浙江省宁波市余姚中学2024届高三下学期第一次阶段性评估检测试题数学试题

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

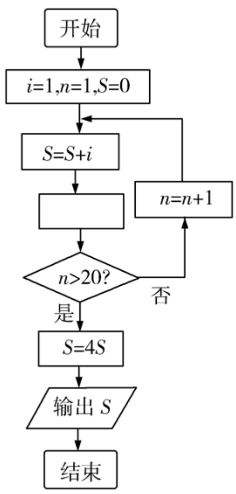
1． M 是抛物线 $y^2=4x$ 上一点，N 是圆 $\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=1$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称圆上的一点，则 $\left|MN\right|$ 最小值是（　　）

A． $\dfrac{\sqrt{11}}{2}-1$　　B． $\sqrt{3}-1$　　C． $2\sqrt{2}-1$　　D． $\dfrac{3}{2}$

2．若函数 $f(x)=e^x$ 的图象上两点 M，N 关于直线 $y=x$ 的对称点在 $g(x)=ax-2$ 的图象上，则 a 的取值范围是（　　）

A． $\left(-\infty,\dfrac{e}{2}\right)$　　B． $(-\infty,e)$　　C． $\left(0,\dfrac{e}{2}\right)$　　D． $(0,e)$

3．已知 $\dfrac{\pi}{4}\approx1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots$，如图是求 π 的近似值的一个程序框图，则图中空白框中应填入



A． $i=-\dfrac{1}{2n-1}$　　B． $i=-\dfrac{1}{i+2}$

C． $i=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$　　D． $i=\dfrac{(-1)^n}{i+2}$

4．若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}0\le 2x+y\le 6\\3\le x-y\le 6,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为（　　）

A．10　　B．8　　C．5　　D．3

5．设函数 $f\left(x\right)=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+m$，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f\left(x\right)\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right]$，则 $m=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{3}{2}$　　　　C．1　　　　D．$\frac{7}{2}$

6．下列命题为真命题的个数是（　　）（其中π，e为无理数）

①$\sqrt{e}>\frac{3}{2}$；②$\ln\pi<\frac{2}{3}$；③$\ln 3<\frac{3}{e}$.

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

7．已知i是虚数单位，若$\frac{z}{1-i}=i$，则$|z|=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．2　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．3

8．已知函数$f(x)=(x-a-1)e^x$，若$2^a=\log_2 b=c$,则（　　）

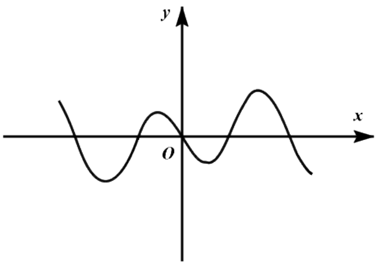
A．$f(a)<f(b)<f(c)$　　　　B．$f(b)<f(c)<f(a)$

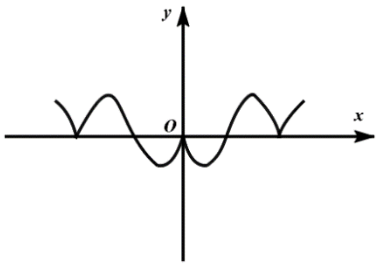
C．$f(a)<f(c)<f(b)$　　　　D．$f(c)<f(b)<f(a)$

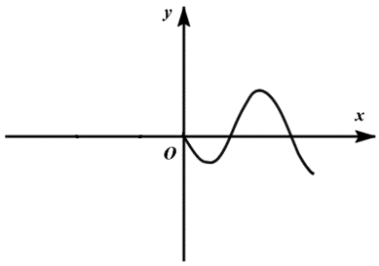
9．若函数$f(x)=(x^2-mx+2)e^x$($e=2.71828\ldots$为自然对数的底数)在区间$[1,2]$上不是单调函数，则实数m的取值范围是(　　)

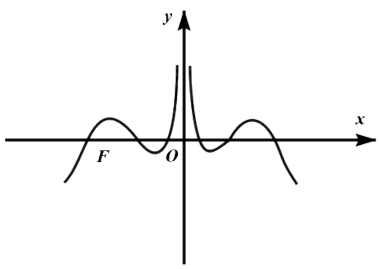
A．$\left[\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right]$　　　　B．$\left(\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right)$　　　　C．$\left[2,\frac{10}{3}\right]$　　　　D．$\left(2,\frac{10}{3}\right)$

