2024年高考考前逆袭卷（新高考新题型）01

数 学

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

全国新高考卷的题型会有所调整，考试题型为8（单选题）＋3（多选题）＋3（填空题）＋5（解答题），其中最后一道试题是新高考地区新增加的题型，主要涉及集合、数列，导数等模块，以解答题的方式进行考查。

预测2024年新高考地区数列极有可能出现在概率与统计大题中，而结构不良型题型可能为集合或导数模块中的一个，出现在19题的可能性较大，难度中等偏上，例如本卷第19题。

第I卷（选择题）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1．已知样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_{100}$的平均数和标准差均为4，则数据$-x_1-1,-x_2-1,\cdots,-x_{100}-1$的平均数与方差分别为（　）

A．-5,4　　B．$-5,16$　　C．$4,16$　　D．$4,4$

2．已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{17}$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量的模长为（　）

A．6　　B．3　　C．2　　D．$\frac{6\sqrt{5}}{5}$

3．已知在等比数列$\{a_n\}$中，$2a_2+a_3=15$，$a_2a_3a_4=729$，则$S_n-a_n=$（　）

A．$2\times3^{n-1}-2$　　B．$\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)$　　C．$2\times3^n-n$　　D．$5\times3^n-3$

4．已知三棱锥$A-BCD$中，$AB=6,AC=3,BC=3\sqrt{3}$，三棱锥$A-BCD$的体积为$\frac{21\sqrt{3}}{2}$，其外接球的体积为$\frac{500}{3}\pi$，则线段CD长度的最大值为（　）

A．7　　B．8　　C．$7\sqrt{2}$　　D．10

5．一个信息设备装有一排六只发光电子元件，每个电子元件被点亮时可发出红色光、蓝色光、绿色光中的一种光.若每次恰有三个电子元件被点亮，但相邻的两个电子元件不能同时被点亮，根据这三个被点亮的电子元件的不同位置以及发出的不同颜色的光来表示不同的信息，则这排电子元件能表示的信息种数共有（　）

A．60 种　　B．68 种　　C．82 种　　D．108 种

6．已知 $a=2^{-1.1}$，$b=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}$，$c=\log_2 3$，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

7．纯电动汽车是以车载电源为动力，用电机驱动车轮行驶，符合道路交通、安全法规各项要求的车辆，它使用存储在电池中的电来发动．因其对环境影响较小，逐渐成为当今世界的乘用车的发展方向．研究发现电池的容量随放电电流的大小而改变，1898 年 Peukert 提出铅酸电池的容量 C、放电时间 t 和放电电流 I 之间关系的经验公式：$C=I^{\lambda}t$，其中 λ 为与蓄电池结构有关的常数（称为 Peukert 常数），在电池容量不变的条件下，当放电电流为 7.5A 时，放电时间为 60h；当放电电流为 25A 时，放电时间为 15h，则该蓄电池的 Peukert 常数 λ 约为（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$）（　）

A．1.12　　B．1.13

C．1.14　　D．1.15

8．已知双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与抛物线 $C_2:y^2=2px(p>0)$，抛物线 C_2 的准线过双曲线 C_1 的焦点 F，过点 F 作双曲线 C_1 的一条渐近线的垂线，垂足为点 M，延长 FM 与抛物线 C_2 相交于点 N，若 $\overline{ON}+3\overline{OF}=4\overline{OM}$，则双曲线 C_1 的离心率等于（　）

A．$\sqrt{3}+1$　　B．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{2}+1$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．在复平面内，下列说法正确的是（　）

