福建省福州市2024届高三下学期2月份质量检测数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\{x|x<1\}, B=\{-1,1\}$，则 $A\cup B=$（　）

A．$(-\infty,1]$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$\{-1\}$　　D．$\{-1,1\}$

2．已知点 $A(2,2)$ 在抛物线 $C:x^2=2py$ 上，则 C 的焦点到其准线的距离为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．4

3．已知 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 是两个不共线的向量，若 $2\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}$ 与 $\mu\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$ 是共线向量，则（　）

A．$\frac{\lambda}{\mu}=-2$　　B．$\lambda\mu=-2$　　C．$\frac{\lambda}{\mu}=2$　　D．$\lambda\mu=2$

4．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2, AC=4, BC=2\sqrt{7}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　）

A．2　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．$4\sqrt{3}$

5．设函数 $f(x)=3^{|a-2x|}$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,2]$　　B．$(-\infty,4]$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[4,+\infty)$

6．已知正方形 $ABCD$ 的四个顶点都在椭圆上，椭圆的两个焦点分别在边 AD 和 BC 上，则该椭圆的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7．甲、乙、丙三个地区分别有 $x\%$、$y\%$、$z\%$ 的人患了流感，且 x、y、z 构成以1为公差的等差数列．已知这三个地区的人口数的比为 $5:3:2$，现从这三个地区中任意选取一人，在此人患了流感的条件下，此人来自甲地区的概率最大，则 x 的可能取值为（　）

A．1.21　　B．1.34　　C．1.49　　D．1.51

8．已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$．若 $g(x-2)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，且 $g(2x)-g(-2x-1)=g(1-2x)$，则下列结论一定成立的是（　）

A．$f(x)=f(2-x)$　　B．$g(x)=g(x+2)$

C．$\sum_{n=1}^{2024}g(n)=0$　　D．$\sum_{n=1}^{2024}f(n)=0$

二、多选题

9．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, a_2=4, S_5=35$，则（　）

A．na_n的最小值为1　　B．nS_n的最小值为1

C．$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为递增数列　　D．$\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$为递减数列

10．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2, AA_1=AD=1, E$为AB的中点，则（　）

A．$A_1B\perp B_1C$　　B．$A_1D//$平面EB_1C

C．点D到直线A_1B的距离为$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D．点D到平面EB_1C的距离为$\sqrt{3}$

11．通信工程中常用n元数组$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$表示信息，其中$a_i=0$或$1(i,n\in \mathrm{N}^*,1\le i\le n)$．设$u=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n), v=(b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n), d(u,v)$表示$u$和$v$中相对应的元素（$a_i$对应$b_i$，$i=1,2,\dots,n$）不同的个数，则下列结论正确的是（　）

A．若$u=(0,0,0,0,0)$，则存在5个5元数组v，使得$d(u,v)=1$

B．若$u=(1,1,1,1,1)$，则存在12个5元数组v，使得$d(u,v)=3$

C．若n元数组$w=\left(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n个0}\right)$，则$d(u,w)+d(v,w)\ge d(u,v)$

D．若n元数组$w=\left(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n个1}\right)$，则$d(u,w)+d(v,w)\ge d(u,v)$

三、填空题

12．在复平面内，复数z对应的点的坐标是$(2,1)$，则$\mathrm{i}\cdot z=$______．

13．底面半径为2且轴截面为正三角形的圆锥被平行于其底面的平面所截，截去一个高为$\sqrt{3}$的圆锥，所得的圆台的侧面积为______．

14．在平面直角坐标系xOy中，整点P（横坐标与纵坐标均为整数）在第一象限，直线PA，PB与圆C：$(x+2)^2+y^2=4$分别切于A，B两点，与y轴分别交于M，N两点，则使得$\triangle PMN$周长为$2\sqrt{21}$的所有点P的坐标是______．

