 之间的误差上下在 10% 以内，问 n 应取多大？

解：$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<0.1\right\}\geq0.95$，因 $\dfrac{\frac{m}{n}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\sim N(0,1)$

$$P\left\{\frac{\left|\frac{m}{n}-p\right|}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}<\frac{0.1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right\}\geq 0.95$$ ， $$\frac{0.1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\geq u_{0.975}=1.96$$

$n\geq(19.6)^2 p(1-p)$；因为 $p(1-p)\leq 1/4$，取 $n\geq(19.6)^2/4$ =96.04 即 $n=97$

七、(10 分)

设二维随机变量(X,Y)在区域：$\{0<x<a,\quad 0<y<b\}$上服从均匀分布。（1）求(X,Y)的联合概率密度及边缘概率密度；（2）已知 $DX=12, DY=36$，求参数 a、b；(3)判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立？

解：(1) 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度：

$$f(x,y)=\begin{cases}1/ab, & 0<x<a, 0<y<b\\ 0, & others\end{cases}$$

边缘概率密度：$f_X(x)=\begin{cases}1/a, & 0<x<a\\ 0, & others\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}1/b, & 0<y<b\\ 0, & others\end{cases}$

（2）$DX=(1/12)a^2=12, DY=(1/12)b^2=36$，$a=12, b=12\sqrt{3}$

（3）随机变量 X 与 Y 相互独立，因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

八、(8 分) 证明：如果 $E|\xi|^3=c$ 存在，则 $P(|\xi|>t)\leq\frac{c}{t^3}$

解： $$P(|\xi|>t)=\int_{|x|>t}dF(x)\leq\int_{|x|>t}\frac{|x|^3}{t^3}dF(x)\leq\int_{|x|\geq 0}\frac{|x|^3}{t^3}dF(x)=\frac{E|\xi|^3}{t^3}=\frac{c}{t^3}$$

九、(12 分) 设（X，Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求（1）常数 A；（2）P(X<0.4，Y<1.3)；（3）Ee^{tX+sY}；（4）EX，DX，Cov(X，Y)。

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^1 Axydy\right)dx=\frac{A}{4}=1$，A = 4

（2）P(X<0.4，Y<1.3) = $\int_0^{0.4}\left(\int_0^1 4xydy\right)dx=0.16$

（3）$Ee^{tX+sY}=\int_0^1\left(\int_0^1 e^{tx+sy}4xydy\right)dx=\int_0^1 e^{tx}4x\left(\left(\frac{ye^{sy}}{s}\right)\bigg|_0^1-\frac{1}{s}\int_0^1 e^{sy}dy\right)dx$

$=4\left(\frac{e^s}{s}-\frac{e^s}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{e^t}{t}-\frac{e^t}{t^2}+\frac{1}{t^2}\right)$

（4）$EX=\int_0^1\left(\int_0^1 4x^2ydy\right)dx=\frac{2}{3}$，$EX^2=\int_0^1\left(\int_0^1 4x^3ydy\right)dx=\frac{1}{2}$

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$，$E(XY)=\int_0^1\left(\int_0^1 4x^2y^2dy\right)dx=\frac{4}{9}$

$Cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=0$

十、（8 分） 电视台有一节目“幸运观众有奖答题”：有两类题目，A 类题答对一题奖励 1000 元，B 类题答对一题奖励 500 元。答错无奖励，并带上前面得到的钱退出；答对后可继续答题，并假设节目可无限进行下去（有无限的题目与时间），选择 A、B 类型题目分别由抛硬币的正、反面决定。

已知某观众 A 类题答对的概率都为 0.4，答错的概率都为 0.6；B 类题答对的概率都为 0.6，答错的概率都为 0.4。

（1）求该观众答对题数的期望值。

（2）求该观众得到奖励金额的期望值。

解：（1）设ξ表示该观众答对题数，$\xi=0,1,2,\cdots$

则第ξ+1 次解答答错（即首次出错）。

答对一题的概率为

$$P(\text{答对题})=P(\text{答对A题}|\text{选择A题})\mathrm{P}(\text{选择A题})+P(\text{答对B题}|\text{选择B题})\mathrm{P}(\text{选择B题})$$
$$=0.4\times0.5+0.6\times0.5=0.5$$

答错一题的概率为 0.5

所以 $P(\xi=k)=0.5^k\times0.5=0.5^{k+1}$ ；$E\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot0.5^{k+1}=1$

