历年高考数学真题精编

06 解三角形

一、单选题

1．(2013·天津)在△ABC中，$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，$AB=\sqrt{2}$，$BC=3$,则sin∠BAC=（　　）

A．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

2．(2012·陕西）在ΔABC中，角A,B,C所对边长分别为a,b,c，若$a^2+b^2=2c^2$，则$\cos C$的最小值为

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

3．(2013·辽宁）在ΔABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若

$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，且$a>b$，则$B=$

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

4．(2013·全国)已知锐角△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,$23\cos^2A+\cos 2A=0$,a=7,c=6,则b等于(　　)

A．10　　B．9　　C．8　　D．5

5．(2016·山东）$\vee ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，已知

$b=c,a^2=2b^2(1-sinA)$,则A=

A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

6．(2011·辽宁）⊿ABC的三个内角A、B、C所对的边分别为a，b，c，asin AsinB+bcos²A=$\sqrt{2}$a，则$\frac{b}{a}$=（ ）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

7．(2012·上海）在ΔABC中，若$\sin^2A+\sin^2B<\sin^2C$,则ΔABC的形状是（ ）

A．锐角三角形　B．直角三角形　　C．钝角三角形　　D．不能确定

8．(2011·浙江）在ΔABC中，角A,B,C所对的边分a,b,c．若$a\cos A=b\sin B$，则$\sin A\cos A+\cos^2B=$

A．-$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-1　　D．1

9．（2019·全国）$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\sin A-b\sin B=4c\sin C$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则$\frac{b}{c}=$

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

10．（2014·江西）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别是a，b，c.若$3a=2b$，则$\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}$的值为（　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．1　　D．$\frac{7}{2}$

11．（2023·北京）在$\triangle ABC$中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则$\angle C=$（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

12．（2017·山东）在ΔABC中，角A, B, C的对边分别为a，b，c．若ΔABC为锐角三角形，且满足$\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$，则下列等式成立的是

A．$a=2b$　　B．$b=2a$　　C．$A=2B$　　D．$B=2A$

13．（2014·江西）在ΔABC中，内角A,B,C所对应的边分别为$a,b,c,$，若$c^2=(a-b)^2+6,C=\frac{\pi}{3},$则$\Delta ABC$的面积

A．3　　B．$\frac{9\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D．$3\sqrt{3}$

14．（2017·全国）$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c．已知$\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，$a$=2，$c=\sqrt{2}$，则$C$=

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

15．（2011·四川）在⊿ABC中，$\sin^2 A\leqslant\sin^2 B+\sin^2 C-\sin B\sin C$．则$A$的取值范围是（ ）

A．（0，$\frac{\pi}{6}$]　　B．[$\frac{\pi}{6}$，π）　　C．（0，$\frac{\pi}{3}$]　　D．[$\frac{\pi}{3}$，π）

16．（2016·全国）△ABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c.已知$a=\sqrt{5}$，$c=2$，$\cos A=\frac{2}{3}$，则b=

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

17．（2008·福建）在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\left(a^2+c^2-b^2\right)\tan B=\sqrt{3}ac$，则角$B$的值为（　）.

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$

C．$\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

18．（2020·山东）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别是a，b，c，若$a^2+b^2=c^2+ab\sin C$，且$a\sin B\cos C+\ c\sin B\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}b$，则$\tan A$等于（　）

A．3　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．3或$-\frac{1}{3}$　　D．-3或$\frac{1}{3}$

19．（2023·全国）已知四棱锥$P-ABCD$的底面是边长为4的正方形，$PC=PD=3,\angle PCA=45°$，则$\triangle PBC$的面积为（　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$6\sqrt{2}$

20．（2023·全国）在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别是a,b,c，若$a\cos B-b\cos A=c$，且$C=\frac{\pi}{5}$，则$\angle B=$（　）

A．$\frac{\pi}{10}$　　B．$\frac{\pi}{5}$　　C．$\frac{3\pi}{10}$　　D．$\frac{2\pi}{5}$

二、填空题

21．（2014·福建）在ΔABC中，$A=60°,AC=4,BC=2\sqrt{3}$,则ΔABC的面积等于_

22．（2014·山东）在ΔABC中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\tan A$，当$A=\frac{\pi}{6}$时，$\Delta ABC$的面积为________.

23．（2015·天津）在ΔABC中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知ΔABC的面积为$3\sqrt{15}$，$b-c=2,\cos A=-\frac{1}{4}$，则$a$的值为___________.

