专题05 圆锥曲线之焦点三角形

最新模拟精练

1.（2020·广西钦州一中）设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a$>0，$b$>0）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．$P$是$C$上一点，且$F_1P\perp F_2P$．若$\triangle PF_1F_2$的面积为4，则$a$=（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【答案】C

【解析】

（技巧法）
$$S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=b^2\tan 45°=9, b=3$$
$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{1-\frac{9}{a^2}}\therefore a=4$$

（常规法）$\because \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore 3a^2=4c^2$，由椭圆定义，$\left||PF_1|+|PF_2|\right|=2a$，

由$F_1P\perp F_2P$得$|PF_1|^2+|PF_2|^2=(2c)^2$，

$\triangle PF_1F_2$的面积为4，则$\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=4$，即$|PF_1|\cdot|PF_2|=8$，

$\therefore(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=4c^2$，即$4a^2-16=3a^2$，解得$a^2=16$，即$a=4$，故选：C．

2.（2020·伊美区第二中学）设F_1,F_2是双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$的两个焦点，P是双曲线上的一点，且$3|PF_1|=4|PF_2|$，则$\triangle PF_1F_2$的面积等于（　　）

A．$4\sqrt{2}$　　B．$8\sqrt{3}$

C．24　　D．48

【答案】C

【解析】双曲线的实轴长为2，焦距为$|F_1F_2|=10$．根据题意和双曲线的定义知

$2=|PF_1|-|PF_2|=\dfrac{4}{3}|PF_2|-|PF_2|=\dfrac{1}{3}|PF_2|$，所以$|PF_2|=6$，$|PF_1|=8$，

所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，所以$PF_1\perp PF_2$．所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}\times6\times8=24$．

故选：C

3．（2023·四川凉山·统考一模）已知点P在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，$F_1$，$F_2$是椭圆的左、右焦点，若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=3$，且$\triangle PF_1F_2$的面积为2，则$b^2=$（　）

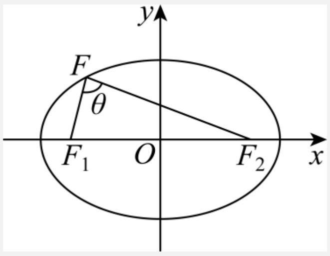
A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

【答案】C

【分析】画出图形，结合解三角形知识、数量积的定义、椭圆的定义以及平方关系即可求解.

【详解】$|\overrightarrow{PF_1}|+|\overrightarrow{PF_2}|=2a$

如图所示：



设$\angle F_1PF_2=\theta$，由题意$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\cos\theta=3$，$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\sin\theta=2$，

两式相比得$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{3}$，

又$\theta\in(0,\pi)$，且$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，

所以$\cos\theta=\frac{3}{5},\sin\theta=\frac{4}{5},|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=5$，

而由余弦定理有$(2c)^2=|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\cos\theta=|PF_1|^2+|PF_2|^2-6$，即

$(2c)^2+6=|PF_1|^2+|PF_2|^2$，

且由椭圆定义有$(2a)^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=(2c)^2+6+10$，

所以$4b^2=4a^2-4c^2=16$，解得$b^2=4$．

故选：C.

4．（2023·海南海口·校考模拟预测）已知F_1、F_2是椭圆$E:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$的左右焦点，点$P(x_0,y_0)$为$E$上一动点，且$|x_0|\le1$，若$I$为$\triangle PF_1F_2$的内心，则$\triangle IF_1F_2$面积的取值范围是（　）

A. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ C. $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right]$ D. $\left[\sqrt{6}-\sqrt{2},3-\sqrt{3}\right]$

【答案】C

【分析】由等面积法求出内切圆的半径的表达式，代入三角形的面积公式，可得所求的三角形的面积.

【详解】由椭圆的方程可得 $a=\sqrt{3}$， $b=\sqrt{2}$， $c=1$，

设内切圆的半径为 r，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\cdot|y_0|=\frac{1}{2}(2a+2c)\cdot r$，

可得 $r=\frac{|y_0|}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}|y_0|$，

而 $\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{2}=1$，所以 $|y_0|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x_0^2}{3}}$，

所以 $r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x_0^2}{3}}$，

所以 $S_{\triangle IF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot r=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1-\frac{x_0^2}{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x_0^2}{3}}$，

因为 $|x_0|\le 1$，

所以 $S_{\triangle IF_1F_2}\in\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right]$，即 $S_{\triangle IF_1F_2}\in\left[\frac{3-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right]$.

故选：C.

5.（2023·湖南益阳·统考模拟预测）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点为 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，直线 $x=c$ 与椭圆 C 相交于 A、B 两点，当三角形 ABF_1 为直角三角形时，椭圆 C 的离心率 e 等于（ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\sqrt{3}-1$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【分析】求出 $|AB|$，根据直角三角形的几何性质可得出 $2c=\frac{b^2}{a}$，可得出关于 a、c 的齐次等式，可得出关于 e 的二次方程，结合 $0<e<1$ 可求得该椭圆的离心率的值.