（2）观众得到奖励金额η的期望值：

令 $X=\begin{cases}1, & \text{答对}A\text{题}\\ 2, & \text{答对}B\text{题}\\ 3, & \text{答错题}\end{cases}$，则 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$，

$$E\eta=E(E(\eta\mid X))=0.2\times E(1000+\eta)+0.3\times E(500+\eta)+0.5\times0$$

$$\therefore E\eta=700$$

或：答对一题得到奖金的期望为：$0.5\times0.4\times1000+0.5\times0.6\times500=350$

进入第 k 题答题环节的概率为：0.5^{k-1}

因此，总奖金的期望为：$\sum_{k=1}^{\infty}350\times0.5^{k-1}=700$

《概率论与数理统计》试卷 4

可能用到的分位点：

$$u_{0.025}=1.96,\ u_{0.005}=2.58,\quad \Phi(2)=0.9772,\quad \Phi(3)=0.99865,\ \Phi(4)=0.99997$$

$$t_{0.025}(6)=2.45,\quad t_{0.025}(7)=2.36,\quad t_{0.025}(8)=2.31$$

$$\chi^2_{0.05}(6)=12.6,\quad \chi^2_{0.05}(7)=14.1,\quad \chi^2_{0.05}(8)=15.5$$

一、(10 分) 一部五本头的文集，按任意次序放到书架上去，试求下列概率：

(1) 第一卷出现在旁边。

(2) 第一卷及第五卷出现在旁边。

(3) 第一卷或第五卷出现在旁边。

(4) 第一卷及第五卷都不出现在旁边。

(5) 第三卷正好在正中。

解：(1) $p=2\times\dfrac{4!}{5!}=\dfrac{2}{5}$

(2) $p=2\times\dfrac{3!}{5!}=\dfrac{1}{10}$

(3) $p=\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{7}{10}$

(4) $p=1-\dfrac{7}{10}=\dfrac{3}{10}$

(5) $p=1\times\dfrac{4!}{5!}=\dfrac{1}{5}$

二、 (12 分) 已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有 3 件合格品.从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,求:

(1)乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2)从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

解 (1) X 的可能值为 0,1,2,3,所以 X 的概率分布为

$$P\left(X=k\right)=\frac{C_3^k C_3^{3-k}}{C_6^3} \quad \left(k=0,1,2,3\right)$$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此

$$EX=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$$

(2)设 $A=${从乙箱中任取一件产品是次品},根据全概率公式有

$$P\left(A\right)=\sum_{k=0}^{3}P\left\{X=k\right\}P\left\{A\middle|X=k\right\}=\frac{1}{20}\times0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

三、(12)某保险公司对一种电视机进行保险，现有 9000 个用户，各购得此种电视机一台，在保险期内，这种电视机的损坏率为 0.001，参加保险的客户每户交付保险费 5 元，电视机损坏时可向保险公司领取 2000 元，求保险公司在投保期内:

(1)亏本的概率;

(2)获利不少于 10000 元的概率。

解 设$\xi_i=\begin{cases}1 & 第i台电视机坏\\ 0 & 第i台电视机正常\end{cases}$

$i=1,2,\cdots,9000$

$$P\{\xi_i = 1\} = 0.001 \quad P\{\xi_i = 0\} = 0.999$$
$$E\xi_i = 0.001 \quad D\xi_i = 0.000999$$
$$\sum_{i=1}^{9000} E\xi_i = 9 \quad \sum_{i=1}^{9000} D\xi_i \approx 9$$

保险公司亏，则电视机坏的台数:

>9000*5/2000=22.5

$$P\left\{\sum_{i=1}^{9000}\xi_i > 22.5\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{9000}\xi_i - E\left(\sum_{i=1}^{9000}\xi_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{9000}\xi_i\right)}} > \frac{22.5-9}{\sqrt{9}}\right\} = 1-\Phi(4.5) \approx 0$$

保险公司获利不少于 10000 元，则电视机坏的台数:

<(9000*5-10000)/2000=17.5

$$P\left\{\sum_{i=1}^{9000}\xi_i < 17.5\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{9000}\xi_i - E\left(\sum_{i=1}^{9000}\xi_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{9000}\xi_i\right)}} < \frac{17.5-9}{\sqrt{9}}\right\} = \Phi(2.83)$$

$$= \Phi(2) + \frac{\Phi(3)-\Phi(2)}{3-2}(2.83-2) = 0.9772 + 0.02145 \times 0.83 = 0.995$$

四、(15 分)设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a 、 b 、 c 为常数，且 X 的数学期望 $EX=-0.2$, $P\{Y\le 0|X\le 0\}=0.5$, 记 $Z=X+Y$.求: (1) a 、b 、c 的值; (2) Z 的概率分布律; (3) $P\{X=Z\}$.

