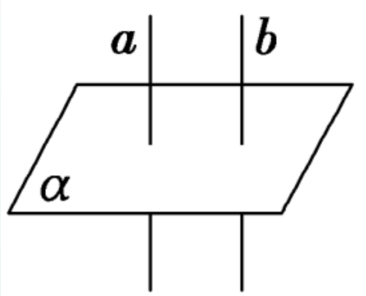
第二课时　直线与平面垂直的性质

自主学习——课前预习任务单

知识点　直线与平面垂直的性质

(一)教材梳理填空

1．直线与平面垂直的性质定理：

文字语言	垂直于同一个平面的两条直线__平行__
符号语言	$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{a\parallel b}$
图形语言	
作用	①线面垂直⇒线线平行，②作平行线

2．线面距与面面距：

(1)一条直线与一个平面平行时，这条直线上<u>任意一点</u>到这个平面的距离，叫 做这条直线到这个平面的距离．

(2)如果两个平面平行，那么其中一个平面内的<u>任意一点</u>到另一个平面的距离<u>都相等</u>，我们把它叫做这两个平行平面间的距离．

(二)基本知能小试

1．判断正误：

(1)垂直于同一条直线的两个平面平行．　　(　　)　　√

(2)直线上任意一点到这个平面的距离，就是这条直线到这个平面的距离．(×)

(3)到已知平面距离相等的两条直线平行．　(　　)　　×

2．从圆柱的一个底面上任取一点(该点不在底面圆周上)，过该点作另一个底面的垂线，则这条垂线与圆柱的母线所在直线的位置关系是　(　　)

A．相交　　　　B．平行

C．异面　　　　D．相交或平行

答案：B

师生共研——课堂学习活动单

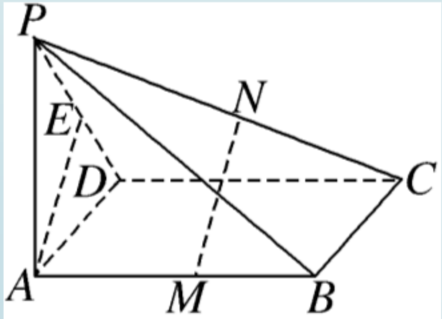
题型一　直线与平面垂直的性质定理

【学透用活】

(1)直线与平面垂直的性质定理给出了一种证明两直线平行的方法，即只需证明两条直线均与同一个平面垂直即可．关键是找(构造)出平面，使所证直线与该平面垂直．

(2)利用直线与平面垂直的性质定理可构造平行线，即垂直于同一个平面的直线互相平行．

[典例 1]　如图，在四棱锥 $PABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AB\perp$平面 PAD，$AD=AP$，E 是 PD 的中点，M，N 分别在 AB，PC 上，且 $MN\perp AB$，$MN\perp PC$.



求证：$AE\parallel MN$.

[证明] $\because AB\perp$平面PAD，$AE\subset$平面PAD，

$\therefore AE\perp AB$.又$AB/\!/CD$，$\therefore AE\perp CD$.

$\because AD=AP$，E是PD的中点，$\therefore AE\perp PD$.

又$CD\cap PD=D$，$CD\subset$平面PCD，$PD\subset$平面PCD，

$\therefore AE\perp$平面PCD.$\because MN\perp AB$，$AB/\!/CD$，$\therefore MN\perp CD$.

又$\because MN\perp PC$，$PC\cap CD=C$，

$PC\subset$平面PCD，$CD\subset$平面PCD，

$\therefore MN\perp$平面PCD.

$\therefore AE/\!/MN$.

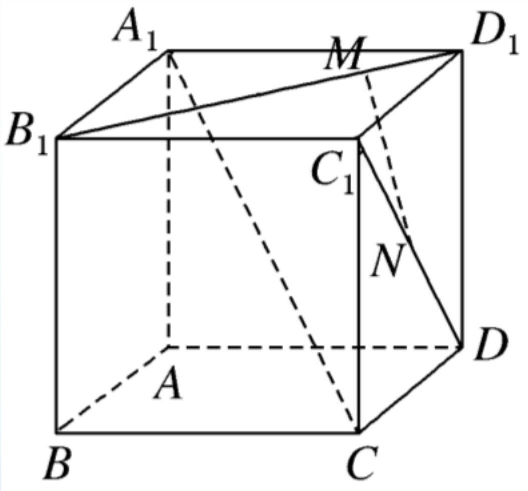
[方法技巧]

关于线面垂直性质定理的应用

在证明与垂直相关的平行问题时，可以考虑线面垂直的性质定理，利用已知的垂直关系构造线面垂直，关键是确定与要证明的两条直线都垂直的平面.

【对点练清】

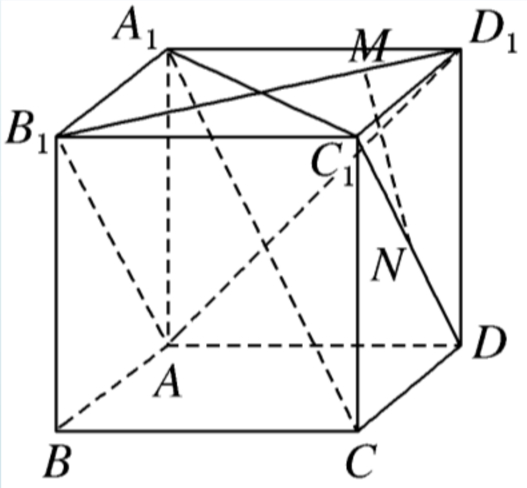
如图，已知正方体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



(1)求证：$A_1C\perp B_1D_1$.