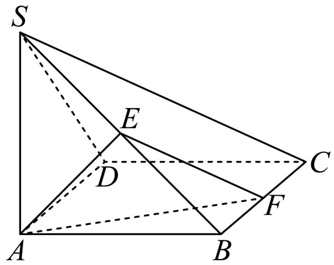
四、解答题

15．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)(0<\omega<3)$，$x=\frac{\pi}{8}$是$f(x)$的零点．

(1)求ω的值；

(2)求函数 $y=f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)$ 的值域．

16．如图，四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为正方形，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，E 在 SB 上，且 $AE\perp BC$．



(1)证明：$SA\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)若 $SA=AB=2$，F 为 BC 的中点，且 $EF=\sqrt{3}$，求平面 AEF 与平面 SAD 夹角的余弦值．

17．人的性格可以大体分为“外向型”和“内向型”两种，树人中学为了了解这两种性格特征与人的性别是否存在关联，采用简单随机抽样的方法抽取 90 名学生，得到如下数据：

	外向型	内向型
男性	45	15
女性	20	10

(1)以上述统计结果的频率估计概率，从该校男生中随机抽取 2 人、女生中随机抽取 1 人担任志愿者．设这三人中性格外向型的人数为 X，求 X 的数学期望．

(2)对表格中的数据，依据 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，可以得出独立性检验的结论是这两种性格特征与人的性别没有关联．如果将表格中的所有数据都扩大为原来 10 倍，在相同的检验标准下，再用独立性检验推断这两种性格特征与人的性别之间的关联性，得到的结论是否一致？请说明理由．

附：参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$．

α	0.1	0.05	0.01
x_α	2.706	3.841	6.635

18．已知双曲线 $W:x^2-\frac{y^2}{8}=1, A(-3,0)$，动直线 $l:x-my-3=0$ 与 x 轴交于点 B，且与 W 交于 C,D 两点，$t|CD|$ 是 $|BC|,|BD|$ 的等比中项，$t\in\mathbf{R}$．

(1)若 C,D 两点位于 y 轴的同侧，求 t 取最小值时 $\triangle ACD$ 的周长；

(2)若$t=1$，且C,D两点位于y轴的异侧，证明：$\triangle ACD$为等腰三角形.

19．已知函数$f\left(x\right)=x\ln x-x^{2}-1$.

(1)讨论$f\left(x\right)$的单调性；

(2)求证：$f\left(x\right)<\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{x^{2}}-\dfrac{2}{x}-1$；

(3)若$p>0,q>0$且$pq>1$，求证：$f\left(p\right)+f\left(q\right)<-4$.

参考答案：

1．A

【分析】根据并集的定义即可得解.

【详解】因为 $A=\{x|x<1\},B=\{-1,1\}$，

所以 $A\cup B=\{x|x\le 1\}$.

故选：A.

2．B

【分析】将点代入抛物线方程求得 p ，即得到结果.

【详解】将点 $A(2,2)$ 代入 $x^2=2py$ ，可得 $p=1$，

故 C 的焦点到其准线的距离为 1.

故选：B.

3．D

【分析】根据题意，由平面向量共线定理，列出方程，即可得到结果.

【详解】依题意，设 $2\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}=t\left(\mu\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right)$，又 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 是两个不共线的向量，

所以 $t\mu=2,\lambda=t$ ，所以 $\lambda\mu=2$.

故选：D

4．B

【分析】根据题意，由余弦定理可得 $A=\dfrac{2\pi}{3}$ ，再由三角形的面积公式即可得到结果.

【详解】由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{2^2+4^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}{2\times 2\times 4}=-\dfrac{1}{2}$，

且 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

故选：B

5．D

【分析】根据题意，由复合函数的单调性，列出不等式，代入计算，即可得到结果.

【详解】函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而函数 $f(x)=3^{|a-2x|}$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减，

所以 $y=|2x-a|$ 在区间 $(1,2)$ 单调递减，所以 $\dfrac{a}{2}\ge 2$ ，解得 $a\ge 4$.

故选：D.

6．C

【分析】结合题中条件可求得边长$\left|AB\right|=2c,\left|BC\right|=\dfrac{2b^2}{a}$，建立方程，解出即可.

