浙江省杭州第二中学2024届高三下学期期中考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$A=\left\{x\left|x^2+x-2<0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\lg x<1\right.\right\}$，$A\cap B=$（　）

A．$\left(-2,10\right)$　　B．$\left(0,1\right)$

C．$\left(-2,1\right)$　　D．$\left(-\infty,10\right)$

2．已知复数$z=\dfrac{3+4\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$，则$\left|\overline{z}\right|=$（　　）

A．2　　B．1　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

3．离散型随机变量X服从二项分布$X\sim B\left(n,p\right)$，且$E\left(X\right)=4$，$D\left(X\right)=3$，则p的值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{8}$

4．若正数a，b满足：$a^3+b^2=ab$，则a的最大值为（　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

5．为了给地球减负，提高资源利用率，2020年全国掀起了垃圾分类的热潮，垃圾分类已经成为新时尚，假设某市2020年全年用于垃圾分类的资金为5000万元，在此基础上，每年投入的资金比上一年增长20%，则该市全年用于垃圾分类的资金开始超过1.28亿元的年份是（　）（参考数据：$\lg 1.2\approx 0.079$，$\lg 2.56\approx 0.408$）

A．2023年　　B．2024年　　C．2025年　　D．2026年

6．函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$的减区间为（　）

A．$\left(-1,1\right)$　　B．$\left(-1,1\right]$　　C．$\left(0,1\right)$　　D．$(0,+\infty)$

7．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n}=1-\dfrac{1}{2^n}$，则$a_n=$（　）

A．$1-\frac{1}{2^n}$　　B．$\dfrac{1}{2^{n-3}}$　　C．$\dfrac{1}{2^n}$　　D．$\dfrac{n}{2^n}$

8．已知某圆台的母线长为$2\sqrt{2}$，母线与轴所在直线的夹角是$45°$，且上、下底面的面积之比为$1:4$，则该圆台外接球的表面积为（　）

A．40π　　B．64π　　C．80π　　D．128π

二、多选题

9．已知向量$\vec{a}=\left(\sqrt{3},1\right)$，$\vec{b}=\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$，已知$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，则下列结论正确的有（　）

A．$\left|\vec{b}\right|=1$

B．若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\alpha=\frac{\pi}{6}$

C．$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值为2

D．$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值为$\sqrt{3}$

10．关于空间向量，以下说法正确的是（　）

A．若空间向量$\vec{a}=\left(1,0,1\right)$，$\vec{b}=\left(0,1,-1\right)$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

B．若对空间中任意一点O，有$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，则$P$，$A$，$B$，$C$四点共面

C．若空间向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为锐角

D．若直线l的方向向量为$\vec{m}=\left(2,4,-2\right)$，平面$\alpha$的一个法向量为$\vec{n}=\left(-1,-2,1\right)$，则$l\perp\alpha$

11． 已知函数$f\left(x\right)=\sin\omega x+\cos\omega x\left(\omega>0\right)$图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，则（　）

A． $f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$对称

B． 将$f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，得到的函数图象关于y轴对称

C． $f\left(x\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$\left[-1,1\right]$

D． $f\left(x\right)$在$\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$上单调递增

12．有一组样本数据x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6的平均数是$\overline{x}$，方差是s^2，极差为R，则下列判断正确的是（　）

A．若$ax_1+b,ax_2+b,ax_3+b,ax_4+b,ax_5+b,ax_6+b$的平均数是$\overline{x_0}$，则$\overline{x_0}=a\overline{x}+b$

B．若$x_1,2x_2,3x_3,4x_4,5x_5,6x_6$的极差是$R_1$，则$R_1>R$

C．若方差$s^2=0$，则$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6$

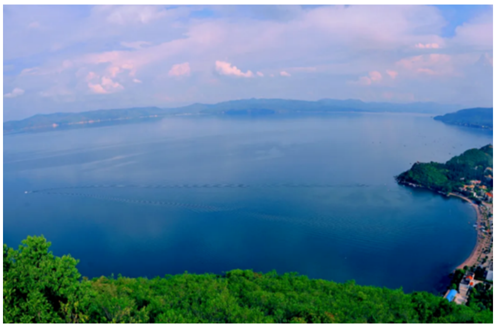
D．若 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$，则第 75 百分位数是 $\dfrac{x_4 + x_5}{2}$