解 (1)由概率分布的性质可知, $a+b+c+0.6=1$,即 $a+b+c=0.4$.

由 $EX=-0.2$,可得 $-a+c=-0.1$.

再由 $P\{Y\le 0|X\le 0\}=\dfrac{P\{X\le 0,Y\le 0\}}{P\{X\le 0\}}=\dfrac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5$,解得 $a+b=0.3$.

解以上关于 a 、b 、c 的三个方程可得, $a=0.2,b=0.1,c=0.1$.

(2) Z 的所有可能取值为-2,-1,0,1,2.则

$P\{Z=-2\}=P\{X=-1,Y=-1\}=0.2$

$P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=0,Y=-1\}=0.1$

$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=0,Y=0\}=0.3$

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.3$

$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=0.1$

所以 Z 的概率分布为

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(3) $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=0+b+0.1=0.1+0.1=0.2$.

五、(15 分)设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{当}-1<x<0\\ \dfrac{1}{4} & \text{当}0\le x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

令 $Y=X^2$, $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.求:

(1) Y 的密度函数 $f_Y(y)$; (2) $\operatorname{cov}(X,Y)$; (3) $F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$.

解 (1) Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{X^2\le y\right\}$$

当 $y\le 0$ 时, $F_Y(y)=0, f_Y(y)=0$.

当 $0<y<1$ 时,

$$F_Y(y)=P\left\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right\}=P\left\{-\sqrt{y}\le X<0\right\}+P\left\{0\le X\le\sqrt{y}\right\}=\frac{3}{4}\sqrt{y}$$

$$f_Y(y)=\frac{3}{8\sqrt{y}}$$

当 $1\le y<4$ 时,

$$F_Y(y)=P\{-1\le X<0\}+P\left\{0\le X\le\sqrt{y}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{8\sqrt{y}}$$

当 $y\ge 4$ 时, $F_Y(y)=1, f_Y(y)=0$.

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}} & \text{当}0<y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}} & \text{当}1\le y<4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}xdx+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}xdx=\frac{1}{4}$$

$$EY=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{4}x^2dx=\frac{5}{6}$$

$$EXY=EX^3=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^3dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}x^3dx=\frac{7}{8}$$

故 $$\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=EXY-EX\cdot EY=\frac{2}{3}$$

(3) $F\left(\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\le-\frac{1}{2},Y\le4\right\}=P\left\{X\le-\frac{1}{2},X^2\le4\right\}$

$$=P\left\{X\le-\frac{1}{2},2\le X\le2\right\}=P\left\{-2\le X\le-\frac{1}{2}\right\}=P\left\{-1\le X\le-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}$$

六、(**2学分**) (10分) 设随机变量 X 与 Y 独立,其中 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}1&2\\0.3&0.7\end{pmatrix}$$

而 Y 的概率密度为 $f\left(y\right)$,求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g\left(u\right)$.

解 设 $F\left(y\right)$ 是 Y 的分布函数,则由全概率公式可知,$U=X+Y$ 的分布函数为

$$G\left(u\right)=P\left\{X+Y\le u\right\}$$

$$=0.3P\left\{X+Y\le u\middle|X=1\right\}+0.7P\left\{X+Y\le u\middle|X=2\right\}$$

$$=0.3P\left\{Y\le u-1\middle|X=1\right\}+0.7P\left\{Y\le u-2\middle|X=2\right\}$$

由于 X 与 Y 独立,得

$$G\left(u\right)=0.3P\left\{Y\le u-1\right\}+0.7P\left\{Y\le u-2\right\}=0.3F\left(u-1\right)+0.7F\left(u-2\right)$$

因此,U 的概率密度为

$$g\left(u\right)=G'\left(u\right)==0.3F'\left(u-1\right)+0.7F'\left(u-2\right)=0.3f\left(u-1\right)+0.7f\left(u-2\right)$$

七、（2学分）（10分）已知男子中有5%是色盲患者，女子中有0.25%是色盲患者，若从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解 设 A ={抽到一名男性}；B ={抽到一名女性}；C ={抽到一名色盲患者}，由全概率公式得

$$P(C)=P(C\mid A)P(A)+P(C\mid B)P(B)=5\%\times\frac{1}{2}+0.25\%\times\frac{1}{2}=2.625\%$$

$$P(AC)=P(A)P(C\mid A)=\frac{1}{2}\times 5\%=2.5\%$$

由贝叶斯公式得

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{20}{21}$$

八、（2 学分）(16 分)

（1）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ \ (n\geq 2)$ 为独立同分布的随机变量，且均服从 $N(0,1)$，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i$，$Y_i=X_i-\bar{X}\ \ (i=1,2,\cdots,n)$. 求: $P\{Y_1+Y_n\leq 0\}$.