【详解】不妨设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

当$x=c$时，$y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，所以$\left|AB\right|=2c,\left|BC\right|=\dfrac{2b^2}{a}$，

因为四边形$ABCD$为正方形，所以$2c=\dfrac{2b^2}{a}$，

即$b^2=ac$，所以$a^2-c^2=ac$，

所以$e^2+e-1=0$，解得$e=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

因为$e\in\left(0,1\right)$，所以$e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选：C.

7．D

【分析】设事件D_1、D_2、D_3分别为“此人来自甲、乙、丙三个地区”，事件G为“此人患了流感”．利用条件概率公式计算出$P\left(D_i|G\right)\left(i=1,2,3\right)$，根据题中条件可得出关于$x$的不等式组，即可解得$x$的取值范围，即可得解.

【详解】设事件D_1、D_2、D_3分别为“此人来自甲、乙、丙三个地区”，

事件F_1、F_2、F_3分别为“此人患了流感，且分别来自甲、乙、丙地区”，

事件G为“此人患了流感”.

由题可知，$P\left(F_1\right)=\dfrac{5x}{1000}$，$P\left(F_2\right)=\dfrac{3y}{1000}=\dfrac{3x+3}{1000}$，$P\left(F_3\right)=\dfrac{2z}{1000}=\dfrac{2x+4}{1000}$，

$P\left(G\right)=P\left(F_1\right)+P\left(F_2\right)+P\left(F_3\right)=\dfrac{10x+7}{1000}$，

由条件概率公式可得$P\left(D_1|G\right)=\dfrac{P\left(D_1G\right)}{P\left(G\right)}=\dfrac{P\left(F_1\right)}{P\left(G\right)}=\dfrac{5x}{10x+7}$，

$P\left(D_2|G\right)=\dfrac{P\left(D_2G\right)}{P\left(G\right)}=\dfrac{P\left(F_2\right)}{P\left(G\right)}=\dfrac{3x+3}{10x+7}$，$P\left(D_3|G\right)=\dfrac{P\left(D_3G\right)}{P\left(G\right)}=\dfrac{P\left(F_3\right)}{P\left(G\right)}=\dfrac{2x+4}{10x+7}$，

由题意可得$\begin{cases}P\left(D_1|G\right)\ge P\left(D_2|G\right)\\P\left(D_1|G\right)\ge P\left(D_3|G\right)\end{cases}$，即$\begin{cases}5x\ge 3x+3\\5x\ge 2x+4\end{cases}$，解得$x\ge\dfrac{3}{2}$，

故选：D.

8．C

【分析】利用$g\left(x-2\right)$的图象关于点$\left(2,0\right)$对称，可知函数$g\left(x\right)$为奇函数，结合

$g\left(2x\right)-g(-2x-1)=g(1-2x)$ 可得$g\left(x\right)$是周期函数，再由选项去逐一分析.

【详解】因为$g\left(x-2\right)$的图象关于点$\left(2,0\right)$对称，所以$g\left(x\right)$的图象关于原点对称，即函数$g\left(x\right)$为奇函数，则$g\left(0\right)=0$，又$g\left(2x\right)-g(-2x-1)=g(1-2x)$，

所以$g\left(2x\right)+g(2x+1)=-g(2x-1)$，所以$g\left(t-1\right)+g(t)+g(t+1)=0$，

所以$g\left(t\right)+g\left(t+1\right)+g\left(t+2\right)=0$，所以$g\left(t-1\right)=g\left(t+2\right)$，

所以$g\left(t\right)=g\left(t+3\right)$，即$g\left(x\right)=g\left(x+3\right)$，所以 3 是$g\left(x\right)$的一个周期.