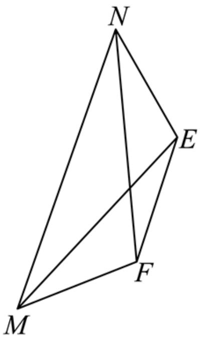
三、填空题

13．直线 $l: x+\sqrt{3}y-1=0$ 的倾斜角为____，经过点 $\left(1,\sqrt{3}\right)$ 且与直线 l 垂直的直线方程为____.

14．若 $(x+a)(1-2x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 70，则实数 $a=$_________.

15．抚仙湖，位于澄江市、江川区、华宁县之间，湖面积仅次于滇池和洱海，为云南省第三大湖，也是我国最大的深水型淡水湖泊．如图所示，为了测量抚仙湖畔 M，N 两点之间的距离，现取两点 E，F，测得 $EF=7$ 公里，$\angle MFN=\dfrac{3\pi}{4}$，$\angle NFE=\angle MEF=\dfrac{\pi}{12}$，$\angle MEN=\dfrac{2\pi}{3}$，则 M，N 两点之间的距离为______公里．





16．已知点 F 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点，A 为直线 $l: y=\dfrac{b}{a}x$ 在第一象限内的点，过原点 O 作 OA 的垂线交 FA 于点 B，且 B 恰为线段 AF 的中点，若 $\triangle ABO$ 的内切圆半径为 $\dfrac{b-2a}{4}(b>2a)$，则该双曲线的离心率大小为_______.

四、解答题

17．已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a\sin B=2b\cos A$.

(1)求 $\cos A$ 的值；

(2)若 $a=2\sqrt{10}$，$b=5$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

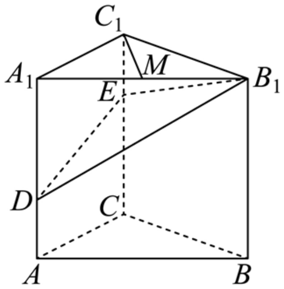
(3)若 $b=\sqrt{5}$，$c=3$，求 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线长.

18．已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_2=3$，且 $\sqrt{S_{n+1}}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_1}$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若$b_n=\dfrac{4S_n}{a_na_{n+1}}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和$T_n$.

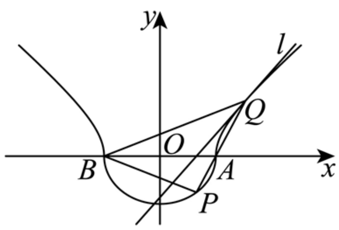
19．如图所示，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$平面ABC，$AC\perp BC$，$AC=BC=2$，$CC_1=3$，点D，E分别在棱AA_1和棱CC_1上，且$AD=1$，$CE=2$，点M为棱A_1B_1的中点.



(1)求证：$C_1M//$平面DB_1E；

(2)求直线AB与平面DB_1E所成角的正弦值.

20．如图，由部分椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,y\le 0)$和部分双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(y\ge 0\right)$，组成的曲线$C$称为“盆开线”．曲线$C$与$x$轴有$A\left(2,0\right)$、$B\left(-2,0\right)$两个交点，且椭圆与双曲线的离心率之积为$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.



(1)设过点(1,0)的直线l与C相切于点M，求点M的坐标及直线l的方程；

(2)过A的直线m与C相交于点P、A、Q三点，求证：$\angle PBA=\angle QBA$.

21．2023年9月8日，第19届亚运会火炬传递启动仪式在杭州西湖景区涌金公园广场成功举行．火炬传递首日传递从杭州西湖涌金公园广场出发，沿南山路—湖滨路—环城西路—北山街—西泠桥—孤山路传递，在“西湖十景”之一的平湖秋月收火．杭州亚运会火炬首日传递共有106棒火炬手参与.

