2022-2023学年山东临沂市莒南县第三中学高三4月19日第12周数学试题考试试题

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2．答题时请按要求用笔。

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．以下关于$f(x)=\sin 2x-\cos 2x$的命题，正确的是

A． 函数$f\left(x\right)$在区间$\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$上单调递增

B． 直线$x=\dfrac{\pi}{8}$需是函数$y=f\left(x\right)$图象的一条对称轴

C． 点$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$是函数$y=f\left(x\right)$图象的一个对称中心

D． 将函数$y=f\left(x\right)$图象向左平移需$\dfrac{\pi}{8}$个单位，可得到$y=\sqrt{2}\sin 2x$的图象

2．若双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的渐近线与圆$\left(x-2\right)^2+y^2=1$相切，则双曲线的离心率为(　　)

A． 2　　**B．** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**C．** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　**D．** $\sqrt{3}$

3．设$0<p<1$，随机变量ξ的分布列是

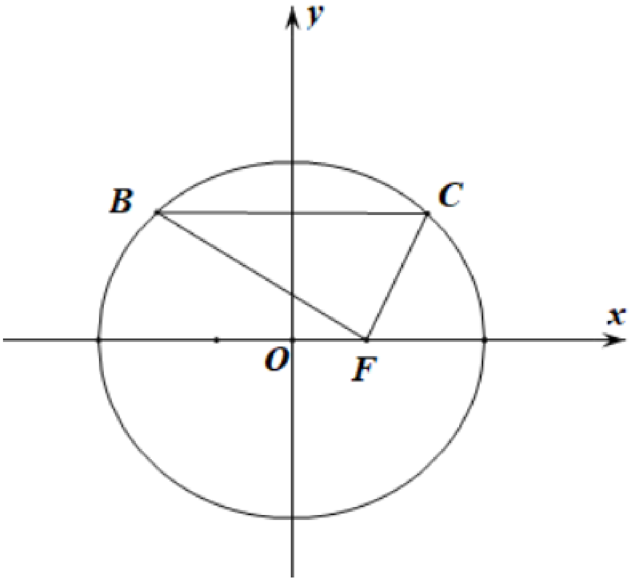
ξ	-1	**0**	**1**
P	$\dfrac{1}{3}(1-p)$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}p$

则当p在$(\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4})$内增大时，(　　)

A． $E(\xi)$减小，$D(\xi)$减小　　**B．** $E(\xi)$减小，$D(\xi)$增大

C． $E(\xi)$增大，$D(\xi)$减小　　**D．** $E(\xi)$增大，$D(\xi)$增大

4．如图所示，在平面直角坐标系xoy中，F是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，直线$y=\dfrac{b}{2}$与椭圆交于$B$，$C$两点，且$\angle BFC=90°$，则该椭圆的离心率是(　　)



A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5．已知四棱锥$S-ABCD$的底面为矩形，$SA\perp$底面$ABCD$，点E在线段BC上，以AD为直径的圆过点E.若$SA=\sqrt{3}AB=3$，则ΔSED的面积的最小值为（　　）

A．9　　B．7　　C．$\frac{9}{2}$　　D．$\frac{7}{2}$

6．已知等边ΔABC内接于圆τ：$x^2+y^2=1$，且P是圆τ上一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最大值是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

7．给出以下四个命题：

①依次首尾相接的四条线段必共面；

②过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面；

③空间中如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角必相等；

④垂直于同一直线的两条直线必平行.

其中正确命题的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

8．已知$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+a}$是定义在R上的奇函数，则不等式$f(x-3)<f(9-x^2)$的解集为（　　）

A．(-2,6)　　B．(-6,2)　　C．(-4,3)　　D．(-3,4)

9．在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，若$a\cos B-b\cos A=\frac{c}{4}$，则$\frac{a^2-b^2}{2c^2}=$（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{8}$

10．《聊斋志异》中有这样一首诗："挑水砍柴不堪苦，请归但求穿墙术.得诀自诩无所阻，额上坟起终不悟."在这里，我们称形如以下形式的等式具有"穿墙术"：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2\frac{2}{3}}$，$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3\frac{3}{8}}$，$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4\frac{4}{15}}$，$5\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{5\frac{5}{24}}$，则按照以上规律，若$10\sqrt{\frac{10}{n}}=\sqrt{10\frac{10}{n}}$具有"穿墙术"，则$n=$（　）