24．（2021·全国）记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60°$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$________.

25．（2014·广东）在ΔABC中，角A、B、C所对应的边分别为a、b、c，已知$b\cos C+c\cos B=2b$，则$\frac{a}{b}=$____.

26．（2014·全国）已知a,b,c分别为ΔABC三个内角A,B,C的对边，$a=2$，且$(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则$\Delta ABC$面积的最大值为____________.

27．（2015·北京）在ΔABC中，$a=4$，$b=5$，$c=6$，则$\frac{\sin 2A}{\sin C}=$__________.

28．（2015·重庆）在ΔABC中，$B=120^0$，$AB=\sqrt{2}$，A的角平分线$AD=\sqrt{3}$，则$AC=$________.

29．（2015·重庆）设ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$a=2,\cos C=-\frac{1}{4},3\sin A=2\sin B$，则$c=$________.

30．（2016·全国）ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若cos $A=\frac{4}{5}$，cos $C=\frac{5}{13}$，$a=1$，则$b=$___.

31．（2017·全国）ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，则$B=$ ________.

32．（2007·江苏）在平面直角坐标系xoy中，已知ΔABC的顶点$A(-4,0),C(4,0)$，顶点B在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上，$\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=$____________

33．（2018·全国）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$，$b^2+c^2-a^2=8$，则△$ABC$的面积为________.

34．（2018·北京）若$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$,且∠$C$为钝角，则∠$B$=_________；$\frac{c}{a}$的取值范围是_________.

35．（2012·福建）已知△ABC得三边长成公比为$\sqrt{2}$的等比数列，则其最大角的余弦值为_____.

36．（2011·上海）在相距2千米的A、B两点处测量目标C，若$\angle CAB=75^0,\angle CBA=60^0$，则A、$C$两点之间的距离是______________ 千米.

37．（2019·浙江）在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段AC上，若$\angle BDC=45°$，则$BD=$____；$\cos\angle ABD=$________.

38．（2019·全国）$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$b=6,a=2c,B=\frac{\pi}{3}$，则$\triangle ABC$的面积为__________.

39．（2019·全国）$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知$b\sin A+a\cos B=0$，则B=___________.

40．（2022·全国）已知$\triangle ABC$中，点D在边BC上，$\angle ADB=120°,AD=2,CD=2BD$．当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=$________.

三、解答题

41．（2012·浙江）在△ABC 中，内角 A,B，C 的对边分别为 a，b，c，且 bsinA=$\sqrt{3}$acosB．

（1）求角 B 的大小；

（2）若 b=3，sinC=2sinA，求 a，c 的值

42．（2014·陕西）ΔABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.

（1）若a,b,c成等差数列，证明：$\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$；

（2）若a,b,c成等比数列，且$c=2a$，求$\cos B$的值.

43．（2022·全国）记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C\sin\left(A-B\right)=\sin B\sin\left(C-A\right)$．

(1)若$A=2B$，求C；

(2)证明：$2a^2=b^2+c^2$

44．（2007·浙江）已知$\triangle ABC$的周长为$\sqrt{2}+1$，且$\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.

(1)求边AB的长；

(2)若$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{6}\sin C$，求角C的度数.

45．（2022·天津）在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a，b，c.已知$a=\sqrt{6},b=2c,\cos A=-\frac{1}{4}$.

(1)求c的值；

(2)求$\sin B$的值；

(3)求$\sin(2A-B)$的值.

46．（2004·浙江）在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，且$\cos A=\frac{1}{3}$．

(1)求$\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A$的值；

(2)若$a=\sqrt{3}$，求bc的最大值．

47．（2013·湖北）在△ABC 中，角 A，B，C 对应的边分别是 a，b，c，已知 cos2A﹣ 3cos（B+C）=1．

（1）求角 A 的大小；

（2）若△ABC 的面积 S=5$\sqrt{3}$，b=5，求 sinBsinC 的值．

48．（2010·浙江）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a,b,c,设 S 为△ABC 的面积，满足$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2-c^2)$．

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）求$\sin A+\sin B$的最大值．

49．（2010·辽宁）在$\triangle ABC$中，a, b, c分别为内角A, B, C的对边，且$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C.$

（Ⅰ）求A的大小；

（Ⅱ）求$\sin B+\sin C$的最大值.