(1)组委会从全省火炬手中随机抽取了100名火炬手进行信息分析，得到如下表格：

性别	年龄		总计

	满 50 周岁	未满 50 周岁	
男	15	45	60
女	5	35	40
总计	20	80	100

根据小概率值$\alpha = 0.1$的χ^2独立性检验，试判断全省火炬手的性别与年龄满或未满 50 周岁是否有关联；

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

(2)在全省的火炬手中，男性占比 72%，女性占比 28%，且 50%的男性火炬手和 25%的女性火炬手喜欢观看足球比赛．某电视台随机选取一位喜欢足球比赛的火炬手做访谈，请问这位火炬手是男性的概率为多少？

22．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}ax^2-x-\ln x\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

(1)讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2)当 $x\geq 1$，$\left|f\left(x\right)\right|\geq 2$，求 a 的取值范围；

(3)证明：$\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}>1-\frac{1}{n}$.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B	C	B	D	C	D	C	ABC	ABD
题号	11	12								
答案	ABD	AC								

1．B

【分析】根据解一元二次不等式的解法，结合对数函数的单调性、集合交集的定义进行求解即可.

【详解】因为$A=\left\{x\left|x^2+x-2<0\right.\right\}=\left(-2,1\right)$，$B=\left\{x\left|\lg x<1\right.\right\}=\left(0,10\right)$，

所以$A\cap B=\left(0,1\right)$，

故选：B

2．B

【分析】根据共轭复数的模的性质求解即可.

【详解】$\left|\overline{z}\right|=\left|z\right|=\left|\dfrac{3+4\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}\right|=\dfrac{\left|3+4\mathrm{i}\right|}{\left|4-3\mathrm{i}\right|}=\dfrac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{4^2+\left(-3\right)^2}}=1$，

故选：B

3．C

【分析】利用二项分布的数学期望和方差公式求解即可.

【详解】因为二项分布$X\sim B\left(n,p\right)$，

所以$\begin{cases}E\left(X\right)=np=4\\D\left(X\right)=np\left(1-P\right)=3\end{cases}$，解得$p=\dfrac{1}{4}$.

故选：C

4．B

【分析】根据条件等式及均值不等式求解即可.

【详解】因为a，b为正数，所以$a^3+b^2\geq 2\sqrt{a^3b^2}=2ab\sqrt{a}$，

因为$a^3+b^2=ab$，所以$ab\geq 2ab\sqrt{a}$，

所以$1\geq 2\sqrt{a}$，所以$a\leq\dfrac{1}{4}$，当且仅当$a=\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{1}{8}$时，取等号.

故选：B.

5．D

【分析】设 2020 后第 x 年该市全年用于垃圾分类的资金开始超过 1.28 亿元，由题意得出与 x 有关不等式计算即可得.

【详解】设 2020 后第 x 年该市全年用于垃圾分类的资金开始超过 1.28 亿元，

则 $5000(1+20\%)^{x}>12800$，即 $1.2^{x}>2.56$，

则 $x>\log_{1.2}2.56=\dfrac{\lg 2.56}{\lg 1.2}\approx 5.16$，

则该市全年用于垃圾分类的资金开始超过 1.28 亿元的年份是 2026.

故选：D.

6．C

【分析】对函数求导，然后通分，进而令导函数小于 0，最后求得单调递减区间.

【详解】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^{2}-\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$，求导得 $f'\left(x\right)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^{2}-1}{x}$，令

$f'\left(x\right)=\dfrac{x^{2}-1}{x}<0$，$\because x>0$，$\therefore 0<x<1$，因此函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^{2}-\ln x$ 的减区间为$\left(0,1\right)$.

故选：C.

7．D

【分析】当 $n\geq 2,\ a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$,两式做差整理求解即可.

【详解】因为 $a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n}=1-\dfrac{1}{2^{n}}$，

当 $n\geq 2,\ a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$，两式做差得：

$\dfrac{a_n}{n}=1-\dfrac{1}{2^{n}}-1+\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^{n}}$，

故 $a_n=\dfrac{n}{2^{n}}\left(n\geq 2\right)$，当 $n=1$，$a_1=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，符合 $a_n=\dfrac{n}{2^{n}}$；故 $a_n=\dfrac{n}{2^{n}}$.

故选：D

8．C

【分析】在轴截面中根据长度和角度关系以及三角形相似可得圆台的上底面半径和下底面半径及高，利用勾股定理建立等式解出方程，即可求得外接球半径，进而求得其表面积.

