专题 08 数列

易错点一：混淆数列与函数的区别（数列求最值问题）

解题模板

1、等差数列的定义

（1）文字语言：一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数；

（2）符号语言：$a_{n+1}-a_n=d$（$n\in N^*$，d 为常数）.

2、等差中项：若三个数 a，A，b 组成等差数列，则 A 叫做 a，b 的等差中项.

3、通项公式与前 n 项和公式

（1）通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$.

（2）前 n 项和公式：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

（3）等差数列与函数的关系

①通项公式：当公差 $d\neq 0$ 时，等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$ 是关于 n 的一次函数，且一次项系数为公差 d .若公差 $d>0$，则为递增数列，若公差 $d<0$，则为递减数列.

②前 n 项和：当公差 $d\neq 0$ 时，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n$ 是关于 n 的二次函数且常数项为 0.

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和.

1、等差数列通项公式的性质：

（1）通项公式的推广：$a_n=a_m+(n-m)d(n,m\in N^*)$.

（2）若 $k+l=m+n(k,l,m,n\in N^*)$，则 $a_k+a_l=a_m+a_n$.

（3）若$\left\{a_n\right\}$的公差为 d，则$\left\{a_{2n}\right\}$也是等差数列，公差为$2d$.

（4）若$\left\{b_n\right\}$是等差数列，则$\left\{pa_n+qb_n\right\}$也是等差数列.

2、等差数列前n项和的性质

（1） $S_{2n}=n(a_1+a_{2n})=\ldots=n(a_n+a_{n+1})$;

（2） $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$;

（3）两个等差数列$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$的前 n 项和S_n，T_n之间的关系为$\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{a_n}{b_n}$.

（4）数列S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…构成等差数列.

3、关于等差数列奇数项和与偶数项和的性质

（1）若项数为$2n$，则$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；

（2）若项数为$2n-1$，则$S_{偶}=(n-1)a_n$，$S_{奇}=na_n$，$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$.

最值问题：解决此类问题有两种思路：

一是利用等差数列的前n项和公式，可用配方法求最值，也可用顶点坐标法求最值；

二是依据等差数列的通项公式$a_n=a_1+\left(n-1\right)d=dn+\left(a_1-d\right)$，当$d>0$时，数列一定为递增数列，当$d<0$时，数列一定为递减数列．所以当$a_1>0$，且$d<0$时，无穷等差数列的前$n$项和有最大值，其最大值是所有非负项的和；当$a_1<0$，且$d>0$时，无穷等差数列的前$n$项和有最小值，其最小值是所有非正项的和，求解非负项是哪一项时，只要令$a_n\geq 0$即可

易错提醒：数列是一种特殊的函数，在求解数列问题时有时可以利用函数的性质，但是在利用函数单调性求解数列问题，要注意n的取值不是连续实数，忽略这一点很容易出错.

举一反三

例 ．已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n，且$a_4=1$，$S_5=10$，求S_n取得最大值时对应的 n 值.

变式 1．数列$\left\{a_n\right\}$是等差数列，$a_1=50$，$d=-0.6$.

(1)从第几项开始有$a_n<0$？

(2)求此数列的前n项和的最大值.

变式 2．记S_n为等差数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和，已知$a_1=-7$，$S_3=-15$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求S_n的最小值．

变式3．等差数列$\{a_n\}$，$S_{11}=-11$，公差$d=-3$．

(1)求通项公式和前n项和公式；

(2)当n取何值时，前n项和最大，最大值是多少．

易错题通关

1．已知数列$\{a_n\}$是等差数列，若$a_9+a_{12}<0$，$a_{10}\cdot a_{11}<0$，且数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，有最大值，当$S_n>0$时，n的最大值为（　　）

A．20　　B．17　　C．19　　D．21

2．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$7a_5+5a_9=0$，且$a_9>a_5$，则S_n取得最小值时n的值为（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

3．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=25, 4a_{n+1}=4a_n-7$, 若其前n项和为Sn, 则Sn的最大值为（　　）

A．15　　B．750　　C．$\frac{765}{4}$　　D．$\frac{705}{2}$

4．若$\{a_n\}$是等差数列，首项$a_1>0$，$a_{2021}+a_{2022}>0$，$a_{2021}\cdot a_{2022}<0$，则使前n项和$S_n>0$成立的最大自然数n是（　　）

A．2021　　B．2022　　C．4042　　D．4043

5．设$\{a_n\}$是等差数列，S_n是其前n项和，且$S_5<S_6$，$S_6=S_7>S_8$，则下列结论正确的是（　　）．

A．$d>0$

B．$a_7=0$

C．$S_9>S_5$

D．S_6与S_7均为S_n的最大值

6．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差为d．已知$a_4=12$，$S_{14}>0$，$S_{15}<0$，则下列结论正确的是（　　）

A．$a_7 < 0$

B．$-\frac{24}{7} < d < -3$

C．$S_7 = 84$

D．设$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，则$T_n > 0$时，$n$的最大值为27

7．已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n = an^2 + 11n + b\left(a,b \in \mathrm{R}, n \in \mathrm{N}^*\right)$，则下列说法正确的是（　）

A．$b = 0$是$\{a_n\}$为等差数列的充要条件

B．$\{a_n\}$可能为等比数列

C．若$a > 0$，$b \in \mathrm{R}$，则$\{a_n\}$为递增数列

D．若$a = -1$，则S_n中，S_5，S_6最大

8．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n = -n^2 + 9n\left(n \in \mathbf{N}^*\right)$，则下列结论正确的是（　）

A．$\{a_n\}$是等差数列

B．$a_4 + a_6 = 0$

C．$a_9 < a_{10}$

D．S_n有最大值$\frac{81}{4}$

9．数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n = -n^2 + 7n$，则下列说法正确的是（　）

A．$\{a_n\}$是递增数列

B．$a_{10} = -14$

C．当$n > 4$时，$a_n < 0$

D．当$n = 3$或4时，S_n取得最大值

10．等比数列$\{a_n\}$中$a_3 = 16$，$a_6 = 2$，则数列$\{\log_2 a_n\}$的前n项和的最大值为______.

11．记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1 > 0$，$a_2 + a_{2023} = 0$，则当S_n取得最大值时，n =______.

易错点二：忽视两个“中项”的区别（等比数列利用中项求其它）

解题模板

1、等比数列的定义：如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比等于同一个非零常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母q表示。

数学语言表达式：$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$（$n \geq 2$，q为非零常数).

2、等比中项性质：如果三个数a，G，b成等比数列，那么G叫做a与b的等比中项，其中$G=\pm\sqrt{ab}$.

注意：同号的两个数才有等比中项。

3、通项公式及前n项和公式

（1）通项公式：若等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比是q，则其通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}$；

通项公式的推广：$a_n=a_mq^{n-m}$.

（2）等比数列的前n项和公式：当$q=1$时，$S_n=na_1$；当$q\neq1$时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

已知$\{a_n\}$是等比数列，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和.（等比中项）

1、等比数列的基本性质

（1）相隔等距离的项组成的数列仍是等比数列，即a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，…仍是等比数列，公比为q^m.

（2）若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$（项数相同）是等比数列，则$\{\lambda a_n\}(\lambda\neq0)$，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$，$\{a_n^2\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$，$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$仍是等比数列.

（3）若$k+l=m+n(k,l,m,n\in N^*)$，则有$a_k\cdot a_l=a_m\cdot a_n$

口诀：角标和相等，项的积也相等　推广：$a_n^2=a_{n-k}\cdot a_{n+k}(n,k\in N^*,\text{且}n-k\geq1)$

（4）若$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$，则$\{\log_a a_n\}$（$a>0$且$a\neq1$）是以$\log_a a_1$为首项，$\log_a q$为公差的等差数列。

（5）若$\{a_n\}$是等比数列，$T_k=a_1a_2a_3\ldots a_k$，则$T_k,\frac{T_{2k}}{T_k},\frac{T_{3k}}{T_{2k}},\cdots(k\in N^*)$构成公比为$q^{k^2}$的等比数列。

易错提醒：若a,b,c成等比数列，则b为a和c的等比中项。只有同号的两数才有等比中项，“$b^2=ac$”仅是“b为a和c的等比中项”的必要不充分条件，在解题时务必要注意此点。

举一反三

例．已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，则a_3+a_5等于（　）

A．5　　B．10　　C．15　　D．20

变式 1． 已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d\neq 0$，且a_1，a_3，a_9成等比数列，则$\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=$(　)

A．$\dfrac{13}{16}$　　B．$\dfrac{10}{13}$　　C．$\dfrac{11}{13}$　　D．$\dfrac{15}{16}$

变式 2． 已知$a,b,c\in\mathbf{R}$，如果-1，a，b，c，-9成等比数列，那么（　）

A．$b=3$，$ac=9$　　B．$b=-3$，$ac=9$

C．$b=3$，$ac=-9$　　D．$b=-3$，$ac=-9$

变式 3． 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_6=5$，$a_3\cdot a_5=4$，则$\tan\left(\dfrac{\pi a_4}{3}\right)=$（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$-\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

易错题通关

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差不为 0，若满足a_1、a_3、a_4成等比数列，则$\dfrac{S_3-S_2}{S_5-S_3}$的值为（　）

A．2　　B．3　　C．$\dfrac{1}{5}$　　D．不存在

2．已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_5=14$，且a_1，a_2，a_5成等比数列，则数列$\{a_n\}$的前 9 项的和为（　）

A．1　　B．2　　C．81　　D．80

3．已知$a=5+2\sqrt{6}$，$c=5-2\sqrt{6}$，则使得a,b,c成等比数列的充要条件的b值为（　）

A．1　　B．± 1　　C．5　　D．$\pm 2\sqrt{6}$

4．已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为 0，$a_1=1$且a_2,a_4,a_8成等比数列，则错误的是（　）

A．$\dfrac{a_1+a_9}{a_2+a_3}=2$　　B．$\dfrac{a_4}{a_3}>\dfrac{a_5}{a_4}$　　C．$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{n+1}{2}$　　D．$S_n\geq a_n$

5．正项等比数列$\{a_n\}$中，$4a_3$是a_5与$-2a_4$的等差中项，若$a_2=\dfrac{1}{2}$，则$a_3a_5=$（　）

A．4　　B．8　　C．32　　D．64

6．已知实数 4，m，9 构成一个等比数列，则圆锥曲线$\dfrac{x^2}{m}+y^2=1$的离心率为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$　　B．$\sqrt{7}$　　C．$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$或$\sqrt{7}$　　D．$\dfrac{5}{6}$或 7

7．数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=1$，$a_5=4$，命题$p:a_3=2$，命题$q:a_3$是a_1、a_5的等比中项，则p是q的（　）条件

A．充要　　B．充分不必要　　C．必要不充分　　D．既不充分也不必要

8．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_n=2a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则$a_1a_3+a_2a_4+\cdots+a_{10}a_{12}=$（　）.