(2)M，N 分别为 B_1D_1 与 C_1D 上的点，且 $MN\perp B_1D_1$，$MN\perp C_1D$，求证：$MN/\!/A_1C$.

证明：(1)如图，连接 A_1C_1.



$\because CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

$B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$\therefore CC_1\perp B_1D_1$.

$\because$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形，

$\therefore A_1C_1\perp B_1D_1$.又 $\because CC_1\cap A_1C_1=C_1$，$\therefore B_1D_1\perp$ 平面 A_1C_1C.又 $\because A_1C\subset$ 平面 A_1C_1C，$\therefore B_1D_1\perp A_1C$.

(2)如图，连接 B_1A，AD_1. ∵ B_1C_1 绣 AD，

∴四边形 ADC_1B_1 为平行四边形，

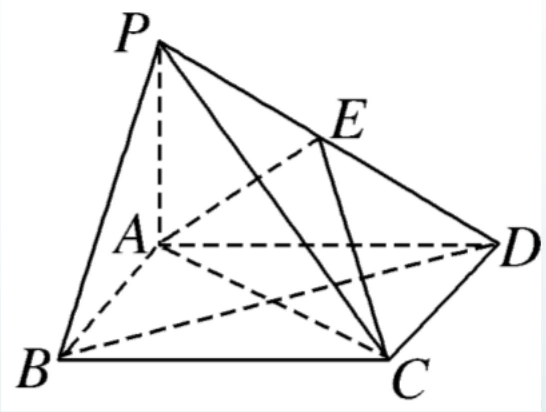
∴ $C_1D \parallel AB_1$. ∵ $MN \perp C_1D$，∴ $MN \perp AB_1$.

又∵ $MN \perp B_1D_1$，$AB_1 \cap B_1D_1 = B_1$，∴ $MN \perp$ 平面 AB_1D_1.

由(1)知 $A_1C \perp B_1D_1$.同理可得 $A_1C \perp AB_1$.

又∵ $AB_1 \cap B_1D_1 = B_1$，∴ $A_1C \perp$ 平面 AB_1D_1. ∴ $A_1C \parallel MN$.

【学透用活】



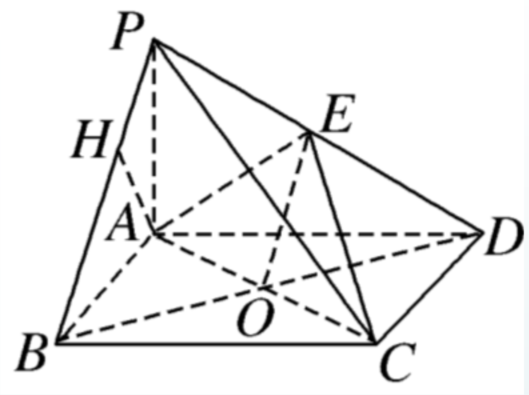
要解决空间中的距离问题，主要是利用线面距、面面距的定义，转化为直线或平面上的一点到平面的距离.

[典例 2] 如图，在四棱锥 $PABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点.

(1)证明：$PB\parallel$平面 AEC；

(2)设 $AP=1$，$AD=\sqrt{3}$，三棱锥 $PABD$ 的体积 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}$，求 A 到平面 PBC 的距离.

[解]　(1)证明：如图，设 BD 与 AC 的交点为 O，连接 EO. ∵四边形 $ABCD$ 为矩形，∴点 O 为 BD 的中点.



又∵点 E 为 PD 的中点，∴$EO /\!/ PB$.

∵$EO \subset$ 平面 AEC，$PB \not\subset$ 平面 AEC，

∴$PB /\!/$ 平面 AEC.

(2)∵$V=\frac{1}{6}AP\cdot AB\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{6}AB$.

由 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}$，可得 $AB=\frac{3}{2}$.作 $AH \perp PB$ 于点 H.

由题设知 $BC\perp$ 平面 PAB，$\therefore BC\perp AH$.

$\therefore AH\perp$ 平面 PBC,

即 AH 的长就是点 A 到平面 PBC 的距离.

$\because PB=\sqrt{AP^2+AB^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$\therefore AH=\dfrac{AP\cdot AB}{PB}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore$ 点 A 到平面 PBC 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

[方法技巧]

(1)从平面外一点作一个平面的垂线，这个点与垂足间的距离就是这个点到这个平面的距离．当该点到已知平面的垂线不易作出时，可利用线面平行、面面平行的性质转化为与已知平面等距离的点作垂线，然后计算．

(2)利用中点转化：如果条件中具有中点条件，将一个点到平面的距离，借助中点(等分点)，转化为另一点到平面的距离．

(3)通过换底转化：一是直接换底，以方便求几何体的高；二是将底面扩展(分割)，以方便求底面积和高．