【详解】将 $x=c$ 代入椭圆方程 C 的方程得 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，则 $|AB|=\frac{2b^2}{a}$，

由对称性可知 $|AF_1|=|BF_1|$，当三角形 ABF_1 为直角三角形时，则该三角形为等腰直角三角形，

因为 F_2 为线段 AB 的中点，则 $|F_1F_2|=\frac{1}{2}|AB|$，可得 $2c=\frac{b^2}{a}$，即 $a^2-c^2=2ac$，

等式 $a^2-c^2=2ac$ 两边同时除以 a^2 可得 $e^2+2e-1=0$，

因为 $0<e<1$，解得 $e=\sqrt{2}-1$.

故选：B.

6．（2023·河南·开封高中校考模拟预测）已知直线 l 与椭圆 $C_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相切于点 P，与圆 $C_2:x^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，圆 C_2 在点 A，B 处的切线交于点 Q，O 为坐标原点，则 $\triangle OPQ$ 的面积的最大值为（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B．1　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．2

【答案】A

【分析】由 Q，A，O，B 四点共圆，结合圆与圆的位置关系得出相交弦方程 AB，再由 AB 与椭圆相切，可得过 P 的切线方程，从而得出 $m=2x_0$，$n=4y_0$，再由椭圆的参数方程和向量的运算，结合正弦函数的性质求出最大值．

【详解】设 $P\left(x_0,y_0\right)$，$Q(m,n)$，由 $AQ\perp AO$，$BQ\perp BO$，可得四点 Q，A，O，B 共圆，

可得以 OQ 为直径的圆，方程为 $(x-\frac{m}{2})^2+(y-\frac{n}{2})^2=\frac{m^2+n^2}{4}$，

联立圆 $C_2:x^2+y^2=4$，相减可得 AB 的方程为 $mx+ny-4=0$，

又 AB 与椭圆相切，若 AB 不与 x 轴垂直时，

当 $y>0$ 时，$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 可化为 $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}$，

设 $y'=-\frac{x}{\sqrt{4-2x^2}}$，在 P 的切线方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{\sqrt{4-2x_0^2}}(x-x_0)=-\frac{x_0}{2y_0}(x-x_0)$，

即 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，同理可得 $y>0$ 时，在 P 的切线方程为 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$，

若 $AB\perp x$ 轴时，在点 $P\left(\pm\sqrt{2},0\right)$ 处的切线方程为 $x=\pm\sqrt{2}$，满足 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$

故过 P 的切线方程为 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$，即为 $2x_0x+4y_0y-4=0$，

由两直线重合的条件可得 $m=2x_0$，$n=4y_0$，

由于 P 在椭圆上，可设 $x_0=\sqrt{2}\cos\alpha$，$y_0=\sin\alpha$，$0\le\alpha<2\pi$，

即有 $m=2\sqrt{2}\cos\alpha$，$n=4\sin\alpha$，

可得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=mx_0+ny_0=4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha=4$，

且 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\sqrt{1+\cos^2\alpha}$，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{8\cos^2\alpha+16\sin^2\alpha}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sin^2\alpha}$，

即有 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\sin\left\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\right\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\right)^2-\left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{8(1+\cos^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)-16}=\frac{1}{2}\sqrt{8(2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-16}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2\sin^2 2\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}|\sin 2\alpha|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $\sin 2\alpha=\pm1$ 即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 时，$S_{\triangle OPQ}$ 的面积取得最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故选：A．

【点睛】关键点睛：在求面积的最大值时，关键在于利用椭圆的参数方程设出点 P 的坐标，进而结合三角恒等变换以及正弦函数的性质得出面积的最大值.

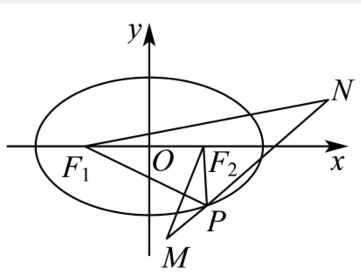
7．（2023·广西桂林·统考模拟预测）已知 F_1，F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点，P 为椭圆上一动点，F_2 关于直线 PF_1 的对称点为 M，F_1 关于直线 PF_2 的对称点为 N，当 $|MN|$ 最大时，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{6}$　　C．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【分析】确定 $F_1\left(-\sqrt{2},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{2},0\right)$，$|PM|+|PN|=4$，当 M，N，P 三点共线时 $|MN|$ 的值最大，计算 $\angle F_1PF_2=60°$，根据余弦定理得到 $|PF_1||PF_2|=\frac{8}{3}$，计算面积即可.

【详解】由椭圆的方程可得 $F_1\left(-\sqrt{2},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{2},0\right)$，连接 PM，PN，



则 $|PM|+|PN|=|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，所以当 M，N，P 三点共线时 $|MN|$ 的值最大，

此时 $\angle MPF_1=\angle F_1PF_2=\angle NPF_2$，$\angle MPF_1+\angle F_1PF_2+\angle F_2PN=180°$，

所以 $\angle F_1PF_2=60°$，

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理可得 $(2c)^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，

即 $8=\left(|PF_1|+|PF_2|\right)^2-3|PF_1||PF_2|$，可得 $|PF_1||PF_2|=\frac{8}{3}$，

所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故选：D

8．（2021·全国·模拟预测）已知椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的左、右两个焦点分别为 F_1、F_2，O 为坐标原点，点 P

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/798056130011006065