A．$\frac{4}{3}\times\left(4^{10}-1\right)$　　B．$\frac{4}{3}\times\left(4^{11}-1\right)$

C．$\frac{16}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{11}\right]$　　D．$\frac{4}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right]$

9．已知$\{a_n\}$是等差数列，公差$d<0$，前n项和为S_n，若a_3，a_4，a_8成等比数列，则(　　)

A．$a_1>0$，$S_4>0$　B．$a_1<0$，$S_4<0$　C．$a_1>0$，$S_4<0$　D．$a_1<0$，$S_4>0$

10．数 1 与 4 的等差中项，等比中项分别是（　）

A．$\pm\frac{5}{2}$，±2　　B．$\frac{5}{2}$，±2　　C．$\frac{5}{2}$，2　　D．$\pm\frac{5}{2}$，2

11．已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=2$，其中公差$d\neq0$，若a_5 是a_3和a_8的等比中项，则$S_{18}=$（　）

A．398　　B．388

C．189　　D．199

易错点三：忽略等比数列求和时对q的讨论（等比数列求和）

解题模板

等比数列前n项和的性质

（1）在公比$q\neq-1$或$q=-1$且n为奇数时，S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，……仍成等比数列，其公比为q^n；

（2）对$\forall m,p\in N^*$，有$S_{m+p}=S_m+q^mS_p$；

（3）若等比数列$\{a_n\}$共有$2n$项，则$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$，其中$S_{偶}$，$S_{奇}$分别是数列$\{a_n\}$的偶数项和与奇数项和；

（4）等比数列的前n项和$S_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n$，令$k=\frac{a_1}{1-q}$，则$S_n=k-k\cdot q^n$（$k$为常数，且$q\neq0,1$）

易错提醒：注意等比数列的求和公式是分段表示的：$S_n=\begin{cases}na_1,q=1\\ \dfrac{a_1(1-q)^n}{1-q},q\neq1\end{cases}$，所以在利用等比数列求和公式求和时要先判断公比是否可能为1,，若公比未知，则要注意分两种情况 $q=1$ 和 $q\neq1$ 讨论..

举一反三

例 ．设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n.已知$S_{n+1}=2S_n+\frac{1}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$S_6=$____________.

变式 1．记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若$S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则$S_8=$_______.

变式 2．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_4=-4$，令$b_n=|a_n|$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和S_n.

变式 3．数列$\{a_n\}$前n项和S_n满足$a_{n+1}=2S_n+3,a_1=3$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_3\frac{a_n^3}{9}$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)对任意$m\in\mathrm{N}^*$，将数列$\{b_n\}$中落入区间(a_m,a_{m+1})内项的个数记为c_m，求数列$\{c_n\}$前m项和T_m.

易错题通关

1．已知$\{a_n\}$为等比数列，其公比$q=2$，前 7 项的和为 1016，则$\log_2(a_3a_5)$的值为（　　）

A．8　　B．10　　C．12　　D．16

2．已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1,9S_4-10S_2=0$，则$S_5=$（　　）

A．$\frac{13}{9}$　　B．$\frac{40}{27}$　　C．$\frac{121}{81}$　　D．$\frac{80}{27}$

3．已知$a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+1$（$n\geq3$，$n\in\mathrm{N}^*$），S_n为其前n项和，则$S_{60}=$（　　）

A．$2^{30}-31$　　B．$4^{30}-31$　　C．$2^{30}-30$　　D．$4^{30}-30$

4．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_5=8$，则（　　）

A．$\{a_na_{n+1}\}$的公比为 4　　B．$\{\log_2a_n\}$的前 20 项和为 170

C．$\{a_n\}$的前 10 项积为2^{35}　　　D．$\{a_n+a_{n+1}\}$的前 n 项和为$\frac{3}{2}\left(2^{n-1}-1\right)$

5．已知正项等比数列$\{a_n\}$的前 n 和为S_n，若$S_3=13$，且$a_5=a_4+6a_3$，则满足$S_n<123$的 n 的最大值为______.

6．已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_2a_7=3a_4^2$，且－3，S_4，$9a_3$成等差数列，则数列$\{a_n\}$的通项$a_n=$______.

7．设S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_4-a_2=12$，$a_3-a_1=6$，则$\frac{S_6}{S_3}=$________

8．已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=2$，且$S_3=2a_3-1$，则$S_n=$__________.

9．已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2=9$，$a_2S_4-10a_1-90=0$，则$a_9=$______.

10．数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{n+1}-2a_n=n+1$，则满足$S_n>2048$的最小的自然数 n 的值为__________.

11．在正项等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=2$，$S_3=26$，则公比$q=$______.

易错点四： 由S_n求a_n时忽略对“$n=1$”的检验（求通项公式）

解题模板

类型 1　观察法：

已知数列前若干项，求该数列的通项时，一般对所给的项观察分析，寻找规律，从而根据规律写出此数列的一个通项.

类型 2　公式法：

若已知数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系，求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 可用公式 $a_n=\begin{cases}S_1 & ,(n=1)\\ S_n-S_{n-1},&(n\geq 2)\end{cases}$ 构造两式作差求解.

用此公式时要注意结论有两种可能，一种是“一分为二”，即分段式；另一种是“合二为一”，即a_1和a_n合为一个表达，（要先分$n=1$和$n\geq 2$两种情况分别进行运算，然后验证能否统一）.

类型 3　累加法：

形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）可构造：

$$\begin{cases} a_n-a_{n-1}=f(n-1) \\ a_{n-1}-a_{n-2}=f(n-2) \\ \ldots \\ a_2-a_1=f(1) \end{cases}$$

将上述 m_2 个式子两边分别相加，可得：$a_n=f(n-1)+f(n-2)+\ldots f(2)+f(1)+a_1,(n\geq 2)$

①若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数，累加后可转化为等差数列求和；

② 若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数，累加后可转化为等比数列求和；

③若 $f(n)$ 是关于 n 的二次函数，累加后可分组求和；

④若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数，累加后可裂项求和.

类型 4　累乘法：

形如 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$ $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)\right)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）可构造：

$$\begin{cases} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n-1) \\ \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=f(n-2) \\ \ldots \\ \dfrac{a_2}{a_1}=f(1) \end{cases}$$

将上述 m_2 个式子两边分别相乘，可得：$a_n=f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot\ldots\cdot f(2)f(1)a_1,(n\geq 2)$

有时若不能直接用，可变形成这种形式，然后用这种方法求解.

类型 5　构造数列法：

（一）形如 $a_{n+1}=pa_n+q$ （其中 p,q 均为常数且 $p\neq 0$ ）型的递推式：

（1）若 $p=1$ 时，数列$\{a_n\}$为等差数列；

（2）若 $q=0$ 时，数列$\{a_n\}$为等比数列；

（3）若 $p\neq 1$ 且 $q\neq 0$ 时，数列$\{a_n\}$为线性递推数列，其通项可通过待定系数法构造等比数列来求．方法有如下两种：

法一：设 $a_{n+1}+\lambda=p(a_n+\lambda)$，展开移项整理得 $a_{n+1}=pa_n+(p-1)\lambda$，与题设 $a_{n+1}=pa_n+q$ 比较系数（待定系数法）得 $\lambda=\frac{q}{p-1},(p\neq 0)\Rightarrow a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p(a_n+\frac{q}{p-1})\Rightarrow a_n+\frac{q}{p-1}=p(a_{n-1}+\frac{q}{p-1})$，即 $\left\{a_n+\frac{q}{p-1}\right\}$ 构成以 $a_1+\frac{q}{p-1}$ 为首项，以 p 为公比的等比数列．再利用等比数列的通项公式求出 $\left\{a_n+\frac{q}{p-1}\right\}$ 的通项整理可得 a_n.

法二：由 $a_{n+1}=pa_n+q$ 得 $a_n=pa_{n-1}+q(n\geq 2)$ 两式相减并整理得 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=p$, 即 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 构成以 a_2-a_1 为首项，以 p 为公比的等比数列．求出 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的通项再转化为类型III（累加法）便可求出 a_n.

