1.1　矩阵及其运算

1.2　分块矩阵

1.3　可逆矩阵

1.4　矩阵的初等变换和初等方阵

1.1 矩阵及其运算

定义1.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的m行n列的**数表**

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列矩阵, 简称$m\times n$矩阵.

记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

简记为 $A=A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$,

这$m\times n$个数称为A的元素,简称元素.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

1) 方阵

行数与列数都等于n的矩阵A,称为n阶方阵,

记作 A_n. 例如 $A=\begin{pmatrix}13 & 6 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 是一个3 阶方阵.

2) 行矩阵、列矩阵

只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,

称为行矩阵(或行向量).

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$,称为列矩阵(或列向量).

3) 单位矩阵

定义1.2 主对角线上元素全为1，而其余元素全为0的**方阵**,称为**单位矩阵**,简称**单位阵**.

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵

全为1

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

不为单位阵

4) 对角矩阵

定义1.3　形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵,

称为对角矩阵(或对角阵).

记作 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

diagonal

5) 零矩阵

元素全为零的矩阵称为零矩阵，$m \times n$ 零矩阵记作 $O_{m\times n}$ 或 O.

$$O_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) 三角形矩阵

定义1.4 形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为上三角形矩阵与下三角形矩阵 .

矩阵相等

两个矩阵的行数相等,列数相等时,称为 同型矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

定义1.5 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵, 并且对应元素相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵A与B相等, 记作$A=B$.