50．（2015·陕西）ΔABC 的内角 A， B， C 所对的边分别为a， b， c．向量$\vec{m}=\left(a,\sqrt{3}b\right)$与$\vec{n}=\left(\cos \mathrm{A},\sin \mathrm{B}\right)$平行．

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）若$a=\sqrt{7}$， $b=2$求ΔABC 的面积．

51．（2013·全国）△ABC 在内角 A、B、C 的对边分别为 a，b，c，已知 a=bcosC+csinB．

（Ⅰ）求 B；

（Ⅱ）若 b=2，求△ABC 面积的最大值.

52．（2011·湖南）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c且满足$c\sin A=a\cos C.$

（1）求角C的大小；

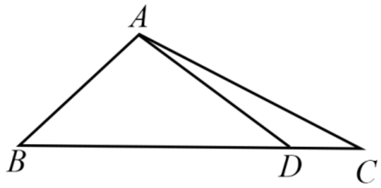
（2）求$\sqrt{3}\sin A-\cos(B+\frac{\pi}{4})$的最大值，并求取得最大值时角$A,B$的大小．

53．（2013·江西）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$\cos C+(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\cos B=0$．

（1）求角B的大小；

（2）若$a+c=1$，求b的取值范围．

54．（2020·江苏）在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a=3,c=\sqrt{2},B=45°$．


A
B
D
C

（1）求$\sin C$的值；

（2）在边BC上取一点D，使得$\cos\angle ADC=-\frac{4}{5}$，求$\tan\angle DAC$的值.

55.（2020·山东）在①$ac=\sqrt{3}$，②$c\sin A=3$，③$c=\sqrt{3}b$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求c的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在$\triangle ABC$，它的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且

$\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\frac{\pi}{6}$，________?

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

56.（2020·北京）在$\triangle ABC$中，$a+b=11$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（Ⅰ）a的值：

（Ⅱ）$\sin C$和$\triangle ABC$的面积.

条件①：$c=7,\cos A=-\frac{1}{7}$；

条件②：$\cos A=\frac{1}{8},\cos B=\frac{9}{16}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

57.（2021·全国）记$\triangle ABC$是内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知$b^2=ac$，点D在边AC上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若$AD=2DC$，求$\cos\angle ABC$.

58.（2006·江西）在锐角$\triangle ABC$中，角A、B，C所对的边分别为a、b、c，已知$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(1)求$\tan^2\frac{B+C}{2}+\sin^2\frac{A}{2}$的值；

(2)若$a=2,S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$，求$b$的值.

59.（2023·全国）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，D为BC中点，且$AD=1$.

(1)若$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，求$\tan B$；

(2)若$b^2+c^2=8$，求b,c.

60.（2023·全国）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知

$\frac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$.

(1)求 bc；

(2)若 $\frac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\frac{b}{c}=1$，求 $\triangle ABC$ 面积.

参考答案：

1．C

【解析】∵$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，$AB=\sqrt{2}$，BC=3，

∴由余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=2+9-6=5$，

∴$AC=\sqrt{5}$，

则由正弦定理$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$得：$\sin\angle BAC=\frac{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

故选 C

2．C

【解析】$\because c^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$，由余弦定理得,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2}{4ab}\geq\frac{1}{2}$当且仅当

$a=b$时取“$=$”，$\therefore\cos C$的最小值为$\frac{1}{2}$，选 C.

3．A

【解析】边换角后约去 sin B，得 $\sin(A+C)=\frac{1}{2}$，所以 $\sin B=\frac{1}{2}$，但∠B 非最大角，所以$\angle B=\frac{\pi}{6}$.

4．D

【解析】由题意知,$23\cos^2A+2\cos^2A-1=0$,

即 $\cos^2A=\frac{1}{25}$,

又因△ABC 为锐角三角形,

所以 $\cos A=\frac{1}{5}$.

△ABC 中由余弦定理知 $7^2=b^2+6^2-2b\times6\times\frac{1}{5}$,

即 $b^2-\frac{12}{5}b-13=0$,

即 b=5 或 $b=-\frac{13}{5}$(舍去),故选 D.

5．C

【解析】试题分析：由余弦定理得：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2b^2-2b^2\cos A=2b^2\left(1-\cos A\right)$，因为$a^2=2b^2\left(1-\sin A\right)$，所以

$\cos A=\sin A$，因为$\cos A\neq 0$，所以$\tan A=1$，因为$A\in\left(0,\pi\right)$，所以$A=\frac{\pi}{4}$，故选 C.