（二）形如 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ $(p\neq 1)$ 型的递推式：

（1）当 $f(n)$ 为一次函数类型（即等差数列）时：

法一：设 $a_n+An+B=p\left[a_{n-1}+A(n-1)+B\right]$，通过待定系数法确定 A、B 的值，转化成以 a_1+A+B 为首项，以 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$ 为公比的等比数列 $\{a_n+An+B\}$，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n+An+B\}$ 的通项整理可得 a_n.

法二：当 $f(n)$ 的公差为 d 时，由递推式得：$a_{n+1}=pa_n+f(n)$，$a_n=pa_{n-1}+f(n-1)$ 两式相减得：$a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})+d$，令 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 得：$b_n=pb_{n-1}+d$ 转化为类型V㈠求出 b_n，再用类型III（累加法）便可求出 a_n.

（2）当 $f(n)$ 为指数函数类型（即等比数列）时：

法一：设 $a_n+\lambda f(n)=p\left[a_{n-1}+\lambda f(n-1)\right]$，通过待定系数法确定 λ 的值，转化成以 $a_1+\lambda f(1)$ 为首项，以 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$ 为公比的等比数列 $\{a_n+\lambda f(n)\}$，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n+\lambda f(n)\}$ 的通项整理可得 a_n.

法二：当 $f(n)$ 的公比为 q 时，由递推式得：$a_{n+1}=pa_n+f(n)$——①，$a_n=pa_{n-1}+f(n-1)$，两边同时乘以 q 得 $a_nq=pqa_{n-1}+qf(n-1)$——②，由①②两式相减得 $a_{n+1}-a_nq=p(a_n-qa_{n-1})$，

即$\dfrac{a_{n+1}-qa_n}{a_n-qa_{n-1}}=p$，在转化为类型V㈠便可求出$a_n$.

法三：递推公式为$a_{n+1}=pa_n+q^n$（其中p，q均为常数）或$a_{n+1}=pa_n+rq^n$（其中p，q，r均为常数）时，要先在原递推公式两边同时除以q^{n+1}，得：$\dfrac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{a_n}{q^n}+\dfrac{1}{q}$，引入辅助数列$\{b_n\}$（其中$b_n=\dfrac{a_n}{q^n}$），得：$b_{n+1}=\dfrac{p}{q}b_n+\dfrac{1}{q}$再应用类型V㈠的方法解决.

（3）当$f(n)$为任意数列时，可用通法：

在$a_{n+1}=pa_n+f(n)$两边同时除以p^{n+1}可得到$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{f(n)}{p^{n+1}}$，令$\dfrac{a_n}{p^n}=b_n$，则$b_{n+1}=b_n+\dfrac{f(n)}{p^{n+1}}$，在转化为类型III（累加法），求出$b_n$之后得$a_n=p^nb_n$.

类型6　对数变换法：

形如$a_{n+1}=pa^q\,(p>0,a_n>0)$型的递推式：

在原递推式$a_{n+1}=pa^q$两边取对数得$\lg a_{n+1}=q\lg a_n+\lg p$，令$b_n=\lg a_n$得：$b_{n+1}=qb_n+\lg p$，化归为$a_{n+1}=pa_n+q$型，求出$b_n$之后得$a_n=10^{b_n}$.（注意：底数不一定要取10，可根据题意选择）.

类型7　 倒数变换法：

形如$a_{n-1}-a_n=pa_{n-1}a_n$（p为常数且$p\neq 0$）的递推式：两边同除于$a_{n-1}a_n$，转化为$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_{n-1}}+p$形式，化归为$a_{n+1}=pa_n+q$型求出$\dfrac{1}{a_n}$的表达式，再求$a_n$；

还有形如$a_{n+1}=\dfrac{ma_n}{pa_n+q}$的递推式，也可采用取倒数方法转化成$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{m}{q}\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{m}{p}$形式，化归为$a_{n+1}=pa_n+q$型求出$\dfrac{1}{a_n}$的表达式，再求$a_n$.

类型8　 形如$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$型的递推式：

用待定系数法，化为特殊数列$\{a_n-a_{n-1}\}$的形式求解. 方法为：设$a_{n+2}-ka_{n+1}=h(a_{n+1}-ka_n)$，比较系数得$h+k=p,-hk=q$，可解得$h$、$k$，于是$\{a_{n+1}-ka_n\}$是公比为$h$的等比数列，这样就化归为$a_{n+1}=pa_n+q$型.

总之，求数列通项公式可根据数列特点采用以上不同方法求解，对不能转化为以上方法求解的数列，可用归纳、猜想、证明方法求出数列通项公式a_n.

易错提醒：在数列问题中，数列的通项 a_n 与其前 n 项和 S_n 之间关系如下 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2,n\in N^*)\end{cases}$，在使用这个关系式时，要牢牢记住其分段的特点。当题中给出数列｛a_n｝的 a_n 与 S_n 关系时，先令 $n=1$ 求出首项 a_1，然后令 $n\geq 2$ 求出通项 $a_n=S_n-S_{n-1}$，最后代入验证。解答此类题常见错误为直接令 $n\geq 2$ 求出通项 $a_n=S_n-S_{n-1}$，也不对 $n=1$ 进行检验.

举一反三

例．已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，其中$\{a_n\}$的前项和为S_n，且$2a_n-S_n=2$，$b_n=\log_2(S_n+2)$.

(1)分别求出数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)记$T_n=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}$，求证：$T_n<3$.

变式 1．数列 a_n 的前 n 项和 S_n，已知 $a_2=a_1+4$，$2S_n=na_n+n+k\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，$k$ 为常数.

(1)求常数 k 和数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和为T_n，证明：$\frac{4}{3}-\frac{1}{2n+1}\leq T_n<\frac{3}{2}$.

变式 2．设各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$4S_n=(a_n+3)(a_n-1)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记$b_n=\frac{a_n}{3^{n-1}}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n.证明：对一切正整数n，$T_n<6$.

变式 3．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n-1$（$n\in\mathrm{N}^*$）.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=a_n\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

易错题通关

1．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,a_2=9$，且$S_{n+1}+3a_n=S_n+\lambda a_n+3^n\left(\lambda\in\mathbf{R}\right)$.

(1)当 $a_1=2$ 时，求 S_3；

(2)若 $\{a_n\}$ 为等比数列，求 λ 的值.

2．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=1$，且 $2n+2$ 与 $4S_n$ 的等差中项为 $S_{n+1}, n Î$ N*.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2)设 $b_n=(-1)^n \times \dfrac{3a_n+1}{a_n a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

3．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_1=1$ 且 $a_{n+1}+2S_nS_{n+1}=0$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求 a_n；

(2)记 $b_n==\dfrac{2^{\frac{1}{S_n}}S_n}{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

4．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=2$，$a_2=4$，当 $n\geq 2$ 时，$\left\{\dfrac{S_{n+1}-S_n}{a_{n-1}}\right\}$ 是 4 的常数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)当 $n\geq 2$ 时，设数列 $\left\{\dfrac{n+2}{n(n+1)a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<\dfrac{1}{2}$.

5．在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-1$，S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=n\cdot 3^{a_n+2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

6．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n，且 $6a_n=5S_n+2$.

(1)证明：$\{a_n\}$ 是等比数列.

(2)求数列 $\left\{\dfrac{na_n}{2}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

7．已知首项为 4 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}+a_n=S_n+6\times 5^n$.

(1)求证：数列 $\{a_n-5^n\}$ 为等比数列；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

8．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_n=n(a_n+6)$，$a_6=16$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\left\{\frac{1}{na_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$\frac{1}{6}\le T_n<\frac{3}{8}$．

9．设各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=\left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2$．

(1)求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=a_{2n}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求$T_n\ge 780$时，n的最小值．

10．已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1=1$，$S_{n+1}+S_n=2n^2+2n+1$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_1=1$，$b_{n+1}+(-1)^n b_n=a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

11．已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_2=3$，$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$（$n\in\mathbf{N}^*$且$n\ge 2$）．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\frac{a_n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

易错点五：裂项求和留项出错（数列求和）

解题模板

常见的裂项技巧

积累裂项模型 1：等差型

（1）$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

（2）$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$

（3）$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

（4）$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

（5）$\frac{1}{n(n^2-1)}=\frac{1}{n(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)})$

（6）$\frac{n^2}{4n^2-1}=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\right]$

（7）$\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{4(n+1)-(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=4(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$

（8）$n(n+1)=\frac{1}{3}\left[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\right].$

（9）$n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}\left[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\right]$

（10）$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$

（11）$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

（12）$\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$

积累裂项模型 2：根式型

（1）$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

（2）$\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$

（3）$\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

（4）$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

（5）$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$

$=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}(\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1})=\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{2}$

（6）$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\left[(n+1)\sqrt{n}\right]^2-(n\sqrt{n+1})^2}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

积累裂项模型 3：指数型

（1）$\frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\frac{(2^{n+1}-1)-(2^n-1)}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$

（2）$\frac{3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1})$

（3）$\frac{n+2}{n(n+1)\cdot 2^n}=\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)\cdot 2^n}=\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$

（4）$\dfrac{(4n-1)\cdot 3^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{9}{(n+2)}-\dfrac{1}{n}\right]\cdot 3^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3^{n+1}}{n+2}-\dfrac{3^{n-1}}{n}\right)$

（5）$\dfrac{(2n+1)\cdot(-1)^n}{n(n+1)}=\dfrac{(-1)^n}{n}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

（6）$a_n\ =\ n\cdot 3^{n-1}$，设 $a_n=(an+b)3^n-[a(n-1)+b]\cdot 3^{n-1}$，易得 $a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{4}$，