10．函数$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\ln|x|$图像可能是（　　）

A．

B．

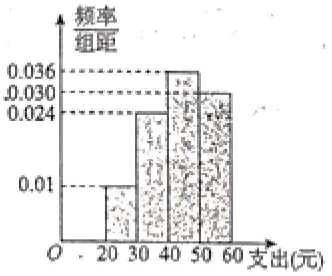
C．

D．

11．抛掷一枚质地均匀的硬币，每次正反面出现的概率相同，连续抛掷5次，至少连续出现3次正面朝上的概率是（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　　　B．$\frac{1}{3}$　　　　C．$\frac{5}{32}$　　　　D．$\frac{3}{16}$

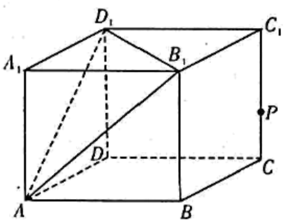
12．某学校为了调查学生在课外读物方面的支出情况，抽取了一个容量为n的样本，其频率分布直方图如图所示，其中支出在$[20,40)$（单位：元）的同学有34人，则n的值为（　　）



A．100 **B．1000** **C．90** **D．90**

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若点N为点M在平面α上的正投影，则记$N=f_{\alpha}(M)$.如图，在棱长为 **1** 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，记平面AB_1D_1为β，平面$ABCD$为γ，点P是线段CC_1上一动点，$Q_1=f_{\gamma}[f_{\beta}(P)],Q_2=f_{\beta}[f_{\gamma}(P)]$.给出下列四个结论：



①Q_2为$\triangle AB_1D_1$的重心；

②$Q_1Q_2\perp BD$；

③当$CP=\dfrac{4}{5}$时，$PQ_1\parallel$平面β；

④当三棱锥D_1-APB_1的体积最大时，三棱锥D_1-APB_1外接球的表面积为2π.

其中，所有正确结论的序号是________________.

14．已知函数 **f(x)**＝$\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geq 2,\\ (x-1)^3, & 0<x<2,\end{cases}$ 若关于 **x** 的方程 **f(x)**＝**kx** 有两个不同的实根，则实数 **k** 的取值范围是

________.

15．若x,y满足约束条件$\begin{cases}x-y\geq 0\\ x+y-2\leq 0\\ y\geq 0\end{cases}$，则$z=3x-2y$的最小值是__________，最大值是__________.

16．已知函数$f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx$,若关于$x$的不等式$f\left(x\right)<0$的解集是$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,2\right)$，则$\dfrac{b+c}{a}$的值为

_____.

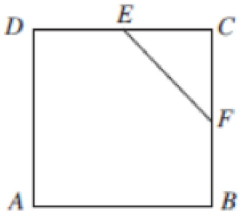
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

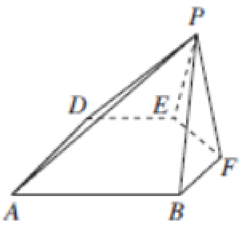
17．（12 分）已知AB是圆O：$x^2+y^2=4$的直径，动圆M过A，B两点，且与直线$y+2=0$相切.

（1）若直线AB的方程为$x-y=0$，求$\odot M$的方程；

（2）在 y 轴上是否存在一个定点 P，使得以 MP 为直径的圆恰好与 x 轴相切？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

18.（12 分）如图，在棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 CD，BC 边上的中点，现以 EF 为折痕将点 C 旋转至点 P 的位置，使得 $P-EF-A$ 为直二面角.





（1）证明：$EF \perp PA$；

（2）求 PD 与面 ABF 所成角的正弦值.

19.（12 分）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，满足 $a_1 = 3$，$a_4 = 12$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 4$，$b_4 = 20$，且 $\{b_n - a_n\}$ 是等比数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

20.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$2S_n + a_n = 1\left(n \in N^*\right)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n = \dfrac{1}{1+a_n} + \dfrac{1}{1-a_{n+1}}$，$T_n$ 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.求证：$T_n > 2n - \dfrac{1}{3}$.

21.（12 分）记无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中最大值为 M_n，最小值为 m_n，令 $b_n = \dfrac{M_n - m_n}{2}$，则称 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$“极差数列”.