6．D

【解析】∵△ABC 中，asinAsinB+bcos2A＝$\sqrt{2}$ a，

∴根据正弦定理，得 $\sin^2$AsinB+sinB$\cos^2$A＝$\sqrt{2}$ sinA，

可得 sinB（$\sin^2$A+$\cos^2$A）＝$\sqrt{2}$ sinA，∵$\sin^2$A+$\cos^2$A＝1，

∴sinB＝$\sqrt{2}$ sinA，得 b＝$\sqrt{2}$ a，可得$\frac{b}{a}$＝$\sqrt{2}$．

故选 D．

7．C

【解析】由正弦定理得$a^2+b^2<c^2$，则$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，

角 C 为钝角，故选 C.

8．D

【解析】试题分析：由$a\cos A=b\sin B$得$\sin A\cos A=\sin^2 B$

$\therefore\sin A\cos A+\cos^2 B=\sin^2 B+\cos^2 B=1$

9．A

【解析】由已知及正弦定理可得$a^2-b^2=4c^2$，由余弦定理推论可得

$-\frac{1}{4}=\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\therefore\frac{c^2-4c^2}{2bc}=-\frac{1}{4},\therefore\frac{3c}{2b}=\frac{1}{4},\therefore\frac{b}{c}=\frac{3}{2}\times 4=6$，故选 A．

10．D

【解析】由正弦定理有$\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}=\frac{2b^2-a^2}{a^2}=2\left(\frac{b}{a}\right)^2-1$.又$3a=2b\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$,

故$2\left(\frac{b}{a}\right)^2-1=2\times\frac{9}{4}-1=\frac{7}{2}$.

故选：D

11．B

【解析】因为$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，

所以由正弦定理得$(a+c)(a-c)=b(a-b)$，即$a^2-c^2=ab-b^2$，

则$a^2+b^2-c^2=ab$，故$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，

又$0<C<\pi$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

故选：B.

12．A

【解析】$\sin(A+C)+2\sin B\cos C=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$

所以$2\sin B\cos C=\sin A\cos C\Rightarrow 2\sin B=\sin A\Rightarrow 2b=a$，选 A.

13．C

【解析】试题分析：因为$c^2=(a-b)^2+6, C=\frac{\pi}{3}$,所以由余弦定理得：

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}$，即$-2ab+6=-ab, ab=6$，因此$\Delta ABC$的面积为

$\frac{1}{2}ab\sin C=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,选 C.

14．B

【解析】sinB=sin（A+C）=sinAcosC+cosAsinC，

∵sinB+sinA（sinC− cosC）=0，

∴sinAcosC+cosAsinC+sinAsinC− sinAcosC=0，

∴cosAsinC+sinAsinC=0，

∵sinC≠0，∴cosA=− sinA，∴tanA=− 1，

∵$\frac{\pi}{2}$＜A＜π，∴A= $\frac{3\pi}{4}$，由正弦定理可得$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，

∵a=2，c=$\sqrt{2}$，∴sinC=$\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{1}{2}$ ，

∵a＞c，∴C=$\frac{\pi}{6}$，

故选 B．

15．C

【解析】试题分析：

由于$\sin^2 A\leqslant\sin^2 B+\sin^2 C-\sin B\sin C$，根据正弦定理可知$a^2\leqslant b^2+c^2-bc$，故

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geq\frac{1}{2}$．又$A\in(0,\pi)$，则 A 的范围为$\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$.故本题正确答案为 C.

16．D

【解析】由余弦定理得 $5=b^2+4-2\times b\times 2\times\frac{2}{3}$，

解得 $b=3$（$b=-\frac{1}{3}$ 舍去），故选 D.

7．D

【解析】解：Q $\left(a^2+c^2-b^2\right)\tan B=\sqrt{3}ac$，

$\therefore\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\cos B}{\sin B}$，即 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\cos B}{\sin B}$，

$\therefore\left(\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos B=0$ 且 $\tan B$ 有意义即 $B\neq\frac{\pi}{2}$，$\therefore\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在 VABC 中，B 为 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，

故选：D．

18．A

【解析】Q $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sin C}{2}\Rightarrow\tan C=2$，$\therefore C>\frac{\pi}{4}$，

Q $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，$\therefore\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\sin B\cdot\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin B$，

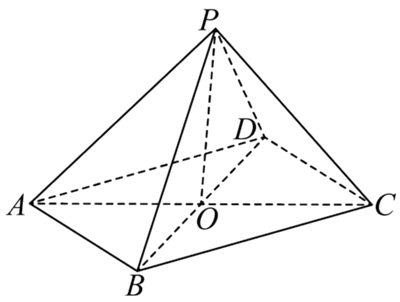
$\therefore\sin(A+C)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$，$\therefore\tan B=1$，

$\therefore\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}=3$，故选：A.

