第二章　一元二次方程

全章热门考点整合专训

考点1　两个概念

概念1　一元二次方程的概念

1. [2023北京朝阳区期中]下列方程中，是一元二次方程的是(C)

A. $xy+2=1$　　B. $\frac{1}{x^2}-x=1$

C. $x(x-3)=0$　　D. $x^3+2x=0$

概念2　一元二次方程的根

2. [教材P51习题T3变式]已知方程$x^2+mx-3=0$的一个根是1，则m的值为__2__.

3. 若 a 是方程 $2x^2=x+4$ 的一个根，则 $4a^2-2a$ 的值是__8__.

考点 2一个估算——一元二次方程的近似解

4. [2024西安市第八十五中学开学考试]根据下列表格中的对应值，判断方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$，a，b，c为常数)的一个解的范围是(C)

x	3.23	3.24	3.25	3.26
ax^2+bx+c	-0.06	-0.02	0.03	0.09

A. $3<x<3.23$　　B. $3.23<x<3.24$

C. $3.24<x<3.25$　　D. $3.25<x<3.26$

考点3　一个解法——一元二次方程的解法

5. 用合适的方法解下列方程：

(1) $x^2-6x+7=0$；

解：(1)移项，得$x^2-6x=-7$.

配方，得$x^2-6x+9=-7+9$，即$(x-3)^2=2$.

两边开平方，得$x-3=\pm\sqrt{2}$.

$\therefore x_1=3+\sqrt{2}$，$x_2=3-\sqrt{2}$.

5. 用合适的方法解下列方程：

(2) $x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{6}=0$；

解：(2)原方程可化为$6x^2-3\sqrt{3}x+1=0$.

这里$a=6$，$b=-3\sqrt{3}$，$c=1$.

$\because b^2-4ac=(-3\sqrt{3})^2-4\times6\times1=3>0$，

$\therefore x=\frac{-(-3\sqrt{3})\pm\sqrt{3}}{2\times6}=\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{12}$.

$\therefore x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x_2=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

5. 用合适的方法解下列方程：

(3) $3x(2x+1)=4x+2$.

解：(3)原方程可变形为$(2x+1)(3x-2)=0$，

$\therefore 2x+1=0$或$3x-2=0$.

$\therefore x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{2}{3}$.

点方法：解方程口诀：观察方程能否开平方，再看是否能分解，左分降次右化零，求根公式最后用，系数符号要辨明.

考点4　两个关系

关系1　一元二次方程根的判别式与根的关系

6. [2023泸州]关于x的一元二次方程$x^2+2ax+a^2-1=0$的根的情况是(　C　)

A. 没有实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 有两个不相等的实数根

D. 实数根的个数与实数a的取值有关

7. 【新趋势·学科内综合】若一元二次方程$x^2-2x-m=0$有两个不相等的实数根，则一次函数$y=(m+1)x+m+2$的图象不经过第(　A　)象限.

A. 四　　B. 三

C. 二　　D. 一

8.【新视角新定义题】定义新运算“※”：对于实数 m，n，p，q.有 $[m, p]※[q, n]=mn+pq$，其中等式右边是通常的加法和乘法运算，例如：$[2, 3]※[4, 5]=2\times5+3\times4=22$.若关于 x 的方程 $[x^2+1, x]※[5-2k, k]=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是(　C　)

A. $k<\frac{5}{4}$ 且 $k\neq0$　　B. $k\leq\frac{5}{4}$

C. $k\leq\frac{5}{4}$ 且 $k\neq0$　　D. $k\geq\frac{5}{4}$

关系2　**一元二次方程根与系数的关系**

9. [2023威海]一元二次方程$x^2+3x-1=0$的两根为x_1，x_2，

则$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$的值为(　C　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. -3

C. 3　　D. $-\frac{3}{2}$

10. 已知关于x的一元二次方程$x^2-(2k+1)x+k^2+2k=0$有两个实数根x_1，x_2.

(1)求实数k的取值范围；

解：(1)∵原方程有两个实数根，

$\therefore [-(2k+1)]^2-4(k^2+2k)\geq 0$，$\therefore k\leq\frac{1}{4}$，

$\therefore$实数k的取值范围是$k\leq\frac{1}{4}$.

10. 已知关于x的一元二次方程$x^2-(2k+1)x+k^2+2k=0$有两个实数根x_1，x_2.

(2)是否存在实数k，使得$x_1x_2-x_1^2-x_2^2=0$成立？若存在，请求出k的值；若不存在，请说明理由.

解：(2)不存在实数k，使得$x_1x_2-x_1^2-x_2^2=0$成立.

理由：假设存在实数k，使得$x_1x_2-x_1^2-x_2^2=0$成立.

$\because x_1$，x_2是原方程的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=2k+1$，$x_1x_2=k^2+2k$，

由$x_1x_2-x_1^2-x_2^2=0$，得$3x_1x_2-(x_1+x_2)^2=0$，

$\therefore 3(k^2+2k)-(2k+1)^2=0$，整理得$-(k-1)^2=0$，

$\therefore$只有当$k=1$时，等式才能成立.

又$\because$由(1)知$k\leq\frac{1}{4}$，

$\therefore$不存在实数k，使得$x_1x_2-x_1^2-x_2^2=0$成立.