于是 $a_n=\dfrac{1}{4}(2n-1)3^n-\dfrac{1}{4}(2n-3)\cdot 3^{n-1}$

（7）$\dfrac{(-1)^n(n^2+4n+2)2^n}{n\cdot 2^n\cdot(n+1)2^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n(n^2+4n+2)}{n\cdot(n+1)2^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n\left[n^2+n+2(n+1)+n\right]}{n\cdot(n+1)2^{n+1}}$

$=\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}+(-1)^n\left[\dfrac{1}{n\cdot 2^n}+\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{2})^n+\left[\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]$

积累裂项模型 4：对数型

$\log_a\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\log_a^{a_{n+1}}-\log_a a_n$

积累裂项模型 5：三角型

（1）$\dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{1}{\sin(\alpha-\beta)}(\tan\alpha-\tan\beta)$

（2）$\dfrac{1}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}=\dfrac{1}{\sin 1^\circ}\left[\tan(n+1)^\circ-\tan n^\circ\right]$

（3）$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{\tan(\alpha-\beta)}(\tan\alpha-\tan\beta)-1$

（4）$a_n=\tan\cdot\tan(n-1);\tan 1=\tan\left[n-(n-1)\right]=\dfrac{\tan n-\tan(n-1)}{1+\tan n\cdot\tan(n-1)}$，

则 $\tan n\cdot\tan(n-1)=\dfrac{\tan n-\tan(n-1)}{\tan 1}-1,a_n=\dfrac{\tan n-\tan(n-1)}{\tan 1}-1$

积累裂项模型 6：阶乘

（1）$\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

（2）$\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\dfrac{n+2}{n!(n+2)^2}=\dfrac{1}{n!(n+2)}=\dfrac{n+1}{(n+2)!}=\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+2)!}$

常见放缩公式：

（1）$\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\left(n\geq 2\right)$；（2）$\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$；

（3）$\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{4}{4n^2}<\dfrac{4}{4n^2-1}=2\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$；

（4）$T_{r+1}=C_n^r\cdot\dfrac{1}{n^r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\dfrac{1}{n^r}<\dfrac{1}{r!}<\dfrac{1}{r(r-1)}=\dfrac{1}{r-1}-\dfrac{1}{r}\left(r\geq 2\right)$；

（5）$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}<1+1+\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}<3$；

（6）$\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=2\left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)(n\geq 2)$；

（7）$\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2\left(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$；

（8）$\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n-\dfrac{1}{2}}+\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\sqrt{2}\left(-\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}\right)$；

（9）$\dfrac{2^{n}}{\left(2^{n}-1\right)^{2}}=\dfrac{2^{n}}{\left(2^{n}-1\right)\left(2^{n}-1\right)}<\dfrac{2^{n}}{\left(2^{n}-1\right)\left(2^{n}-2\right)}=\dfrac{2^{n-1}}{\left(2^{n}-1\right)\left(2^{n-1}-1\right)}=\dfrac{1}{2^{n-1}-1}-\dfrac{1}{2^{n}-1}(n\geq 2)$；

（10）$\dfrac{1}{\sqrt{n^{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{n\cdot n^{2}}}<\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$=\left[\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}$

$<2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)(n\geq 2)$；

（11）$\dfrac{1}{\sqrt{n^{3}}}=\dfrac{2}{\sqrt{n^{2}\cdot n}+\sqrt{n\cdot n^{2}}}<\dfrac{2}{n\sqrt{n-1}+(n-1)\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{(n-1)n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}$

$=\dfrac{-2\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{(n-1)n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}(n\geq 2)$；

（12）$\dfrac{1}{2^{n}-1}=\dfrac{1}{(1+1)^{n}-1}<\dfrac{1}{C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n}^{2}-1}=\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n+1}$；

（13）$\dfrac{1}{2^{n}-1}<\dfrac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}-1\right)\left(2^{n}-1\right)}=\dfrac{1}{2^{n-1}-1}-\dfrac{1}{2^{n}-1}(n\geq 2)$.

（14）$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

易错提醒：用裂项相消法求和时，裂项后可以产生连续相互抵消的项，但是要注意抵消后并不一定只剩下第一项和最后一项，也有可能前面剩两项，后面也剩两项，一般来说前面剩余几项后面也剩余几项，若前面剩余的正数项，则后面剩余的是负数项。

举一反三

例．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$S_{n+1}+S_n=(n+1)^2$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$，证明：$b_1+b_2+\cdots b_n<1$．

变式1．记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，满足$a_1=3$，$S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{2}{3}$．

变式2．已知首项为1的数列$\{a_n\}$，其前n项利为S_n，且数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是公差为1的等差数列$\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$c_n=\dfrac{4S_n}{a_n\cdot a_{n+1}}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$．

变式3．已知数列$\{a_n\}$为非零数列，且满足$(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$．

(1)求a_1及数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，且满足$b_n=\dfrac{2^n}{a_na_{n+1}}$，证明：$T_n<1$．

易错题通关

1．已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1=\dfrac{1}{2}$，且$\dfrac{a_{n+1}}{3},S_{n+1},3S_{n+1}-1$成等比数列．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2)设$b_n=S_nS_{n+1}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，证明：$3T_n<a_1$．

2．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=2$，$a_2=4$，当$n\geq 2$时，$\left\{\dfrac{S_{n+1}-S_n}{a_{n-1}}\right\}$是4的常数列．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)当$n\geq 2$时，设数列$\left\{\dfrac{n+2}{n(n+1)a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n<\dfrac{1}{2}$.

3．在数列$\{a_n\}$中，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，且满足$S_n+2=2a_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$C_n=\dfrac{2^n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$.求数列$\{C_n\}$的前$n$项和$T_n$.

4．设数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，$a_1=3$，$a_{n+1}-S_n=1\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

(1)求a_2，及$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\log_2 a_n$，证明：$\dfrac{1}{b_1b_2}+\dfrac{1}{b_2b_3}+\cdots+\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}<1$.

5．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_4=4$，数列$\{b_n\}$的前n项之积为T_n，$b_1=\dfrac{1}{3}$，且$S_n=\log_{\sqrt{3}}(T_n)$.

(1)求T_n；

(2)令$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，求正整数n，使得“$c_{n-1}=c_n+c_{n+1}$”与“c_n是c_{n-1}，c_{n+1}的等差中项”同时成立；

(3)设$d_n=2a_n+7$，$e_n=\dfrac{(-1)^n(d_n+2)}{d_nd_{n+1}}$，求数列$\{e_n\}$的前$2n$项和$Y_{2n}$.

6．设$\{a_n\}$是等比数列的公比大于0，其前n项和为S_n，$\{b_n\}$是等差数列，已知$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$.

(1)求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式

(2)设$d_n=a_nb_n$，求$\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$　；

(3)设$c_n=\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$.

7．已知数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{3}{a_2}+\dfrac{5}{a_3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{a_n}=n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式

(2)若$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，证明：$S_n<\dfrac{1}{2}$.

8．设S_n为数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，$S_n=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}$.

(1)求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)若数列$\left\{\dfrac{S_{2n}+15}{a_n}\right\}$的最小项为第$m$项，求$m$；

(3)设$b_n=\dfrac{2a_n}{\left(a_n-2\right)^2}$，数$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n<\dfrac{13}{2}$

9．已知正项数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为$S_n, a_1=1$，且$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\left(n\geq 2\right)$.

(1)求a_n；

(2)设$b_n=\dfrac{1}{S_n}$，数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和为T_n，证明：$T_n<\dfrac{7}{4}$.

10．已知数列满足$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，且$a_1=4, a_2=12$.

(1)证明：$\left\{a_{n+1}-2a_n\right\}$是等比数列，并求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)已知数列$\left\{b_n\right\}$满足$b_n=\log_2\dfrac{a_n}{n}$，求$\left\{b_n\right\}$的前n项和T_n.

专题08 数列

易错点一：混淆数列与函数的区别（数列求最值问题）

解题模板

1、等差数列的定义

（1）文字语言：一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数；

（2）符号语言：$a_{n+1}-a_n=d$ ($n\in N^*$，d 为常数).

2、等差中项：若三个数 a，A，b 组成等差数列，则 A 叫做 a，b 的等差中项.

3、通项公式与前 n 项和公式

（1）通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$.

（2）前 n 项和公式：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

（3）等差数列与函数的关系

①通项公式：当公差 $d\neq 0$ 时，等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$ 是关于 n 的一次函数，且一次项系数为公差 d .若公差 $d>0$，则为递增数列，若公差 $d<0$，则为递减数列.

②前 n 项和：当公差 $d\neq 0$ 时，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n$ 是关于 n 的二次函数且常数项为0.

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和.

1、等差数列通项公式的性质：

（1）通项公式的推广：$a_n=a_m+(n-m)d(n,m\in N^*)$.

（2）若 $k+l=m+n(k,l,m,n\in N^*)$，则 $a_k+a_l=a_m+a_n$.