因为$\sum\limits_{n=1}^{2024}g(n)=\sum\limits_{n=0}^{2024}g(n)=\dfrac{2025}{3}\times[g(0)+g(1)+g(2)]=0$，故 C 正确；

取符合题意的函数$f\left(x\right)=\cos\dfrac{2\pi}{3}x$，则$g(x)=f'\left(x\right)=-\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{2\pi}{3}x$

所以$g\left(0\right)=0$，又$g(0+2)=-\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}\ne g(0)$，故 2 不是$g\left(x\right)$的一个周期，所以

$g\left(x\right)\neq g\left(x+2\right)$，故 B 不正确；

因为$f\left(1\right)=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$不是函数$f\left(x\right)$的最值，所以函数$f\left(x\right)$的图象不关于直线$x=1$对称，

所以$f\left(x\right)\neq f\left(2-x\right)$，故 A 不正确；

因为$\sum\limits_{n=1}^{2024}f(n)=\sum\limits_{n=1}^{2024}\cos\dfrac{2\pi}{3}n=-1\neq 0$，故 D 不正确；

故选：C.

9．ABC

【分析】求出数列通项公式和前 n 项和公式，然后逐一判断各项

【详解】假设$\left\{a_n\right\}$的公差为d，由$S_5=\dfrac{5\left(a_1+a_5\right)}{2}=5a_3=35$，所以$a_3=7$，又$a_2=4$，

所以$d=3,a_1=1$，所以$a_n=3n-2,S_n=\dfrac{n\left(3n-1\right)}{2}$.

选项 A：$na_n=n\left(3n-2\right)=3\left(n-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}$，故$n=1$时$na_n$的最小值为 1，A 正确；

选项 B：$nS_n=\dfrac{n^2\left(3n-1\right)}{2}$，令$f\left(x\right)=\dfrac{3}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x^2$，所以$f'\left(x\right)=\dfrac{9}{2}x^2-x$，可知$f\left(x\right)$在区间

$\left(\frac{2}{9},+\infty\right)$单调递增，

所以$n=1$时nS_n取得最小值 1，B 正确；

选项 C：$\frac{S_n}{n}=\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}$，故$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为递增数列，C 正确；

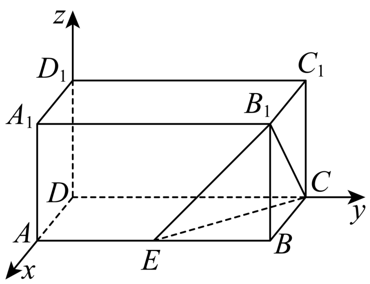
选项 D：$\frac{a_n}{n^2}=-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}$，因为$\frac{a_1}{1}=1,\frac{a_2}{2^2}=1$，所以$\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$不是递减数列，D 错误．

故选：ABC

10．BC

【分析】建立空间直角坐标系，利用向量垂直即可求解 A,根据线线平行即可判断 B，根据向量法即可求解空间距离，判断 CD.

【详解】如图建立空间直角坐标系$D-xyz$，易知$D(0,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$B(1,2,0)$，$B_1(1,2,1)$，$C(0,2,0)$，$E(1,1,0)$．



A，$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-1),\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}=(0,2,-1)\cdot(-1,0,-1)=1\neq0$，所以 A 错误；

B，显然$A_1D//B_1C$，$A_1D\not\subset$平面EB_1C，$B_1C\subset$平面EB_1C，可得$A_1D//$平面EB_1C，所以 B 正确；

C，记直线A_1B的单位方向向量为$\vec{u}$，则$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\left|\overrightarrow{A_1B}\right|}=\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$，又$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$，

所以向量$\overrightarrow{A_1D}$在直线A_1B上的投影向量为$\overrightarrow{A_1Q}=\left(\frac{\overrightarrow{A_1D}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(0,\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$，

则有D到直线A_1B的距离为$DQ=\sqrt{\left|\overrightarrow{A_1D}\right|^2-\left|\overrightarrow{A_1Q}\right|^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，故 C 正确；

D，设平面EB_1C的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，由$\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,-1),\overrightarrow{B_1E}=(0,-1,-1)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{B_1E}\cdot\vec{m}=-y-z=0\\\overrightarrow{B_1C}\cdot\vec{m}=-x-z=0\end{cases}$，令$x=1$，可得$\vec{m}=(1,1,-1)$，

又$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，所以点$D$到平面$EB_1C$的距离$d=\frac{\left|\overrightarrow{DC}\cdot\vec{m}\right|}{|\vec{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 D 错误．

故选：BC

11．ACD

【分析】根据所给新定义理解题意，由组合知识即可判断AB，设u,v中对应项同时为0的共有$m\left(0\le m\le n\right)$个，同时为1的共有$s\left(0\le s\le n-m\right)$个，从而对应项一项为1与另一项为0的共有$\left(n-m-s\right)$个，根据新定义判断CD.