A．48　　B．63　　C．99　　D．120

11．已知$a>0$且$a\neq 1$，函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\log_a x+a, x>0\\ 3^{x+1}-1, x\leq 0\end{cases}$，若$f\left(a\right)=3$，则$f\left(-a\right)=$（　　）

A．2　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$-\frac{8}{9}$

12．已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{x+1}+2, x\leq 0,\\ \left|\log_2 x\right|, x>0,\end{cases}$若关于$x$的方程$\left[f(x)\right]^2-2af(x)+3a=0$有六个不相等的实数根，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$\left(3,\frac{16}{5}\right)$　　B．$\left(3,\frac{16}{5}\right]$　　C．$(3,4)$　　D．$\left(3,4\right]$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知函数$y=f\left(x\right)$为R上的奇函数，满足$f'\left(x\right)>-2$.则不等式$f\left(x-1\right)<x^2\left(3-2\ln x\right)+3\left(1-2x\right)$的解集为________.

14．已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln x, x>1\\ 3^x, x\leqslant 1\end{cases}$，若$f(a)\geqslant 1$，则$a$的取值范围是__

15．为激发学生团结协作，敢于拼搏，不言放弃的精神，某校高三**5**个班进行班级间的拔河比赛．每两班之间只比赛**1**场，目前（—）班已赛了**4**场，（二）班已赛了**3**场，（三）班已赛了**2**场，（四）班已赛了**1**场．则目前（五）班已经参加比赛的场次为__________.

16．角α的顶点在坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边经过点P（1，2），则$\sin$（$\pi-\alpha$）的值是_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点为$F_2\left(3,0\right)$，离心率为$e$.

（1）若$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求椭圆的方程；

（2）设直线$y=kx$与椭圆相交于A、B两点，M、N分别为线段AF_2、BF_2的中点，若坐标原点O在以MN

为直径的圆上，且$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<e\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求$k$的取值范围.

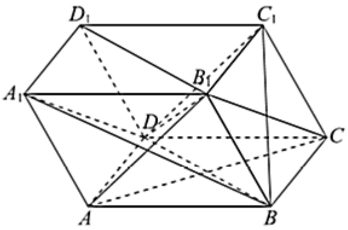
18.（12分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，直线l：$x=2$被称作为椭圆C的一条准线，点P在椭圆C上(异于椭圆左、右顶点)，过点P作直线$m:y=kx+t$与椭圆C相切，且与直线l相交于点Q.

（1）求证：$PF\perp QF$.

（2）若点P在x轴的上方，当$\triangle PQF$的面积最小时，求直线m的斜率k.

附：多项式因式分解公式：$t^6-3t^4-5t^2-1=\left(t^2+1\right)\left(t^4-4t^2-1\right)$

19.（12分）如图，在四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为菱形，$AB_1=CB_1$.



（1）证明：平面$BDD_1B_1\perp$平面$ABCD$；

（2）若$\angle DAB=60^\circ$，ΔDB_1B是等边三角形，求二面角A_1-BD-C_1的余弦值.

20.（12分）设函数$f\left(x\right)=e^x-ax-1$（$a\in R$）.

（1）讨论函数$f\left(x\right)$的单调性；

（2）若关于x的方程$\ln\left(ax+a+1\right)=x+1$有唯一的实数解，求$a$的取值范围.

21.（12分）已知函数$f\left(x\right)=\ln x$.

（1）设$g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，求函数$g\left(x\right)$的单调区间，并证明函数$g\left(x\right)$有唯一零点.

（2）若函数$h(x)=e^x-af(x-1)$在区间$\left(1,1+e^{-a}\right)$上不单调，证明：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}>a$.

22.（10分）某商店举行促销反馈活动，顾客购物每满200元，有一次抽奖机会（即满200元可以抽奖一次，满400元可以抽奖两次，依次类推）.抽奖的规则如下：在一个不透明口袋中装有编号分别为1，2，3，4，5的5个完全相同的小球，顾客每次从口袋中摸出一个小球，共摸三次，每次摸出的小球均不放回口袋，若摸得的小球编号一次比一次大（如1，2，5），则获得一等奖，奖金40元;若摸得的小球编号一次比一次小（如5，3，1），则获得二等奖，奖金20元；其余情况获得三等奖，奖金10元.