（3）若$\left\{a_n\right\}$的公差为 d，则$\left\{a_{2n}\right\}$也是等差数列，公差为$2d$．

（4）若$\left\{b_n\right\}$是等差数列，则$\left\{pa_n+qb_n\right\}$也是等差数列．

2、等差数列前n项和的性质

（1）$S_{2n}=n(a_1+a_{2n})=\ldots=n(a_n+a_{n+1})$；

（2）$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$；

（3）两个等差数列$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$的前 n 项和S_n，T_n之间的关系为$\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{a_n}{b_n}$．

（4）数列S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…构成等差数列．

3、关于等差数列奇数项和与偶数项和的性质

（1）若项数为$2n$，则$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$；

（2）若项数为$2n-1$，则$S_{偶}=(n-1)a_n$，$S_{奇}=na_n$，$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{n}{n-1}$．

最值问题：解决此类问题有两种思路：

一是利用等差数列的前n项和公式，可用配方法求最值，也可用顶点坐标法求最值；

二是依据等差数列的通项公式$a_n=a_1+\left(n-1\right)d=dn+\left(a_1-d\right)$，当$d>0$时，数列一定为递增数列，当$d<0$时，数列一定为递减数列．所以当$a_1>0$，且$d<0$时，无穷等差数列的前$n$项和有最大值，其最大值是所有非负项的和；当$a_1<0$，且$d>0$时，无穷等差数列的前$n$项和有最小值，其最小值是所有非正项的和，求解非负项是哪一项时，只要令$a_n\geq 0$即可

易错提醒：数列是一种特殊的函数，在求解数列问题时有时可以利用函数的性质，但是在利用函数单调性求解数列问题，要注意n的取值不是连续实数，忽略这一点很容易出错.

举一反三

例．已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n，且$a_4=1$，$S_5=10$，求S_n取得最大值时对应的 n 值.

【详解】在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，$S_5=\dfrac{a_1+a_5}{2}\times 5=\dfrac{2a_3}{2}\times 5=10$，则$a_3=2$，而$a_4=1$，

于是公差$d=a_4-a_3=-1$，因此$a_n=a_3+(n-3)d=-n+5$，

由$a_n\geq 0$，得$n\leq 5$，显然数列$\left\{a_n\right\}$是递减等差数列，前 5 项都是非负数，从第 6 项起为负数，

所以S_n的最大值为$S_4=S_5=\dfrac{a_1+a_4}{2}\times 4=10$，此时$n=4$或$n=5$.

变式 1．数列$\left\{a_n\right\}$是等差数列，$a_1=50$，$d=-0.6$．

(1)从第几项开始有 $a_n<0$？

(2)求此数列的前 n 项和的最大值.

【详解】（1）因为 $a_1=50$， $d=-0.6$， 所以 $a_n=50-0.6(n-1)=-0.6n+50.6$.

令 $-0.6n+50.6\le 0$，则 $n\ge\frac{50.6}{0.6}\approx 84.3$．由于 $n\in\mathbf{N}^*$，故当 $n\ge 85$ 时， $a_n<0$，

即从第 85 项开始各项均小于 0；

（2）方法 1： $S_n=50n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-0.6)=-0.3n^2+50.3n=-0.3\left(n-\frac{503}{6}\right)^2+\frac{503^2}{120}$.

当 n 取最接近于 $\frac{503}{6}$ 的自然数，即 $n=84$ 时， S_n 取到最大值 $S_{84}=2108.4$.

方法 2：因为 $d=-0.6<0$， $a_1=50>0$，由（1），知 $a_{84}>0$， $a_{85}<0$，

所以 $S_1<S_2<\cdots<S_{84}$，且 $S_{84}>S_{85}>S_{86}>\cdots$.

所以 $(S_n)_{\max}=S_{84}=50\times 84+\frac{84\times 83}{2}\times(-0.6)=2108.4$.

变式 2．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$， $S_3=-15$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)求 S_n 的最小值.

【详解】（1）设公差为 d， $a_1=-7$，

$\therefore S_3=3\times(-7)+\frac{3\times(3-1)}{2}d=-21+3d=-15$，解得 $d=2$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2n-9$.

（2） $\because a_1=-7$， $d=2$，

$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2-8n=(n-4)^2-16$，

$\therefore$ 当 $n=4$ 时， S_n 最小，最小值为 -16.

变式 3．等差数列 $\{a_n\}$， $S_{11}=-11$，公差 $d=-3$.

(1)求通项公式和前 n 项和公式;

(2)当 n 取何值时，前 n 项和最大，最大值是多少.

【详解】（1）由 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_{11}=\frac{11\times(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11\times 2a_6}{2}=11a_6=-11$，

解得 $a_6=-1$，

$a_n=a_6+(n-6)d=-1+(n-6)\times(-3)=17-3n$，则 $a_1=17-3=14$，

$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(14+17-3n)}{2}=-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{31}{2}n$.

（2）由 $a_n=17-3n$，则数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，

由 $a_6=-1<0$，$a_5=2>0$，则当 $n=5$ 时，S_n 取得最大值，即最大值为 $S_5=\dfrac{5\times(14+2)}{2}=40$.

易错题通关

1．已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_9+a_{12}<0$，$a_{10}\cdot a_{11}<0$，且数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，有最大值，当 $S_n>0$ 时，n 的最大值为（　）

A．20　　B．17　　C．19　　D．21

【答案】C

【分析】可判断数列 $\{a_n\}$ 是递减的等差数列，利用前 n 项和公式和等差数列的性质可得 $S_{19}>0$，$S_{20}<0$，进而可得 n 的最大值.

【详解】因为 $a_{10}a_{11}<0$，所以 a_{10} 和 a_{11} 异号，

又等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 有最大值，

所以数列 $\{a_n\}$ 是递减的等差数列，

所以 $a_{10}>0$，$a_{11}<0$，

所以 $S_{19}=\dfrac{a_1+a_{19}}{2}\times19=19a_{10}>0$，

$S_{20}=\dfrac{a_1+a_{20}}{2}\times20=10(a_1+a_{20})=10(a_9+a_{12})<0$，

所以当 $S_n>0$ 时，n 的最大值为 19.

故选：C.

2．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$7a_5+5a_9=0$，且 $a_9>a_5$，则 S_n 取得最小值时 n 的值为（　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【答案】B

【分析】由等差数列$\{a_n\}$的通项公式，求得$a_6<0$，$a_7>0$，进而得到当当$1\le n\le 6,n\in N^*$时，$a_n<0$，当$n\ge 7,n\in N^*$时，$a_n>0$，即可求解.

【详解】由等差数列$\{a_n\}$的通项公式$7a_5+5a_9=0$，得

$7(a_1+4d)+5(a_1+8d)=0,12a_1+68d=0,a_1=-\frac{17}{3}d,\frac{a_1}{d}=-\frac{17}{3}$，又$a_9>a_5$，

所以$a_1<0,d>0,\because a_1+\frac{17}{3}d=0,\therefore a_1+5d+\frac{2}{3}d=0\therefore a_1+5d=a_6<0,a_1+\frac{17}{3}d+\frac{1}{3}d=a_7>0,$

则等差数列$\{a_n\}$中满足$a_6<0$，$a_7>0$，且$d>0$，

数列$\{a_n\}$为递增数列，且当$1\le n\le 6,n\in N^*$时，$a_n<0$，当$n\ge 7,n\in N^*$时，$a_n>0$，

所以当S_n取得最小值时，n的值为6.

故选：B.

3．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=25,4a_{n+1}=4a_n-7,$ 若其前 n 项和为 Sn, 则 Sn 的最大值为（　）

A．15　　B．750　　C．$\frac{765}{4}$　　D．$\frac{705}{2}$

【答案】C

【分析】由题意可得数列$\{a_n\}$是以首项为25，公差$d=-\frac{7}{4}$的等差数列，结合等差数列的通项公式以及前n项和的性质分析运算.

【详解】由$4a_{n+1}=4a_n-7$，可得$a_{n+1}=a_n-\frac{7}{4}$，

所以数列$\{a_n\}$是以首项为25，公差$d=-\frac{7}{4}$的等差数列，且$\{a_n\}$为单调递减数列，

其通项公式为$a_n=25+(n-1)\times\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{7}{4}n+\frac{107}{4}$.

当$a_n=-\frac{7}{4}n+\frac{107}{4}\ge 0$且$a_{n+1}=-\frac{7}{4}n+\frac{100}{4}<0$时，$S_n$最大，

解得$n\le\frac{107}{7}$且$n>\frac{100}{7}$，则$n=15$，

即数列$\{a_n\}$的前 15 项均为非负值，第 16 项开始为负值，

故 S_{15} 最大，$S_{15}=15\times 25+\frac{15\times 14}{2}\times\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{765}{4}$.

故选：C.

4．若$\{a_n\}$是等差数列，首项$a_1>0$，$a_{2021}+a_{2022}>0$，$a_{2021}\cdot a_{2022}<0$，则使前n项和$S_n>0$成立的最大自然数n是（　）

A．2021　　B．2022　　C．4042　　D．4043

【答案】C

【分析】根据题意得 $a_{2021}>0$， $a_{2022}<0$，再结合 $S_{4043}=4043a_{2022}<0$，

$S_{4042}=2021(a_{2021}+a_{2022})>0$，求解即可.

【详解】根据 $a_1>0$, $a_{2021}\cdot a_{2022}<0$ 得 $a_{2021}>0$，$a_{2022}<0$，所以 $S_{4043}=\dfrac{4043(a_1+a_{4043})}{2}=4043a_{2022}<0$，

因为 $a_{2021}+a_{2022}>0$，所以 $S_{4042}=\dfrac{4042(a_1+a_{4042})}{2}=2021(a_{2021}+a_{2022})>0$，

所以使前 n 项和 $S_n>0$ 成立的最大自然数 n 是 4042.

故选：C

5．设 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和，且 $S_5<S_6$，　$S_6=S_7>S_8$，则下列结论正确的是（　　）.