A．若复数 $z=\frac{1-\text{i}}{1+\text{i}}$（i 为虚数单位），则 $z^{74}=-1$

B．若复数 z 满足 $z=\bar{z}$，则 $z\in\mathbf{R}$

C．若 $\overline{z_1z_2}=0$，则 $\bar{z}_1=0$ 或 $\bar{z}_2=0$

D．若复数 z 满足 $|z-1|+|z+1|=2$，则复数 z 对应点的集合是以坐标原点 O 为中心，焦点在 x 轴上的椭圆

10．设直线系 $M:x\cos^m\theta+y\sin^n\theta=1$（其中 0，$m$，$n$ 均为参数，$0\le\theta\le 2\pi$，$m,n\in\{1,2\}$），则下列命题中是真命题的是（　）

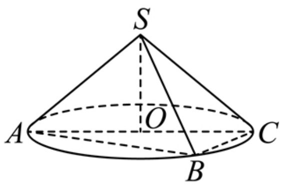
A．当 $m=1$，$n=1$ 时，存在一个圆与直线系 M 中所有直线都相切

B．存在 m，n，使直线系 M 中所有直线恒过定点，且不过第三象限

C．当$m=n$时，坐标原点到直线系M中所有直线的距离最大值为1，最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

D．当$m=2$，$n=1$时，若存在一点$A(a,0)$，使其到直线系M中所有直线的距离不小于1，则$a\le 0$

11．如图所示，一个圆锥SO的底面是一个半径为3的圆，AC为直径，且$\angle ASC=120^\circ$，点B为圆O上一动点（异于A，C两点），则下列结论正确的是（　）



A．$\angle SAB$的取值范围是$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

B．二面角$S-BC-A$的平面角的取值范围是$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

C．点A到平面SBC的距离最大值为3

D．点M为线段SB上的一动点，当$SA\perp SB$时，$AM+MC>6$

第II卷（非选择题）

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12．设集合$A=\left\{x\mid x^2-x-6<0\right\}$，$B=\{x\mid -a\le x\le a\}$，若$A\subseteq B$，则实数$a$的取值范围是_____.

13．已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，四边形ABB_1A_1为菱形，$\angle A_1AB=60^\circ$，平面$ABB_1A_1\perp$平面ABC，M为AB的中点，N为BB_1的中点，则三棱锥C_1-A_1MN的外接球的表面积为_____.

14．已知对任意$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且当$x_1<x_2$时，都有：$\frac{a\left(\ln x_2-\ln x_1\right)}{x_2-x_1}<1+\frac{1}{x_1x_2}$，则$a$的取值范围是________.

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（13分）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别a，b，c，其中$a=b+2,c=\sqrt{2}b$，且$\sin A=\sqrt{2}\sin C$.

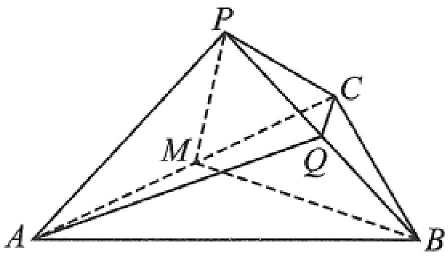
(1)求c的值；

(2)求$\tan A$的值；

(3)求$\cos\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)$的值.

16．（15 分）如图，在三棱锥$P-ABC$中，M为AC边上的一点，

$\angle APC=\angle PMA=90^{\circ}$，$\cos\angle CAB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$AB=2PC=\sqrt{6}$，$PA=\sqrt{3}$.



(1)证明：$AC\perp$平面PBM；

(2)设点Q为边PB的中点，试判断三棱锥$P-ACQ$的体积是否有最大值？如果有，请求出最大值；如果没有，请说明理由.

17．（15 分）近年来，某大学为响应国家号召，大力推行全民健身运动，向全校学生开放了A,B两个健身中心，要求全校学生每周都必须利用课外时间去健身中心进行适当的体育锻炼.