（2）袋中有 a 只红球，b 只白球，c 只黑球。从袋中任取 1 个球，观察颜色后放回，并加入 d 只与之同色的球。如此操作，求第 k 次取到红球的概率。

解 （1） $Y_1+Y_n=X_1-\bar{X}+X_n-\bar{X}=X_1-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i+X_n$

上式是相互独立的正态随机变量的线性组合,所以 Y_1+Y_n 服从正态分布.

由于 $E(Y_1+Y_n)=0$,故

$P\{Y_1+Y_n\leq 0\}=\frac{1}{2}$

（2）将 b 只白球，c 只黑球看成 b+c 只非红球，则与两种颜色球问题相同。用归纳法可得第 k 次取到红球的概率为：

$$p_k = \frac{a}{a+b+c}$$

（如果对 k=1，2 时求出结果，没用归纳法求一般结果，则给 4 分）

六、（3、4 学分） (16 分)设 $X_1, X_2, \cdots, X_n \quad (n \geq 2)$ 为来自总体 $N\left(0, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本,其样本均值为 $\bar{X}$.记 $Y_i = X_i - \bar{X}\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$.

(1)求 Y_i 的方差 DY_i ， $i = 1, 2, \cdots, n$;

(2)求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\operatorname{cov}\left(Y_1, Y_n\right)$;

(3)若 $c\left(Y_1 + Y_n\right)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c;

(4)若 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 相互独立，均为 σ^2 的无偏估计量，且它们的方差存在。试给出一个比它们更有效的无偏估计量。

解 (1) $DY_i = D\left(X_i - \bar{X}\right) = D\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) X_i - \frac{1}{n} \sum_{k \neq i} X_k\right] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad \left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$

(2) $\operatorname{cov}\left(Y_1, Y_n\right) = E\left(Y_1 - EY_1\right)\left(Y_n - EY_n\right) = E\left(X_1 - \bar{X}\right)\left(X_n - \bar{X}\right)$

$$= EX_1 X_n + E\bar{X}^2 - EX_1 E\bar{X} - EX_n \bar{X}$$

$$= EX_1 EX_n + D\bar{X} - \frac{1}{n} EX_1^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} EX_1 X_i - \frac{1}{n} EX_n^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} EX_i X_n$$

$$= -\frac{1}{n} \sigma^2$$

(3) $E\left[c\left(Y_1 + Y_n\right)^2\right] = cD\left(Y_1 + Y_n\right) = c\left[DY_1 + DY_n + 2\operatorname{cov}\left(Y_1, Y_n\right)\right]$

$$= c\left[\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} - \frac{2}{n}\right] \sigma^2 = \frac{2\left(n-2\right)}{n} c\sigma^2 = \sigma^2$$

故 $$c = \frac{n}{2\left(n-2\right)}$$

(4) 令 $D\hat{\theta}_2 = \lambda D\hat{\theta}_1$,则 $\hat{\theta}_3 = \frac{\lambda}{1+\lambda}\hat{\theta}_1 + \frac{1}{1+\lambda}\hat{\theta}_2$ 是比 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 更有效的无偏估计量。$D\hat{\theta}_3 = \frac{\lambda}{1+\lambda}D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_1, D\hat{\theta}_2$

七、(3、4 学分) (12 分) 假设 0.50,1.25,0.80,2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值.已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.求:

(1) X 的数学期望 EX (记 EX 为 b); (2) μ 的置信度为 0.95 的置信区间;

(3) b 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 (1) Y 的概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu)^2/2} \qquad (-\infty < y < +\infty)$$

令 $t = y - \mu$,则

$$b = EX = Ee^Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^y e^{-(y-\mu)^2/2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t+\mu}e^{-t^2/2}dt$$

$$= e^{\mu+1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(t-1)^2/2}dt = e^{\mu+1/2}$$

(2)当置信度 $1-\alpha = 0.95$ 时, $\alpha = 0.05, u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$.故由 $\overline{Y} \sim N(\mu, 1/4)$,可得

$$P\left\{\overline{Y} - 1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\right\} < \mu < P\left\{\overline{Y} + 1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\right\} = 0.95$$

其中 $$\overline{Y} = \frac{1}{4}(\ln 0.5 + \ln 0.8 + \ln 1.25 + \ln 2) = \frac{1}{4}\ln 1 = 0$$

于是有 $$P\{-0.98 < \mu < 0.98\} = 0.95$$

因此, μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(-0.98, 0.98)$.