（1）某人抽奖一次，求其获奖金额X的概率分布和数学期望;

（2）赵四购物恰好满 600 元，假设他不放弃每次抽奖机会，求他获得的奖金恰好为 60 元的概率.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

利用辅助角公式化简函数得到 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，再逐项判断正误得到答案.

【详解】

$f(x)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

A 选项，$x\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{4},\frac{13\pi}{12})$ 函数先增后减，错误

B 选项，$x=\frac{\pi}{8}\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=0$ 不是函数对称轴，错误

C 选项，$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，不是对称中心，错误

D 选项，图象向左平移需 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到 $y=\sqrt{2}\sin(2(x+\frac{\pi}{8})-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin 2x$，正确

故答案选 D

【点睛】

本题考查了三角函数的单调性，对称轴，对称中心，平移，意在考查学生对于三角函数性质的综合应用，其中化简三角函数是解题的关键.

2、C

【解析】

利用圆心 $(2,0)$ 到渐近线的距离等于半径即可建立 a,b,c 间的关系.

【详解】

由已知，双曲线的渐近线方程为 $bx\pm ay=0$，故圆心 $(2,0)$ 到渐近线的距离等于 1，即 $\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$，

所以$a^2=3b^2$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查双曲线离心率的求法，求双曲线离心率问题，关键是建立a,b,c三者间的方程或不等关系，本题是一道基础题.

3、**C**

【解析】

$E(\xi)=(-1)\times\frac{1}{3}(1-p)+\frac{1}{3}p=\frac{2}{3}p-\frac{1}{3}$，$D(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)$，判断其在$(\frac{2}{3},\frac{3}{4})$内的单调性即可.

【详解】

解：根据题意$E(\xi)=(-1)\times\frac{1}{3}(1-p)+\frac{1}{3}p=\frac{2}{3}p-\frac{1}{3}$在$p\in\left(\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)$内递增，

$E(\xi^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}(1-p)+\frac{1}{3}p=\frac{1}{3}$

$D(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)=\frac{1}{3}(1-p)+\frac{1}{3}p-(\frac{2}{3}p-\frac{1}{3})^2=-\frac{4}{9}p^2+\frac{4}{9}p+\frac{2}{9}=-\frac{4}{9}\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}$，

是以$p=\frac{1}{2}$为对称轴，开口向下的抛物线，所以在$\left(\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)$上单调递减，

故选：**C.**

【点睛】

本题考查了利用随机变量的分布列求随机变量的期望与方差，属于中档题.

4、**A**

【解析】

联立直线方程与椭圆方程，解得B和C的坐标，然后利用向量垂直的坐标表示可得$3c^2=2a^2$，由离心率定义可得结果.

【详解】

由$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=\frac{b}{2}\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\\ y=\frac{b}{2}\end{cases}$，所以$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{b}{2}\right)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{b}{2}\right)$.

由题意知$F\left(c,0\right)$，所以$\overrightarrow{BF}=\left(c+\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\frac{b}{2}\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(c-\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\frac{b}{2}\right)$.

因为$\angle BFC=90^{\circ}$,所以$BF\perp CF$,所以

$$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(c+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(c-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)+\frac{b^2}{4}=c^2-\frac{3}{4}a^2+\frac{a^2-c^2}{4}=\frac{3}{4}c^2-\frac{1}{2}a^2=0.$$

所以$3c^2=2a^2$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故选：A.

【点睛】

本题考查了直线与椭圆的交点，考查了向量垂直的坐标表示，考查了椭圆的离心率公式，属于基础题.

5、C

【解析】

根据线面垂直的性质以及线面垂直的判定，根据勾股定理，得到BE,EC之间的等量关系，再用BE,EC表示出$\triangle SED$的面积，利用均值不等式即可容易求得.

【详解】

设$BE=x$，$EC=y$，则$BC=AD=x+y$.

因为$SA\perp$平面$ABCD$，$ED\subset$平面$ABCD$，所以$SA\perp ED$.

又$AE\perp ED$，$SA\cap AE=A$，所以$ED\perp$平面SAE，则$ED\perp SE$.

易知$AE=\sqrt{x^2+3}$，$ED=\sqrt{y^2+3}$.

在$\mathrm{Rt}\Delta AED$中，$AE^2+ED^2=AD^2$，

即$x^2+3+y^2+3=(x+y)^2$，化简得$xy=3$.