(1)该校学生甲、乙、丙三人某周均从A,B两个健身中心中选择其中一个进行健身，若甲、乙、丙该周选择A 健身中心健身的概率分别为$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}$，求这三人中这一周恰好有一人选择A 健身中心健身的概率；

(2)该校学生丁每周六、日均去健身中心进行体育锻炼，且这两天中每天只选择两个健身中心的其中一个，其中周六选择A 健身中心的概率为$\dfrac{1}{2}$.若丁周六选择A 健身中心，则周日仍选择A 健身中心的概率为$\dfrac{1}{4}$；若周六选择B健身中心，则周日选择A 健身中心的概率为$\dfrac{2}{3}$.求丁周日选择B健身中心健身的概率；

(3)现用健身指数$k\left(k\in[0,10]\right)$来衡量各学生在一个月的健身运动后的健身效果，并规定k值低于 1 分的学生为健身效果不佳的学生，经统计发现从全校学生中随机抽取一人，其k值低于 1 分的概率为 0.12.现从全校学生中随机抽取一人，如果抽取到的学生不是健身效果不佳的学生，则继续抽取下一个，直至抽取到一位健身效果不佳的学生为止，但抽取的总次数不超过n.若抽取次数的期望值不超过 23，求n的最大值.

参考数据：$0.98^{29} \approx 0.557, 0.98^{30} \approx 0.545, 0.98^{31} \approx 0.535$.

18．（17 分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上下顶点分别为$B_1,B_2$，左右顶点分别为$A_1,A_2$，四边形$A_1B_1A_2B_2$的面积为$6\sqrt{5}$，若椭圆$C$上的点到右焦点距离的最大值和最小值之和为 6.

(1)求椭圆C的方程；

(2)过点$\left(-1,0\right)$且斜率不为 0 的直线l与C交于P,Q（异于A_1,A_2）两点，设直线A_2P与直线A_1Q交于点M，证明：点M在定直线上.

19．（17 分）给定整数$n\geq 3$，由n元实数集合P定义其随影数集$Q=\left\{|x-y|\mid x,y\in P,x\neq y\right\}$.若$\min\left(Q\right)=1$，则称集合$P$为一个$n$元理想数集，并定义$P$的理数$t$为其中所有元素的绝对值之和.

(1)分别判断集合$S=\left\{-2,-1,2,3\right\},T=\left\{-0.3,-1.2,2.1,2.5\right\}$是不是理想数集；（结论不要求说明理由）

(2)任取一个 5 元理想数集P，求证：$\left|\min\left(P\right)\right|+\left|\max\left(P\right)\right|\geq 4$；

(3)当$P=\left\{x_1,x_2,\cdots,x_{2024}\right\}$取遍所有 2024 元理想数集时，求理数$t$的最小值.

注：由n个实数组成的集合叫做n元实数集合，$\max\left(P\right),\min\left(P\right)$分别表示数集$P$中的最大数与最小数.

2024年高考考前逆袭卷（新高考新题型）01

数 学

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

全国新高考卷的题型会有所调整，考试题型为 8（单选题）＋3（多选题）＋3（填空题）＋5（解答题），其中最后一道试题是新高考地区新增加的题型，主要涉及集合、数列，导数等模块，以解答题的方式进行考查。

预测 2024 年新高考地区数列极有可能出现在概率与统计大题中，而结构不良型题型可能为集合或导数模块中的一个，出现在 19 题的可能性较大，难度中等偏上，例如本卷第 19 题。

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1．已知样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 的平均数和标准差均为 4，则数据 $-x_1-1,-x_2-1,\cdots,-x_{100}-1$ 的平均数与方差分别为（　）

A．$-5,4$　　B．$-5,16$　　C．$4,16$　　D．$4,4$

【答案】B

【详解】由题意知样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 的平均数和标准差均为 4，则 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 的方差为 16，

则 $-x_1,-x_2,\cdots,-x_{100}$ 的平均数为 -4，方差为 $(-1)^2\times16=16$，

故 $-x_1-1,-x_2-1,\cdots,-x_{100}-1$ 的平均数为 $-4-1=-5$，方差 16，

故选：B

2．已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{17}$，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量的模长为（　）

A．6　　B．3　　C．2　　D．$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

【答案】C

【详解】因为 $\vec{a}=(1,2)$，所以 $|\vec{a}|=\sqrt{5}$，

因为 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{17}$，所以 $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2=17$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}=17$，又$|\vec{b}|=3$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$，所以向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量的模的值为$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{6}{3}=2$，

故选：C.