(3)由 e^x 的严格递增性,可知

$$0.95 = P\left\{-0.48 < \mu + \frac{1}{2} < 1.48\right\} = P\left\{e^{-0.48} < e^{\mu+\frac{1}{2}} < e^{1.48}\right\}$$

因此,b 的置信度为 0.95 的置信区间为$\left(e^{-0.48}, e^{1.48}\right)$.

八、(3、4 学分) (8 分)　某市居民上月平均伙食费为 235.5 元,随机抽取 49 个居民,他们本月的伙食费平均为 236.5 元,由这 49 个样本算出的标准差$S = 3.5$元.假设该市居民月伙食费X服从正态分布,试在$\alpha = 0.01$时,检验"本月该市居民平均伙食费较之上个月无变化"的假设.

解　检验假设$H_0: \mu = 235.5, H_1: \mu \neq 235.5$.

由于方差σ^2未知,故采用t检验法,其拒绝域为

$$W = \left\{ |t| = \frac{\left|\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu_0\right)\right|}{S} \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$$

已知$n = 49, \bar{X} = 236.5, S = 3.5$,计算得

$$|t| = \frac{\left|\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu_0\right)\right|}{S} = \left|\frac{\sqrt{49}(236.5 - 235.5)}{3.5}\right| = 2$$

由于$49 - 1 = 48 > 30$,故可用$u_{\alpha/2}$代替$t_{\alpha/2}(49-1)$.

当$\alpha = 0.01$时, $u_{0.005} = 2.58 > 2$,故接受H_0.即本月该市居民平均伙食费较之上个月无显著变化.

《概率论与数理统计》试卷 5

一．单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设事件 A 和 B 的概率为 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{2}{3}$ 则 $P(AB)$ 可能为（　）

(A) 0;　(B) 1;　(C) 0.6;　(D) 1/6

2. 从 1、2、3、4、5 这五个数字中等可能地、有放回地接连抽取两个数字,则这两个数字不相同的概率为（　）

(A) $\frac{1}{2}$;　(B) $\frac{2}{25}$;　(C) $\frac{4}{25}$;　(D)以上都不对

3．投掷两个均匀的骰子，已知点数之和是偶数，则点数之和为 6 的概率为（　）

(A) $\frac{5}{18}$;　(B) $\frac{1}{3}$;　(C) $\frac{1}{2}$;　(D)以上都不对

4．某一随机变量的分布函数为 $F(x)=\frac{a+be^x}{3+e^x}$，则 $F(0)$的值为（　）

(A) 0.1;　(B) 0.5;　(C) 0.25;　(D)以上都不对

5．一口袋中有 3 个红球和 2 个白球，某人从该口袋中随机摸出一球，摸得红球得 5 分，摸得白球得 2 分，则他所得分数的数学期望为（　）

(A) 2.5;　(B) 3.5;　(C) 3.8;　(D)以上都不对

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A、B是相互独立的随机事件，$P(A)$=0.5, $P(B)$=0.7, 则 $P(A\cup B)$ =_____.

2．设随机变量 $\xi \sim B(n,p),\ E(\xi)=3,\ D(\xi)=1.2$，则 n=______.

3．随机变量ξ的期望为 $E(\xi)=5$，标准差为 $\sigma(\xi)=2$，则 $E(\xi^2)$ =_______.

4．甲、乙两射手射击一个目标，他们射中目标的概率分别是 0.7 和 0.8.先由甲射击，若甲未射中再由乙射击。设两人的射击是相互独立的，则目标被射中的概率为________.

5．设连续型随机变量 ξ 的概率分布密度为 $f(x)=\dfrac{a}{x^2+2x+2}$，a 为常数，则 $P(\xi\geq 0)$=_______.

三．(本题 10 分)将 4 个球随机地放在 5 个盒子里，求下列事件的概率

(1) 4 个球全在一个盒子里;

(2) 恰有一个盒子有 2 个球.

四．(本题 10 分) 设随机变量 ξ 的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{1+x}, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 3\\ 0, & \text{当}x<0\text{或}x>3\end{cases}$$

(1) 求常数 A; (2) 求 $P(\xi<1)$; (3) 求 ξ 的数学期望.

五．(本题 10 分) 设二维随机变量 (ξ,η) 的联合分布是

	$\eta=1$	$\eta=2$	$\eta=4$	$\eta=5$
$\xi=0$	0.05	0.12	0.15	0.07
$\xi=1$	0.03	0.10	0.08	0.11
$\xi=2$	0.07	0.01	0.11	0.10

(1) ξ与η是否相互独立? (2) 求$\xi\cdot\eta$的分布及$E(\xi\cdot\eta)$；