第三章

必刷大题6 导数的综合问题

1.已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+6x+c$，当$x=-1$时，$f(x)$的极小值为$-\frac{5}{2}$，当$x=2$时，$f(x)$有极大值.

(1)求函数$f(x)$的解析式；

解

$f'(x)=3ax^2+2bx+6$,

由$f'(-1)=f'(2)=0$,

得$3a-2b+6=0$且$12a+4b+6=0$,

解得 $a=-1$, $b=\frac{3}{2}$,

又 $f(-1)=-\frac{5}{2}$, $\therefore c=1$,

经检验满足题意,

$\therefore f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+1$.

(2)存在$x_0\in[-2,0]$，使得$f(x_0)>t^2-2t$成立，求实数t的取值范围.

解

存在$x_0\in[-2,0]$，使得$f(x_0)>t^2-2t$成立，

等价于$f(x)_{max}>t^2-2t$，$x\in[-2,0]$，

$\because f'(x)=-3x^2+3x+6=-3(x-2)(x+1)$，

当$x\in[-2,-1)$时，$f'(x)<0$；

当$x\in(-1,0]$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$在$[-2,-1)$上单调递减，在$(-1,0]$上单调递增，

又$f(-2)=3$，$f(0)=1$，

$\therefore f(x)$在$[-2,0]$上的最大值为$f(-2)=3$，

$\therefore t^2-2t<3$，解得$-1<t<3$，$\therefore t$的取值范围是$(-1,3)$.

2.(2023·商洛统考)已知函数$f(x)=e^x-4\sin x$，其中e为自然对数的底数.

(1)求曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程；

解

因为$f(x)=e^x-4\sin x$，

所以$f'(x)=e^x-4\cos x$，

则$f(0)=1$，$f'(0)=-3$，

故所求切线方程为$y-1=-3(x-0)$，即$3x+y-1=0$.

(2)证明：$f(x)$在$[0，+\infty)$上有两个零点.

证明

设$g(x)=f'(x)=e^x-4\cos x$，

则$g'(x)=e^x+4\sin x$.

显然当$x\in[0,\pi]$时，$g'(x)>0$，

当$x\in[\pi,+\infty)$时，$g'(x)>e^{\pi}-4>0$，

所以$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

又$f'(0)=-3<0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}-2>0$，

所以存在唯一$x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，使$f'(x_0)=0$.

则当$x\in[0,x_0)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

证明

故$f(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增.

因为$f(0)=1>0$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}-2\sqrt{2}<e-2\sqrt{2}<0$，$f(\pi)=e^{\pi}>0$，

所以$f(x)$在$[0，+\infty)$上有两个零点.

3.已知函数$f(x)=\frac{x}{a}+\ln x$，其中a为常数，e为自然对数的底数.

(1)当$a=-1$时，求$f(x)$的单调区间；

解

函数$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

当$a=-1$时，$f(x)=\ln x-x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，$x>0$，

令$f'(x)>0$，得$0<x<1$；令$f'(x)<0$，得$x>1$，

∴函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，单调递减区间为$(1，+\infty)$.

(2)若$f(x)$在区间(0，e]上的最大值为2，求a的值.

解

$f'(x)=\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=\frac{a+x}{ax}$,

①当$a>0$时，$\because x>0$，$\therefore f'(x)>0$,

$\therefore$函数$f(x)$在$(0，e]$上单调递增，

$\therefore f(x)_{max}=f(e)=2$，$\therefore \frac{e}{a}+1=2$,

$\therefore a=e$，符合题意；

②当$a<0$且$-a<e$，即$-e<a<0$时，令$f'(x)=0$，得$x=-a$,

解

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表.

x	$(0, -a)$	$-a$	$(-a, e)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

$\therefore f(x)_{max}=f(-a)=2$，

$\therefore -1+\ln(-a)=2$，

$\therefore a=-e^3$，不符合题意，舍去；

解

③当$-a \geqslant e$，即$a \leqslant -e$时，在$(0, e]$上，$f'(x) \geqslant 0$，

$\therefore f(x)$在$(0, e]$上单调递增，

故$f(x)$在$(0, e]$上的最大值为$f(e)=\dfrac{e}{a}+1=2$，

$\therefore a=e$，不符合题意，舍去，

综上可得$a=e$.

4.(2024·安康模拟)已知$f(x)=\ln x-ax$，$g(x)=x+\ln m(a$，$m\in\mathbf{R}$，$m>0)$.

(1)讨论$f(x)$的单调性；