（1）若 $a_n = 3n - 2$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和；

（2）证明：$\{b_n\}$ 的“极差数列”仍是 $\{b_n\}$；

（3）求证：若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 也是等差数列.

22.（10 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n = 2a_n - 1(n \in N^*)$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）证明：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2}<\frac{4}{3}$．

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

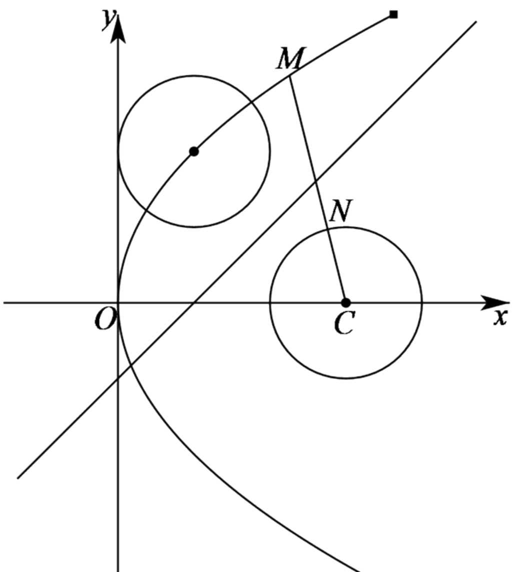
1、**C**

【解析】

求出点$(1,2)$关于直线$x-y-1=0$的对称点C的坐标，进而可得出圆$(x-1)^2+(y-2)^2=1$关于直线$x-y-1=0$的对称圆C的方程，利用二次函数的基本性质求出$|MC|$的最小值，由此可得出$|MN|_{\min}=|MC|_{\min}-1$，即可得解.

【详解】

如下图所示：



设点$(1,2)$关于直线$x-y-1=0$的对称点为点$C(a,b)$，

则$\begin{cases}\frac{a+1}{2}-\frac{b+2}{2}-1=0\\ \frac{b-2}{a-1}=-1\end{cases}$，整理得$\begin{cases}a-b-3=0\\ a+b-3=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=3\\ b=0\end{cases}$，即点$C(3,0)$，

所以，圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=1$关于直线$x-y-1=0$的对称圆$C$的方程为$\left(x-3\right)^2+y^2=1$，

设点$M\left(\frac{y^2}{4},y\right)$，则$|MC|=\sqrt{\left(\frac{y^2}{4}-3\right)^2+y^2}=\sqrt{\frac{y^4}{16}-\frac{y^2}{2}+9}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(y^2-4\right)^2+8}$，

当$y=\pm 2$时，$|MC|$取最小值$2\sqrt{2}$，因此，$|MN|_{\min}=|MC|_{\min}-1=2\sqrt{2}-1$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查抛物线上一点到圆上一点最值的计算，同时也考查了两圆关于直线对称性的应用，考查计算能力，属于中等题.

2、**D**

【解析】

由题可知，可转化为曲线$g(x)=ax-2$与$y=\ln x$有两个公共点，可转化为方程$ax-2=\ln x$有两解，构造函数$h(x)=\frac{2+\ln x}{x}$，利用导数研究函数单调性，分析即得解

【详解】

函数$f(x)=e^x$的图象上两点M，N关于直线$y=x$的对称点在$y=\ln x$上，

即曲线$g(x)=ax-2$与$y=\ln x$有两个公共点，

即方程$ax-2=\ln x$有两解，

即$a=\frac{2+\ln x}{x}$有两解，

令$h(x)=\frac{2+\ln x}{x}$，

则$h'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}$，

则当$0<x<\frac{1}{e}$时，$h'(x)>0$；当$x>\frac{1}{e}$时，$h'(x)<0$，

故$x=\frac{1}{e}$时$h(x)$取得极大值$h\left(\frac{1}{e}\right)=e$，也即为最大值，

当$x\to 0$时，$h(x)\to -\infty$；当$x\to +\infty$时，$h(x)\to 0$，

所以$0<a<e$满足条件.

故选：**D**

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的零点，考查了学生综合分析，转化划归，数形结合，数学运算的能力，属于较难题.