19．C

【解析】法一：

连结 AC,BD 交于 O，连结 PO，则 O 为 AC,BD 的中点，如图，



因为底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=4$，所以 $AC=BD=4\sqrt{2}$，则 $DO=CO=2\sqrt{2}$，

又 $PC=PD=3$， $PO=OP$，所以$\triangle PDO\cong\triangle PCO$，则$\angle PDO=\angle PCO$，

又 $PC=PD=3$， $AC=BD=4\sqrt{2}$，所以$\triangle PDB\cong\triangle PCA$，则$PA=PB$，

在$\triangle PAC$中， $PC=3, AC=4\sqrt{2}, \angle PCA=45^\circ$，

则由余弦定理可得$PA^2=AC^2+PC^2-2AC\cdot PC\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，

故$PA=\sqrt{17}$，则$PB=\sqrt{17}$，

故在$\triangle$PBC中， $PC=3, PB=\sqrt{17}, BC=4$，

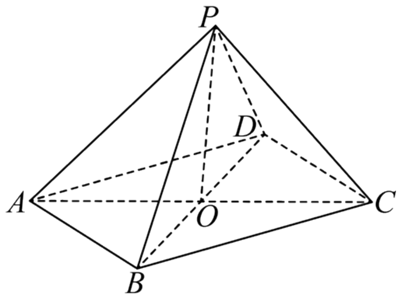
所以$\cos\angle PCB=\frac{PC^2+BC^2-PB^2}{2PC\cdot BC}=\frac{9+16-17}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$，

又$0<\angle PCB<\pi$，所以$\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\triangle$PBC的面积为$S=\frac{1}{2}PC\cdot BC\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$.

法二：

连结AC, BD交于O，连结PO，则O为AC, BD的中点，如图，



因为底面$ABCD$为正方形， $AB=4$，所以$AC=BD=4\sqrt{2}$，

在$\triangle PAC$中， $PC=3, \angle PCA=45^\circ$，

则由余弦定理可得$PA^2=AC^2+PC^2-2AC\cdot PC\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，

故$PA=\sqrt{17}$，

所以$\cos\angle APC=\frac{PA^2+PC^2-AC^2}{2PA\cdot PC}=\frac{17+9-32}{2\times\sqrt{17}\times3}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$，则

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|\cos\angle APC=\sqrt{17}\times3\times\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)=-3$，

不妨记$PB=m, \angle BPD=\theta$，

因为$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right)$，所以$\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)^2=\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right)^2$，

即$\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PC}^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PD}^2+2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$，

则$17+9+2\times(-3)=m^2+9+2\times3\times m\cos\theta$，整理得$m^2+6m\cos\theta-11=0$①，

又在$\triangle PBD$中，$BD^2=PB^2+PD^2-2PB\cdot PD\cos\angle BPD$，即$32=m^2+9-6m\cos\theta$，则$m^2-6m\cos\theta-23=0$②，

两式相加得$2m^2-34=0$，故$PB=m=\sqrt{17}$，

故在$\triangle PBC$中，$PC=3,PB=\sqrt{17},BC=4$，

所以$\cos\angle PCB=\dfrac{PC^2+BC^2-PB^2}{2PC\cdot BC}=\dfrac{9+16-17}{2\times3\times4}=\dfrac{1}{3}$，

又$0<\angle PCB<\pi$，所以$\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\triangle PBC$的面积为$S=\dfrac{1}{2}PC\cdot BC\sin\angle PCB=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$.

故选：C.

20．C

【解析】由题意结合正弦定理可得$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin C$，

即$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，

整理可得$\sin B\cos A=0$，由于$B\in(0,\pi)$，故$\sin B>0$，

据此可得$\cos A=0,A=\dfrac{\pi}{2}$，则$B=\pi-A-C=\pi-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{3\pi}{10}$.故选：C.

21．$2\sqrt{3}$

【解析】由正弦定理可得$\sin B=1,\therefore B=90^0$.所以$\Delta ABC$的面积等于$2\sqrt{3}$.