A．$d>0$　　B．$a_7=0$

C．$S_9>S_5$　　D．S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值

【答案】BD

【分析】对于 B：根据题意结合前 n 项和分析可得 $a_6>0,a_7=0,a_8<0$；对于 A：根据等差数列的定义分析判断；对于 C：根据等差数列的性质分析可得 $a_6+a_7+a_8+a_9<0$，进而可得结果；对于 D：根据等差数列的正负性结合前 n 项和的性质分析判断.

【详解】因为 $S_5<S_6$，　$S_6=S_7>S_8$，

则 $a_6=S_6-S_5>0,a_7=S_7-S_6=0,a_8=S_8-S_7<0$，故 B 正确；

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d=a_7-a_6<0$，故 A 错误；

可知数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，可得 $a_1>a_2>\cdots>a_7=0>a_8>\cdots$，

可得 $a_6+a_7+a_8+a_9=2\left(a_7+a_8\right)=2a_8<0$，

所以 $S_9=S_5+a_6+a_7+a_8+a_9<S_5$，故 C 错误；

因为 a_6 为最后一项正数，根据加法的性质可知：S_6 为 S_n 的最大值，

又因为 $S_6=S_7$，所以 S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值，故 D 正确；

故选：BD.

6．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差为d．已知$a_4=12$，$S_{14}>0$，$S_{15}<0$，则下列结论正确的是（　）

A．$a_7<0$

B．$-\frac{24}{7}<d<-3$

C．$S_7=84$

D．设$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，则$T_n>0$时，$n$的最大值为27

【答案】BC

【分析】由已知求得$a_8<0$，$a_7>0$，解公差为d的取值范围，利用等差数列的通项公式求和公式及其性质逐个选项判断正误即可.

【详解】$\because S_{14}>0$，$S_{15}<0$，$\therefore \frac{14(a_1+a_{14})}{2}=7(a_7+a_8)>0$，$\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8<0$，

$\therefore a_7+a_8>0$，$a_8<0$，$\therefore a_7>0$，A选项错误；

又$\because a_4=12$，即$a_1=12-3d$，

$\therefore \begin{cases}a_7+a_8=a_4+3d+a_4+4d=24+7d>0\\a_8=a_4+4d=12+4d<0\end{cases}$，解得$-\frac{24}{7}<d<-3$，B选项正确；

$\because S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=84$，故C选项正确；

因为等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，即$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，

由$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=a_1+\frac{n-1}{2}d-\left(a_1+\frac{n-1-1}{2}d\right)=\frac{d}{2}$，

$\therefore$数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，设$b_n=\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，

因为当$n\le14$时，$S_n>0$，当$n>15$时，$S_n<0$，

所以当$n\le14$时，$b_n>0$，当$n>15$时，$b_n<0$，

所以$T_{27}=\frac{b_1+b_{27}}{2}\times27=27b_{14}>0$，$T_{28}=\frac{b_1+b_{28}}{2}\times28=14\left(2a_1+\frac{27}{2}d\right)=14\left(24+\frac{15}{2}d\right)$，

因为$-\frac{24}{7}<d<-3$，所以T_{28}可能为正数，也可能为负数，所以D选项不正确.

故选：BC.

7．已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n=an^2+11n+b\left(a,b\in\mathrm{R},n\in\mathrm{N}^*\right)$，则下列说法正确的是

（　）

A．$b=0$是$\{a_n\}$为等差数列的充要条件

B．$\{a_n\}$可能为等比数列

C．若$a>0$，$b\in\mathrm{R}$，则$\{a_n\}$为递增数列

D．若$a=-1$，则S_n中，S_5，S_6最大

【答案】ABD

【分析】计算$a_1=a+b+11$，当$n\geq 2$时，$a_n=2an+11-a$，验证知A正确，当$a=b=0$时是等比数列，B正确，举反例知C错误，计算$a_6=0$得到D正确，得到答案.

【详解】$S_n=an^2+11n+b$，$a_1=S_1=a+b+11$；

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=an^2+11n+b-a(n-1)^2-11(n-1)-b=2an+11-a$，

当$b=0$时，$a_1=a+11$，满足通项公式$a_n=2an+11-a$，数列为等差数列；

当$\{a_n\}$为等差数列时，$a_1=2a+11-a=11+a+b$，$b=0$，故A正确；

当$a=b=0$时，$a_n=11$，是等比数列，B正确；

$a_2=3a+11$，取$b=2a$，则$a_2=a_1$，C错误；

当$a=-1$时，从第二项开始，数列递减，且$a_n=-2n+12$，故$a_6=0$，故S_5，S_6最大，D正确.

故选：ABD

8．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=-n^2+9n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则下列结论正确的是（　）

A．$\{a_n\}$是等差数列

B．$a_4+a_6=0$

C．$a_9<a_{10}$

D．S_n有最大值$\dfrac{81}{4}$

【答案】AB

【分析】由a_n与S_n的关系求出数列$\{a_n\}$的通项，从而可判断AB，根据数列性质可判断C，根据前n项和S_n的函数性质可判断D.

【详解】当$n=1$时，$a_1=S_1=8$，

当$n \geq 2$时，

$a_n = S_n - S_{n-1} = -n^2 + 9n - [-(n-1)^2 + 9(n-1)] = 10 - 2n$ ，符合$a_1 = 8$，

故$a_n = 10 - 2n, (n \in \mathrm{N}^*)$，

所以$a_{n+1} = 10 - 2(n+1) = 8 - 2n$ ，$a_{n+1} - a_n = -2$，

所以数列$\{a_n\}$是等差数列，首项为$a_1 = 8$，公差$d = -2$，A 正确；

$a_4 + a_6 = 2a_5 = 0$，B 正确；

因为公差$d = -2 < 0$，所以数列$\{a_n\}$是递减数列，所以$a_9 > a_{10}$，C 错误；

$S_n = -n^2 + 9n = -(n - \frac{9}{2})^2 + \frac{81}{4}$，

易知当$n = 4$或5时，S_n有最大值$S_4 = S_5 = 20$，D 错误.

故选：AB

9．数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n = -n^2 + 7n$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\{a_n\}$是递增数列　　B．$a_{10} = -14$

C．当$n > 4$时，$a_n < 0$　　D．当$n = 3$或 4 时，S_n取得最大值

【答案】CD

【分析】根据S_n表达式及$n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1}$的关系，算出数列$\{a_n\}$通项公式，即可判断A、B、C 选项的正误．$S_n = -n^2 + 7n$ 的最值可视为定义域为正整数的二次函数来求得.

【详解】当$n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = -2n + 8$，又$a_1 = S_1 = 6 = -2 \times 1 + 8$，所以$a_n = -2n + 8$，

则$\{a_n\}$是递减数列，故 A 错误；

$a_{10} = -12$，故 B 错误；

当$n > 4$时，$a_n = 8 - 2n < 0$，故 C 正确；

因为$S_n = -n^2 + 7n$ 的对称轴为$n = \frac{7}{2}$，开口向下，而n是正整数，且$n = 3$或4距离对称轴一样远，所以当$n = 3$或4时，S_n取得最大值，故 D 正确.

故选：CD.

10．等比数列$\{a_n\}$中$a_3 = 16$，$a_6 = 2$，则数列$\{\log_2 a_n\}$的前n项和的最大值为______.

【答案】21

【分析】先求得数列$\{a_n\}$的通项公式，由此求得数列$\{\log_2 a_n\}$的通项公式，可知数列$\{\log_2 a_n\}$是等差数列，然后根据通项公式的特征求得前n项和的最大值.

【详解】由于等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=16$，$a_6=2$，

所以$\begin{cases}a_1q^2=16\\a_1q^5=2\end{cases}$，解得$a_1=64,q=\frac{1}{2}$，

所以$a_n=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{7-n}$，所以$\log_2 a_n=7-n$，

所以数列$\{\log_2 a_n\}$是首项为6，公差为-1的等差数列，

当$1\le n\le 6$时，$\log_2 a_n>0$；当$n=7$时，$\log_2 a_n=0$；当$n>7$时，$\log_2 a_n<0$，

则当$n=6$或$n=7$时，数列$\{\log_2 a_n\}$的前n项和取得最大值，最大值为$6+5+4+3+2+1=21$.

故答案为：21.

11．记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1>0$，$a_2+a_{2023}=0$，则当S_n取得最大值时，$n=$______.

【答案】1012

【分析】由$a_2+a_{2023}=0$求出a_1和d的关系，结合等差数列前n项和公式即可求解.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$a_2+a_{2023}=0$可得：$a_1=-\frac{2023}{2}d$，

所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-\frac{2023nd}{2}+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}(n^2-2024n)$，

因为$a_1>0$，所以$d<0$，则S_n是关于n的二次函数，开口向下，对称轴$n=1012$，

由二次函数的图象和性质可得：当$n=1012$时，S_n取最大值，

故答案为：1012.

易错点二：忽视两个“中项”的区别（等比数列利用中项求其它）

解题模板

1、等比数列的定义：如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比等于同一个非零

常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母q表示。

数学语言表达式：$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$ （$n\geq 2$，q为非零常数).

2、等比中项性质：如果三个数a，G，b成等比数列，那么G叫做a与b的等比中项，其中$G=\pm\sqrt{ab}$.

注意：同号的两个数才有等比中项。

3、通项公式及前n项和公式

（1）通项公式：若等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比是q，则其通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}$；

通项公式的推广：$a_n=a_mq^{n-m}$.