3、C

【解析】

由于$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-L$ 中正项与负项交替出现，根据$S=S+i$可排除选项**A**、**B**；执行第一次循环：$S=0+1=1$，①若图中空白框中填入$i=\frac{(-1)^n}{2n+1}$，则$i=-\frac{1}{3}$，②若图中空白框中填入$i=\frac{(-1)^n}{i+2}$，则$i=-\frac{1}{3}$，此时$n>20$不成立，$n=2$；执行第二次循环：由①②均可得$S=1-\frac{1}{3}$，③若图中空白框中填入$i=\frac{(-1)^n}{2n+1}$，则$i=\frac{1}{5}$，④若图中空白框中填入$i=\frac{(-1)^n}{i+2}$，则$i=\frac{3}{5}$，此时$n>20$不成立，$n=3$；执行第三次循环：由③可得$S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$，符合题意，由④可得$S=1-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}$，不符合题意，所以图中空白框中应填入$i=\frac{(-1)^n}{2n+1}$，故选**C**.

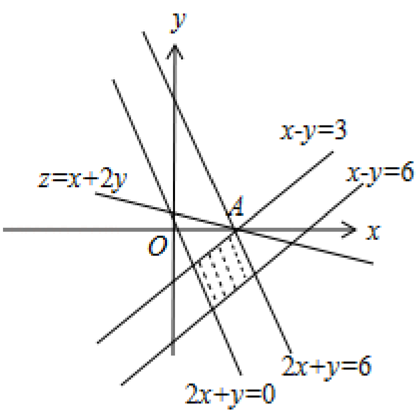
4、D

【解析】

画出可行域,将$z=x+2y$化为$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$,通过平移$y=-\frac{1}{2}x$即可判断出最优解,代入到目标函数,即可求出最值.

【详解】

解:由约束条件$\begin{cases}0\le 2x+y\le 6\\ 3\le x-y\le 6\end{cases}$作出可行域如图,



化目标函数$z=x+2y$为直线方程的斜截式,$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$.由图可知

当直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$过$A(3,0)$时,直线在$y$轴上的截距最大,$z$有最大值为**3**.

故选:***D***.

【点睛】

本题考查了线性规划问题.一般第一步画出可行域,然后将目标函数转化为$y=ax+bz$ 的形式,在可行域内通过平移$y=ax$找到最优解,将最优解带回到目标函数即可求出最值.注意画可行域时,边界线的虚实问题.

5、A

【解析】

由降幂公式，两角和的正弦公式化函数为一个角的一个三角函数形式，然后由正弦函数性质求得参数值．

【详解】

$f\left(x\right)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+m=1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+m=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+m+1$，

$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$，$\sin(2x+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$，$\therefore f(x)\in[m,m+3]$，

由题意$[m,m+3]=[\frac{1}{2},\frac{7}{2}]$，$\therefore m=\frac{1}{2}$．

故选：A．

【点睛】

本题考查二倍角公式，考查两角和的正弦公式，考查正弦函数性质，掌握正弦函数性质是解题关键．

6、C

【解析】

对于①中，根据指数幂的运算性质和不等式的性质，可判定值正确的；对于②中，构造新函数$f\left(x\right)=\ln x-\frac{2}{3},x>0$，利用导数得到函数为单调递增函数，进而得到$f\left(\pi\right)>f\left(e\right)$，即可判定是错误的;对于③中，构造新函数$f\left(x\right)=e\ln x-x,x>0$，利用导数求得函数的最大值为$f\left(e\right)=0$，进而得到$f\left(3\right)<0$，即可判定是正确的.

【详解】

由题意，对于①中，由$(\sqrt{e})^2=e,(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}=2.25$，可得$e>2.25$，根据不等式的性质，可得$\sqrt{e}>\frac{3}{2}$成立，所以是正确的；

对于②中，设函数$f\left(x\right)=\ln x-\frac{2}{3},x>0$，则$f'\left(x\right)=\frac{1}{x}>0$，所以函数为单调递增函数，

因为$\pi>e$，则$f\left(\pi\right)>f\left(e\right)$

又由$f\left(e\right)=\ln e-\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}>0$，所以$f\left(\pi\right)>0$，即$\ln\pi>\frac{2}{3}$，所以②不正确；

对于③中，设函数$f\left(x\right)=e\ln x-x,x>0$，则$f'\left(x\right)=\frac{e}{x}-1=\frac{e-x}{x}$，

当$x\in(0,e)$时，$f'\left(x\right)>0$，函数$f\left(x\right)$单调递增，

当$x\in(e,+\infty)$时，$f'\left(x\right)<0$，函数$f\left(x\right)$单调递减，

所以当$x=e$时，函数取得最大值，最大值为$f\left(e\right)=e\ln e-e=0$，

所以 $f(3)=e\ln 3-3<0$，即 $e\ln 3<3$，即 $\ln 3<\frac{3}{e}$，所以是正确的.