在$\mathrm{Rt}\Delta SED$中，$SE=\sqrt{x^2+12}$，$ED=\sqrt{y^2+3}=\sqrt{\frac{9}{x^2}+3}$.

所以$S_{\Delta SED}=\frac{1}{2}SE\cdot ED=\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+\frac{108}{x^2}+45}$.

因为$3x^2+\frac{108}{x^2}\geq 2\sqrt{3x^2\cdot\frac{108}{x^2}}=36$，

当且仅当$x=\sqrt{6}$，$y=\frac{\sqrt{6}}{2}$时等号成立，所以$S_{\Delta SED}\geq\frac{1}{2}\sqrt{36+45}=\frac{9}{2}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查空间几何体的线面位置关系及基本不等式的应用，考查空间想象能力以及数形结合思想，涉及线面垂直的判定和性质，属中档题.

6、D

【解析】

如图所示建立直角坐标系，设 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=1-\cos\theta$，计算得到答案.

【详解】

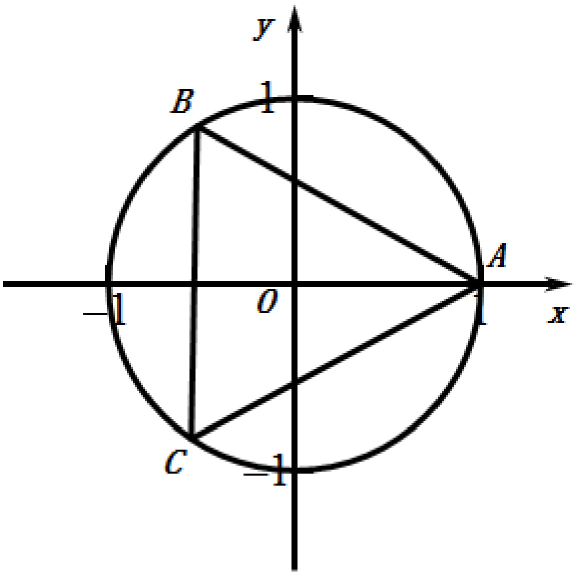
如图所示建立直角坐标系，则 $A(1,0)$，$B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=(1-\cos\theta,-\sin\theta)\cdot(-1-2\cos\theta,-2\sin\theta)$

$=(1-\cos\theta)(-1-2\cos\theta)+2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-\cos\theta-1+2\sin^2\theta=1-\cos\theta\le 2$.

当 $\theta=-\pi$，即 $P\left(-1,0\right)$ 时等号成立.

故选：D.



【点睛】

本题考查了向量的计算，建立直角坐标系利用坐标计算是解题的关键.

7、B

【解析】

用空间四边形对①进行判断；根据公理 **2** 对②进行判断；根据空间角的定义对③进行判断；根据空间直线位置关系对④进行判断.

【详解】

①中，空间四边形的四条线段不共面，故①错误.

②中，由公理 2 知道，过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面，故②正确.

③中，由空间角的定义知道，空间中如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么

这两个角相等或互补，故③错误.

④中，空间中，垂直于同一直线的两条直线可相交，可平行，可异面，故④错误.

故选：**B**

【点睛】

本小题考查空间点，线，面的位置关系及其相关公理，定理及其推论的理解和认识；考查空间想象能力，推理论证能力，考查数形结合思想，化归与转化思想.

8、**C**

【解析】

由奇函数的性质可得 $a=1$，进而可知 $f\left(x\right)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上为增函数，转化条件得 $x-3<9-x^2$，解一元二次不等式即可得解.

【详解】

因为 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-1}{e^x+a}$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的奇函数，所以 $f\left(1\right)+f\left(-1\right)=0$，

即 $\dfrac{e-1}{e+a}+\dfrac{\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{e}+a}=0$，解得 $a=1$，即 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$，

易知 $f\left(x\right)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上为增函数.

又 $f\left(x-3\right)<f\left(9-x^2\right)$，所以 $x-3<9-x^2$，解得 $-4<x<3$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查了函数单调性和奇偶性的应用，考查了一元二次不等式的解法，属于中档题.

9、**D**

【解析】

利用余弦定理角化边整理可得结果.

【详解】

由余弦定理得：$a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{c}{4}$，

整理可得：$a^2-b^2=\dfrac{c^2}{4}$，$\therefore\dfrac{a^2-b^2}{2c^2}=\dfrac{1}{8}$.

故选：D.