（2）等比数列的前n项和公式：当$q=1$时，$S_n=na_1$；当$q\neq 1$时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

已知$\{a_n\}$是等比数列，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和.（等比中项）

1、等比数列的基本性质

（1）相隔等距离的项组成的数列仍是等比数列，即a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，…仍是等比数列，公比为q^m.

（2）若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$（项数相同）是等比数列，则$\{\lambda a_n\}(\lambda\neq 0)$，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$，$\{a_n^2\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$，$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$仍是等比数列.

（3）若$k+l=m+n(k,l,m,n\in N^*)$，则有$a_k\cdot a_l=a_m\cdot a_n$

口诀：角标和相等，项的积也相等　推广：$a_n^2=a_{n-k}\cdot a_{n+k}(n,k\in N^*,且n-k\geq 1)$

（4）若$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$，则$\{\log_a a_n\}$（$a>0$且$a\neq 1$）是以$\log_a a_1$为首项，$\log_a q$为公差的等差数列。

（5）若$\{a_n\}$是等比数列，$T_k=a_1a_2a_3\ldots a_k$，则$T_k,\frac{T_{2k}}{T_k},\frac{T_{3k}}{T_{2k}},\cdots(k\in N^*)$构成公比为$q^{k^2}$的等比数列。

易错提醒：若a,b,c成等比数列，则b为a和c的等比中项。只有同号的两数才有等比中项，“$b^2=ac$”仅是“b为a和c的等比中项”的必要不充分条件，在解题时务必要注意此点。

举一反三

例 ．已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，则a_3+a_5等于（　）

A．5　　B．10　　C．15　　D．20

【详解】解：由等比数列的性质可得 $a_2a_4=a_3^2$，$a_4a_6=a_5^2$，

∴$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=(a_3+a_5)^2=25$，

又等比数列$\{a_n\}$各项均为正数，∴$a_3+a_5=5$，选项 A 正确

变式 1．已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d\neq0$，且a_1，a_3，a_9成等比数列，则$\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=$(　)

A．$\dfrac{13}{16}$　　B．$\dfrac{10}{13}$　　C．$\dfrac{11}{13}$　　D．$\dfrac{15}{16}$

【详解】由题意可知，$a_3^2=a_1a_9$得$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$，解得$d=0$或$a_1=d$，

因为$d\neq0$，故$a_1=d$，

所以$\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=\dfrac{3a_1+10d}{3a_1+13d}=\dfrac{13d}{16d}=\dfrac{13}{16}$.

故选：A.

变式 2．已知$a,b,c\in\mathbf{R}$，如果-1，a，b，c，-9成等比数列，那么（　）

A．$b=3$，$ac=9$　　B．$b=-3$，$ac=9$

C．$b=3$，$ac=-9$　　D．$b=-3$，$ac=-9$

【详解】因为b是-1和-9的等比中项，所以$b^2=(-1)\times(-9)=9$，设公比为q，则$b=-q^2$，

所以 b 与首项-1 同号，所以$b=-3$．又 a，c 必同号，所以$ac=b^2=9$.

故选：B

变式 3．已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_6=5$，$a_3\cdot a_5=4$，则$\tan\left(\dfrac{\pi a_4}{3}\right)=$（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$-\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【详解】解：由等比数列性质可知$a_2\cdot a_6=a_3\cdot a_5=4=a_4^2$，所以$a_4=2$或$a_4=-2$，

但$a_2+a_6>0$，可知$a_4>0$，所以$a_4=2$，则$\tan\left(\dfrac{\pi a_4}{3}\right)=\tan\dfrac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，

故选：B

易错题通关

1．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差不为 0，若满足a_1、a_3、a_4成等比数列，则$\dfrac{S_3-S_2}{S_5-S_3}$

的值为（　）

A．2　　B．3　　C．$\frac{1}{5}$　　D．不存在

【答案】A

【分析】根据题意，利用等比中项公式列出方程求得$a_1=-4d$，结合$\frac{S_3-S_2}{S_5-S_3}=\frac{a_3}{a_4+a_5}$，即可求解.

【详解】由等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差不为0，若满足a_1，a_3，a_4成等比数列，

可得$a_3^2=a_1a_4$，即$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+3d)$，整理得$(a_1+4d)\cdot d=0$，

因为$d\neq 0$，所以$a_1=-4d$，

又由$\frac{S_3-S_2}{S_5-S_3}=\frac{a_3}{a_4+a_5}=\frac{a_1+2d}{2a_1+7d}=\frac{-2d}{-d}=2$.

故选：A.

2．已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_5=14$，且a_1，a_2，a_5成等比数列，则数列$\{a_n\}$的前9项的和为（　）

A．1　　B．2　　C．81　　D．80

【答案】C

【分析】由题知$a_4=7$，$a_2^2=a_1a_5$，进而根据等差数列通项公式解得$d=2$，再求和即可.

【详解】因为$a_3+a_5=14$，所以$2a_4=14$，解得$a_4=7$.

又a_1，a_2，a_5成等比数列，所以$a_2^2=a_1a_5$.设数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$\left(a_4-2d\right)^2=\left(a_4-3d\right)\left(a_4+d\right)$，即$\left(7-2d\right)^2=\left(7-3d\right)\left(7+d\right)$，整理得$d^2-2d=0$.

因为$d\neq 0$，所以$d=2$.

所以$S_9=\frac{9\times\left(a_1+a_9\right)}{2}=\frac{9\times\left(1+17\right)}{2}=81$.

故选:C.

3．已知$a=5+2\sqrt{6}$，$c=5-2\sqrt{6}$，则使得a,b,c成等比数列的充要条件的b值为（　）

A．1　　B．± 1　　C．5　　D．$\pm 2\sqrt{6}$

【答案】B

【分析】根据等比中项的性质求解即可.

【详解】若a,b,c成等比数列，则$b^2=ac$，即$b=\pm\sqrt{ac}=\pm\sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}=\pm1$，

当$b=\pm1$时，满足$b^2=ac$，a,b,c成等比数列，

故使得a,b,c成等比数列的充要条件的b值为±1.

故选：B

4．已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为0，$a_1=1$且a_2,a_4,a_8成等比数列，则错误的是（　）

A．$\frac{a_1+a_9}{a_2+a_3}=2$　　B．$\frac{a_4}{a_3}>\frac{a_5}{a_4}$　　C．$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{n+1}{2}$　　D．$S_n\geq a_n$

【答案】C

【分析】设出公差，根据题干条件列出方程，求出公差，求出通项公式$a_n=n$，再利用通项公式和前n项和公式对四个选项一一计算，进行判断.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d（$d\neq0$）.

因为$a_1=1$且a_2,a_4,a_8成等比数列，所以$(1+3d)^2=(1+d)(1+7d)$.

解得：$d=1$，所以$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times1=n$.

对于A：$\frac{a_1+a_9}{a_2+a_3}=\frac{1+9}{2+3}=2$.故A正确；

对于B：因为$\frac{a_4}{a_3}-\frac{a_5}{a_4}=\frac{4}{3}-\frac{5}{4}=\frac{1}{12}>0$，所以$\frac{a_4}{a_3}>\frac{a_5}{a_4}$.故B正确；

对于C：$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)}=\frac{n+2}{2}\neq\frac{n+1}{2}$.故C错误；

对于D：因为$S_n-a_n=\frac{n(n+1)}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}$，所以当$n\geq1$时，$S_n-a_n=\frac{n(n-1)}{2}\geq0$，即$S_n\geq a_n$.

故D正确.

故选：C

5．正项等比数列$\{a_n\}$中，$4a_3$是a_5与$-2a_4$的等差中项，若$a_2=\frac{1}{2}$，则$a_3a_5=$（　）

A．4　　B．8　　C．32　　D．64

【答案】D

【分析】依题意$4a_3$是a_5与$-2a_4$的等差中项，可求出公比q，进而由$a_2=\frac{1}{2}$求出a_4，根据等比中项求出a_3a_5的值.

【详解】由题意可知，$4a_3$是a_5与$-2a_4$的等差中项，

所以$a_5-2a_4=8a_3$，即$a_3q^2-2a_3q=8a_3$，

所以$q^2-2q-8=0$，$q=4$或$q=-2$（舍），

所以$a_4=a_2q^2=8$，

$a_3a_5=a_4^2=64$，

故选：D.

6．已知实数4，m，9构成一个等比数列，则圆锥曲线$\frac{x^2}{m}+y^2=1$的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{30}}{6}$　　B．$\sqrt{7}$　　C．$\frac{\sqrt{30}}{6}$或$\sqrt{7}$　　D．$\frac{5}{6}$或7

【答案】C

【分析】根据等比中项可求$m=\pm 6$，然后代入曲线方程分别得到曲线为椭圆和双曲线，根据离心率的公式即可求解.

【详解】实数4，m，9构成一个等比数列，可得$m=\pm 6$，

当$m=6$时，圆锥曲线$\frac{x^2}{m}+y^2=1$为椭圆,则其离心率为：$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

当$m=-6$时，圆锥曲线$\frac{x^2}{m}+y^2=1$为双曲线,其离心率为：$\frac{\sqrt{7}}{1}=\sqrt{7}$.

故选：C.

7．数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=1$，$a_5=4$，命题$p:a_3=2$，命题$q:a_3$是a_1、a_5的等比中项，则p是q的（　）条件

A．充要　　B．充分不必要　　C．必要不充分　　D．既不充分也不必要

【答案】A

【分析】根据等比中项的定义结合等比数列的定义判断可得出结论.