22．$\dfrac{1}{6}$

【解析】由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\tan A$得，$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=\tan A,|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=\dfrac{\tan A}{\cos A}=\dfrac{\tan\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{3}$，

所以，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{6}$.

23．8

【解析】因$\cos A=-\dfrac{1}{4}$,故$\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,由题设可得$\dfrac{1}{2}bc\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$,即$bc=24$

,所以$b^2+c^2=(b-c)^2+2bc=4+48=52$,所以

$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{52+12}=8$,应填$8$.

24．$2\sqrt{2}$

【解析】由题意，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，所以$ac=4,a^2+c^2=12$，

所以$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=12-2\times4\times\frac{1}{2}=8$，解得$b=2\sqrt{2}$（负值舍去）.

故答案为：$2\sqrt{2}$.

25．2.

【解析】$\because b\cos C+c\cos B=2b$，由边角互化得$\sin B\cos C+\sin C\cos B=2\sin B$，

即$\sin\left(B+C\right)=2\sin B$，即$\sin A=2\sin B$，所以$a=2b\Rightarrow\frac{a}{b}=2$.

26．$\sqrt{3}$

【解析】试题分析：由$a=2$，且$(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，故

$(a+b)(sinA-sinB)=(c-b)sinC$，又根据正弦定理，得$(a+b)(a-b)=(c-b)c$，化简得，

$b^2+c^2-a^2=bc$，故$cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，所以$A=60^0$，又$b^2+c^2-bc=4\geq bc$，故

$S_{\Delta BAC}=\frac{1}{2}bcsinA\leq\sqrt{3}$.

27．1

【解析】$\frac{\sin 2A}{\sin C}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin C}=\frac{2a\cos A}{c}=\frac{4}{3}\cos A=\frac{4}{3}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$

28．$\sqrt{6}$

【解析】试题分析：由正弦定理可得$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，所以

$\sin\angle ADB=\frac{AB\sin B}{AD}=\frac{\sqrt{2}\times\sin 120^\circ}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．在$\Delta ADB$中$\angle ADB=45^\circ$，所以

$\angle BAD=180^\circ-120^\circ-45^\circ=15^\circ$，所以在$\Delta ABC$中$A=30^\circ$．又因为$B=120^\circ$，所以

$A=C=30^\circ$．所以$AB=BC=\sqrt{2}$，所以$AC^2=AB^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos B$＝

$2+2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=6$，所以$AC=\sqrt{6}$.

29．4

【解析】由$3\sin A=2\sin B$及正弦定理，得$3a=2b$．又因为$a=2$，所以$b=3$

．由余弦定理得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4+9-2\times2\times3\times(-\frac{1}{4})=16$，所以$c=4$．

30．$\frac{21}{13}$

【解析】因为$\cos A=\frac{4}{5},\cos C=\frac{5}{13}$，且$A,C$为三角形的内角，所以

$\sin A=\frac{3}{5},\sin C=\frac{12}{13}$， $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{63}{65}$，又因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{21}{13}$.

31．$\frac{\pi}{3}$

【解析】解法一:由$2b\cos B=a\cos C+c\cos A$及正弦定理,得$2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A$.

$\therefore 2\sin B\cos B=\sin(A+C)$.

又$A+B+C=\pi$，$\therefore A+C=\pi-B$.$\therefore 2\sin B\cos B=\sin(\pi-B)=\sin B$.

又$\sin B\neq0$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$.$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

解法二:∵在$\triangle ABC$中，$a\cos C+c\cos A=b$，∴条件等式变为$2b\cos B=b$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$.

又$0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

32．$\frac{5}{4}$

【解析】由题意椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$中．$a=5$，$b=3$，$c=4$，故$A(-4,0),C(4,0)$是椭圆的两个焦点，$\therefore AB+BC=2a=10$，$AC=8$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r$,

$\therefore \frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\frac{a+c}{b}=\frac{AB+BC}{AC}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$

33．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【解析】[方法一]:【最优解】边化角

因为$b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$，由正弦定理得$\sin B\sin C+\sin C\sin B=4\sin A\sin B\sin C$，

因为$\sin B\sin C\neq0$，所以$\sin A=\frac{1}{2}$．又因为$b^2+c^2-a^2=8$，

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得$2bc\cos A=8$，

所以$\cos A>0$，即A为锐角，且$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而求得$bc=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，

所以$\triangle ABC$的面积为$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.