【详解】选项A：由题意，5个位置选则1个位置安排1即可，满足条件的数组共有$C_5^1=5$个，故A正确；

选项B：由题意5个位置选则3个位置安排0即可，满足条件的数组共有$C_5^3=10$个，故B错误；

选项C：设u,v中对应项同时为0的共有$m\left(0\le m\le n\right)$个，同时为1的共有$s\left(0\le s\le n-m\right)$个，从而对应项一项为1与另一项为0的共有$\left(n-m-s\right)$个，这里$n\ge m+s$，

从而$d\left(u,v\right)=n-m-s$，而$d\left(u,w\right)+d\left(v,w\right)=2s+\left(n-m-s\right)=d\left(u,v\right)+2s\ge d\left(u,v\right)$，故C正确，同理D正确.

故选：ACD

12．$-1+2i$

【分析】根据复数z对应的点的坐标写出z，再结合复数的乘法计算得出结果.

【详解】依题意可知$z=2+i$，所以$i\cdot z=i\cdot\left(2+i\right)=-1+2i$.

故答案为：$-1+2i$.

13．6π

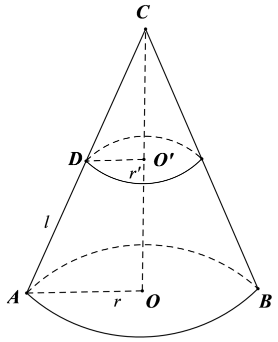
【分析】由已知条件求出圆台的上底面半径，下底面半径及母线长，再利用圆台的侧面积公式计算即可.

【详解】由已知$\triangle ABC$是边长为4的等边三角形，$CO=2\sqrt{3}$，又$CO'=\sqrt{3}$，

可得圆台的上底面半径$r'=1$，下底面半径$r=2$，母线长$l=AD=2$，

则该圆台的侧面积为$\pi\left(r+r'\right)l=\pi\times\left(1+2\right)\times2=6\pi$.

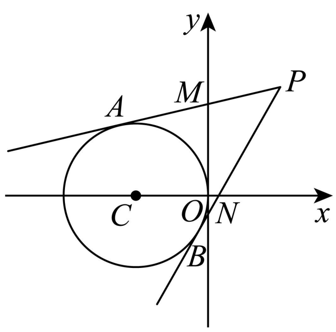
故答案为：6π.



14．$(1,4)$或$(2,3)$

【分析】根据题意，先确定点P满足的条件，得到P点的轨迹方程，再根据P为第一象限的整点确定满足条件的P点的个数即坐标.

【详解】如图：



因为直线PA，PB分别与圆C：$(x+2)^2+y^2=4$相切于A，B两点，且直线PA，PB分别与y轴交于M，N两点，

所以$|PA|=|PB|$，$|AM|=|OM|$，$|BN|=|ON|$，

所以$\triangle PMN$的周长为

$$|PM|+|MN|+|PN|=|PM|+|OM|+|ON|+|PN|=(|PM|+|AM|)+(|BN|+|PN|)$$

$$=|PA|+|PB|=2|PA|=2\sqrt{|PC|^2-|AC|^2}=2\sqrt{|PC|^2-4}=2\sqrt{21},$$

所以$|PC|=5$，设$P(x_0,y_0),x_0>0,y_0>0$，所以$(x_0+2)^2+y_0^2=25$，

因为P为整点，所以点P的坐标为$(1,4)$或$(2,3)$.

故答案为：$(1,4)$或$(2,3)$

15．(1)$\omega=2$

(2)$\left[-\frac{9}{8},2\right]$