【详解】因为数列$\{a_n\}$为等比数列，且$a_1=1$，$a_5=4$，若$a_3=2$，则$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_5}{a_3}$，

则a_3是a_1、a_5的等比中项，即$p\Rightarrow q$；

若a_3是a_1、a_5的等比中项，设$\{a_n\}$的公比为m，则$a_3=a_1m^2>0$，

因为$a_3^2=a_1a_5=4$，故$a_3=2$，即$p\Leftarrow q$.

因此，p是q的充要条件.

故选：A.

8．在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=2$，$a_n=2a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则$a_1a_3+a_2a_4+\cdots+a_{10}a_{12}=$（　）.

A．$\frac{4}{3}\times\left(4^{10}-1\right)$　　B．$\frac{4}{3}\times\left(4^{11}-1\right)$

C．$\frac{16}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{11}\right]$　　D．$\frac{4}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right]$

【答案】D

【分析】由等比数列定义可知数列$\left\{a_n\right\}$为等比数列，结合等比数列性质可知数列$\left\{a_n^2\right\}$是以4为首项，$\frac{1}{4}$为公比的等比数列，结合等比数列求和公式可求得结果.

【详解】$\because a_1=2$，$a_n=2a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，即$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$，

$\therefore$数列$\left\{a_n\right\}$是以2为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，

$\because a_1a_3=a_2^2$，$a_2a_4=a_3^2$，$a_3a_5=a_4^2$，…，$a_{10}a_{12}=a_{11}^2$，

又数列$\left\{a_n^2\right\}$是以4为首项，$\frac{1}{4}$为公比的等比数列，

$$\therefore a_1a_3+a_2a_4+\cdots+a_{10}a_{12}=\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+\cdots+a_{11}^{\ 2}\right)-a_1^{\ 2}=\frac{4\times\left(1-\frac{1}{4^{11}}\right)}{1-\frac{1}{4}}\ \ 4$$

$$=\frac{16}{3}\times\left(1-\frac{1}{4^{11}}\right)-4=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{1}{4^{10}}=\frac{4}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right).$$

故选：D.

9．已知$\{a_n\}$是等差数列，公差$d<0$，前n项和为S_n，若a_3，a_4，a_8成等比数列，则(　　)

A．$a_1>0$，$S_4>0$　B．$a_1<0$，$S_4<0$　C．$a_1>0$，$S_4<0$　D．$a_1<0$，$S_4>0$

【答案】A

【分析】首先由a_3，a_4，a_8成等比数列可得${a_4}^2=a_3a_8$，然后计算得出$a_1=-\frac{5}{3}d$，再由$d<0$可得$a_1>0$，最后由等差数列的前n项和公式即可得出S_4的表达式，进而得出所求的答案.

【详解】因为a_3，a_4，a_8成等比数列，所以${a_4}^2=a_3a_8$，

即$(a_1+3d)^2=(a_1+2d)(a_1+7d)$，即$a_1=-\frac{5}{3}d$，

因为$d<0$，所以$a_1>0$；

而 $S_4 = 4a_1 + \frac{4\times3}{2}d = 4a_1 + 6d = 4\times(-\frac{5}{3}d) + 6d = -\frac{2}{3}d > 0$，

故选： A .

10．数 1 与 4 的等差中项，等比中项分别是（　）

A．$\pm\frac{5}{2}$，±2　　B．$\frac{5}{2}$，±2　　C．$\frac{5}{2}$，2　　D．$\pm\frac{5}{2}$，2

【答案】B

【分析】利用等差、等比中项的性质求对应中项即可.

【详解】若等差中项为 m，则 $2m = 1 + 4 = 5$，可得 $m = \frac{5}{2}$；

若等比中项为 n，则 $n^2 = 1\times4 = 4$，可得 $n = \pm2$；

故选：B

11．已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1 = 2$，其中公差 $d \neq 0$，若 a_5 是 a_3 和 a_8 的等比中项，则 $S_{18} =$（　）

A．398　　B．388

C．189　　D．199

【答案】C

【分析】数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1 = 2$，其中公差 $d \neq 0$，由 a_5 是 a_3 和 a_8 的等比中项，可得 $(2+4d)^2 = (2+2d)(2+7d)$，解得 d 即可得出.

【详解】解：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1 = 2$，其中公差 $d \neq 0$， $\because a_5$ 是 a_3 和 a_8 的等比中项，

$\therefore (2+4d)^2 = (2+2d)(2+7d)$，

化为 $d(d-1) = 0$， $d \neq 0$.

所以 $d = 1$，

则 $S_{18} = 18\times2 + \frac{18\times17}{2}\times1 = 189$.

故选：C.

易错点三：忽略等比数列求和时对 q 讨论（等比数列求和）

解题模板

等比数列前 n 项和的性质

（1）在公比 $q \neq -1$ 或 $q = -1$ 且 n 为奇数时，S_n， $S_{2n} - S_n$， $S_{3n} - S_{2n}$，……仍成等比数列，

其公比为q^n；

（2）对$\forall m,p\in N^*$，有$S_{m+p}=S_m+q^mS_p$；

（3）若等比数列$\{a_n\}$共有$2n$项，则$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$，其中$S_{偶}$，$S_{奇}$分别是数列$\{a_n\}$的偶数项和与奇数项和；

（4）等比数列的前n项和$S_n=\dfrac{a_1}{1-q}-\dfrac{a_1}{1-q}\cdot q^n$，令$k=\dfrac{a_1}{1-q}$，则$S_n=k-k\cdot q^n$（$k$为常数，且$q\neq 0,1$）

易错提醒：注意等比数列的求和公式是分段表示的：$S_n=\begin{cases}na_1,q=1\\ \dfrac{a_1\left(1-q\right)^n}{1-q},q\neq 1\end{cases}$，所以在利用等比数列求和公式求和时要先判断公比是否可能为1,，若公比未知，则要注意分两种情况$q=1$和$q\neq1$讨论..

举一反三

例．设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.已知$S_{n+1}=2S_n+\dfrac{1}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$S_6=$____________.

【详解】当$\{a_n\}$的公比为1时，由$S_{n+1}=2S_n+\dfrac{1}{2}$可知显然不成立，故公比不为1，

由$S_{n+1}=2S_n+\dfrac{1}{2}$得$S_{n+1}-S_n=S_n+\dfrac{1}{2}\Rightarrow a_{n+1}=S_n+\dfrac{1}{2}$，

所以$n\geq 2$时，$a_n=S_{n-1}+\dfrac{1}{2}$，相减可得$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}=a_n\Rightarrow a_{n+1}=2a_n$，故公比$q=2$，又$a_2=a_1+\dfrac{1}{2}$ Þ $2a_1=a_1+\dfrac{1}{2}$ Þ $a_1=\dfrac{1}{2}$，

故$S_6=\dfrac{\frac{1}{2}\times\left(1-2^6\right)}{1-2}=\dfrac{63}{2}$，故答案为：$\dfrac{63}{2}$

变式1．记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则$S_8=$_______.

【详解】等比数列$\{a_n\}$中，$S_4=5$，$S_6=21S_2$，显然公比$q\neq 1$，

设首项为a_1，则$\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=-5$①，$\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{21a_1(1-q^2)}{1-q}$②，

化简②得$q^4+q^2-20=0$，解得$q^2=4$或$q^2=-5$（不合题意，舍去），

代入①得$\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{1}{3}$，

所以 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}(1-q^4)(1+q^4)=\frac{1}{3}\times(-15)\times(1+16)=-85$.

故答案为：-85

变式 2．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_4=-4$，令$b_n=|a_n|$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和S_n.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_4=-4$，

所以$a_4=a_1\cdot q^3=\frac{1}{2}q^3=-4$，解得：$q=-2$，

所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot(-2)^{n-1}$，

又$b_n=|a_n|=\left|\frac{1}{2}\cdot(-2)^{n-1}\right|=2^{n-2}$，所以$S_n=\frac{b_1\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^{n-1}-\frac{1}{2}$.

变式 3．数列$\{a_n\}$前n项和S_n满足$a_{n+1}=2S_n+3,a_1=3$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_3\frac{a_n^3}{9}$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)对任意$m\in\mathrm{N}^*$，将数列$\{b_n\}$中落入区间$\left(a_m,a_{m+1}\right)$内项的个数记为c_m，求数列$\{c_n\}$前m项和T_m.

【详解】(1) $a_1=3$，$a_{n+1}=2S_n+3$①，当$n=1$时，$a_2=2S_1+3=9$，

当$n\geq2$时，$a_n=2S_{n-1}+3$②，

两式①-②得$a_{n+1}-a_n=2a_n$，即$a_{n+1}=3a_n$，

其中$a_2=9=3a_1$，也满足上式，

故$\{a_n\}$是以3为首项，3为公比的等比数列，

故$a_n=a_1\cdot3^{n-1}=3^n$；

$b_n=\log_3\frac{a_n^3}{9}=\log_3\frac{3^{3n}}{9}=3n-2$；

(2) $\left(a_m,a_{m+1}\right)=\left(3^m,3^{m+1}\right)$，

令$3^m<3n-2<3^{m+1}$，解得$3^{m-1}+\frac{2}{3}<n<3^m+\frac{2}{3}$，又$n\in\mathrm{N}^*$，

故$n=3^{m-1}+1,3^{m-1}+2,\cdots,3^m$，则$c_m=3^m-3^{m-1}=2\cdot3^{m-1}$，

故$\frac{c_{m+1}}{c_m}=\frac{2\cdot3^m}{2\cdot3^{m-1}}=3$，所以$\{c_n\}$为等比数列，首项为$c_1=2$，公比为3，