故选：*C*.

【点睛】

本题主要考查了不等式的性质，以及导数在函数中的综合应用，其中解答中根据题意，合理构造新函数，利用导数求得函数的单调性和最值是解答的关键，着重考查了构造思想，以及推理与运算能力，属于中档试题.

7、**A**

【解析】

直接将 $\frac{z}{1-i}=i$ 两边同时乘以 $1-i$ 求出复数 z，再求其模即可.

【详解】

解：将 $\frac{z}{1-i}=i$ 两边同时乘以 $1-i$，得

$z=i(1-i)=1+i$

$|z|=\sqrt{2}$

故选：**A**

【点睛】

考查复数的运算及其模的求法，是基础题.

8、**C**

【解析】

利用导数求得 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上递增，结合 $y=c$ 与 $y=2^x, y=\log_2 x, y=x$ 图象，判断出 a,b,c 的大小关系，由此比较出 $f(a),f(b),f(c)$ 的大小关系.

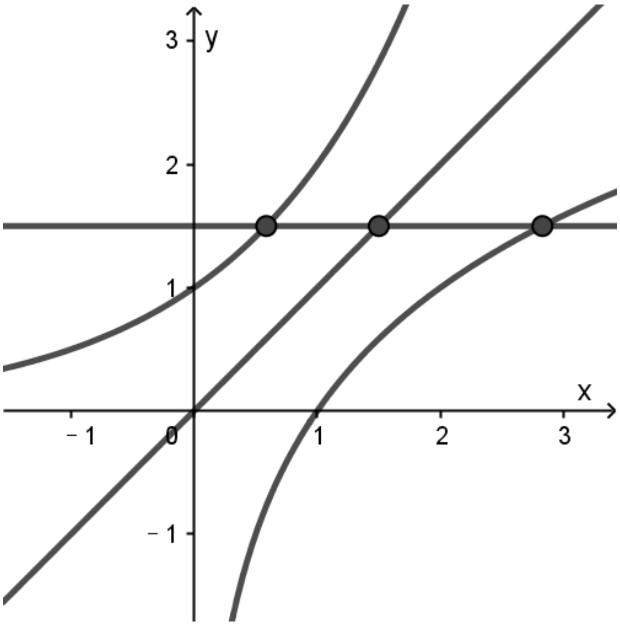
【详解】

因为 $f'(x)=(x-a)e^x$，所以 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增；

在同一坐标系中作 $y=c$ 与 $y=2^x, y=\log_2 x, y=x$ 图象，

$\because 2^a=\log_2 b=c$，可得 $a<c<b$，故 $f(a)<f(c)<f(b)$.

故选：**C**



【点睛】

本小题主要考查利用导数研究函数的单调性，考查利用函数的单调性比较大小，考查数形结合的数学思想方法，属于中档题.

9、**B**

【解析】

求得 $f\left(x\right)$ 的导函数 $f^{'}\left(x\right)$，由此构造函数 $g\left(x\right)=x^{2}+\left(2-m\right)x+2-m$，根据题意可知 $g\left(x\right)$ 在 $(1,2)$ 上有变号零点. 由此令 $g\left(x\right)=0$，利用分离常数法结合换元法，求得 m 的取值范围.

【详解】

$f'\left(x\right)=e^{x}\left[x^{2}+\left(2-m\right)x+2-m\right]$，

设 $g\left(x\right)=x^{2}+\left(2-m\right)x+2-m$，

要使 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,2\right]$ 上不是单调函数，

即 $g\left(x\right)$ 在 $(1,2)$ 上有变号零点，令 $g\left(x\right)=0$，

则 $x^{2}+2x+2=m\left(x+1\right)$，

令 $t=x+1\in\left(2,3\right)$，则问题即 $m=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $t\in\left(2,3\right)$ 上有零点，由于 $t+\dfrac{1}{t}$ 在 $\left(2,3\right)$ 上递增，所以 m 的取值范围是 $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{10}{3}\right)$.

故选：**B**

【点睛】