【详解】如图：上，下底面圆心分别为 M,N，外接球球心为 O，

连接 OC,OB 如图所示：

因为上、下底面的面积之比为 1：4，则上底面半径与下底面半径之比为 $1:2$，即 $CN=2MB$，

又母线与轴所在直线的夹角是 45°,故 $\angle BCN=45°$，结合 $BC=2\sqrt{2}$，

则有 $CN-BM=2,MN=2$，故 $CN=4,BM=2,MN=2$

记圆台外接球半径为$R, OM=h$，

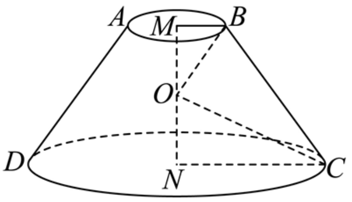
在直角$\triangle OCN$和直角$\triangle OBM$中由勾股定理知：$OM^2+MB^2=OB^2$，$ON^2+NC^2=OC^2$，

则有$h^2+2^2=\left(2-h\right)^2+4^2$，解可得$h=4$，

故圆台外接球的半径$R^2=4+16=20$，

则该圆台外接球的表面积$S=4\pi R^2=80\pi$.

故选：C.



9．ABC

【分析】根据向量的模的坐标公式求$\left|\vec{b}\right|$，判断A；根据向量平行的坐标表示列方程求α，判断B，

根据数量积的坐标运算结合正弦函数性质求$\vec{a}\cdot\vec{b}$最大值，判断C，根据数量积的运算性质判断D.

【详解】对于A，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$，A正确；

对于B，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=0$，

$\therefore\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$；B正确；

对于C，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha=2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$\alpha+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，所以当$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$时$\vec{a}\cdot\vec{b}$最大值为2，C正确；

对于D，$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=1$，

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{5-4\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)}$

$\because\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\alpha+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，

当$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$取得最小值1，D错误

故选：ABC.

10．ABD

【分析】A投影向量定义求$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量；B由空间向量共面的推论判断；C由$\vec{a}$，$\vec{b}$

同向共线即可判断；D 由$\vec{m}=-2\vec{n}$即可判断.

【详解】A：$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\frac{1}{2}\vec{b}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，对；

B：在$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$中$\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=1$，故$P$，$A$，$B$，$C$四点共面，对；

C：当$\vec{a}$，$\vec{b}$同向共线时$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$也成立，但$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角不为锐角，错；

D：由$\vec{m}=-2\vec{n}$，即$\vec{m}//\vec{n}$，故$l\perp\alpha$，对.

故选：ABD

11．ABD

【分析】根据相邻两条对称轴之间的距离可的周期，然后可得解析式.由正弦函数的对称性可判断 A；由函数图象的平移变换，结合余弦函数的性质可判断 B；根据x的范围和正弦函数的性质直接求解可判断 C；根据正弦函数单调性通过解不等式可判断 D.

【详解】$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\because$相邻两对称轴间距离为$\frac{\pi}{2}$，则$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，

$\therefore\omega=2$，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\because f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(2\times\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\pi=0$，$\therefore f(x)$关于$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$对称，A 对.

$\because f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，$\therefore f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$关于$y$轴对称，B 对.

当$0\le x\le\frac{\pi}{2}$时，有$0\le 2x\le\pi$，则$\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5}{4}\pi$，所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，

$\therefore f(x)\in\left[-1,\sqrt{2}\right]$，C 错误.

由$-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}$，得$-\frac{3}{8}\pi\le x\le\frac{\pi}{8}$，所以$f(x)$的一个单调增区间为$\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$，而$\left[-\frac{\pi}{4},0\right]\subset\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$，$\therefore f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$上单调递增，D 对.

故选：ABD

12．AC

【分析】根据题意，利用平均数、方差的计算公式，以及极差的定义和百分位数的计算方法，逐项判定，即可求解.

【详解】对于 A 中，由$\overline{x_0}=\frac{1}{6}(ax_1+b,ax_2+b,ax_3+b,ax_4+b,ax_5+b,ax_6+b)$