3．已知在等比数列$\{a_n\}$中，$2a_2+a_3=15$，$a_2a_3a_4=729$，则$S_n-a_n=$（　）

A．$2\times3^{n-1}-2$　　B．$\frac{1}{2}\left(3^{n-1}-1\right)$　　C．$2\times3^n-n$　　D．$5\times3^n-3$

【答案】B

【详解】因为在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2a_3a_4=729$，所以$a_3^3=729$，解得$a_3=9$，

又$2a_2+a_3=15$，解得$a_2=3$，

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{9}{3}=3$，

所以$a_1=1$，所以$S_n-a_n=\frac{1-3^n}{1-3}-3^{n-1}=\frac{1}{2}\left(3^{n-1}-1\right)$.

故选：B.

4．已知三棱锥$A-BCD$中，$AB=6,AC=3,BC=3\sqrt{3}$，三棱锥$A-BCD$的体积为$\frac{21\sqrt{3}}{2}$，其外接球的体积为$\frac{500}{3}\pi$，则线段CD长度的最大值为（　）

A．7　　B．8　　C．$7\sqrt{2}$　　D．10

【答案】C

【详解】因为球的体积为$\frac{500}{3}\pi$，所以球的半径R满足$\frac{500}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi R^3$，可得$R=5$；

又$AB=6,AC=3,BC=3\sqrt{3}$，因此$AB^2=AC^2+BC^2$，即$\angle ACB=90^\circ$，此时

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$；

设点D到平面ABC的距离为h，则$\frac{1}{3}h\times\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{2}$，可得$h=7$，

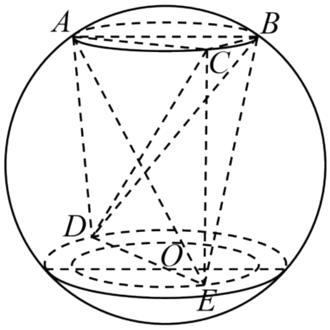
因为D在球的截面圆上，设截面圆所在的平面为α，当α与平面ABC平行时，DC有最大值；

设球心到平面ABC的距离为d，而$\triangle ABC$的外心即为AB的中点，外接圆的半径为$\frac{1}{2}AB=3$，

则$d=\sqrt{5^2-3^2}=4$，故球心到平面α的距离为$7-4=3$，

可知截面圆半径为$\sqrt{5^2-3^2}=4$；

设C在平面α上的射影为E，则E的轨迹为圆，如下图所示：



设该圆圆心为O，则当D,O,E三点共线时且点O在D,E中间时，DE最长，

此时$DE=3+4=7$，故线段CD长度的最大值为$7\sqrt{2}$.

故选：C

5．一个信息设备装有一排六只发光电子元件，每个电子元件被点亮时可发出红色光、蓝色光、绿色光中的一种光.若每次恰有三个电子元件被点亮，但相邻的两个电子元件不能同时被点亮，根据这三个被点亮的电子元件的不同位置以及发出的不同颜色的光来表示不同的信息，则这排电子元件能表示的信息种数共有（　）

A．60 种　　B．68 种　　C．82 种　　D．108 种

【答案】D

【详解】每次恰有三个电子元件被点亮，但相邻的两个电子元件不能同时被点亮，

所以需把 3 个亮的发光原件插入未点亮的元件中，有$C_4^3=4$种方法，

且不同颜色数有$3\times3\times3=27$种，

所以这排电子元件能表示的信息种数共有$4\times27=108$种.

故选：D

6．已知$a=2^{-1.1}$，$b=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}$，$c=\log_2 3$，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

【答案】A

【详解】由指数函数与对数函数的性质可得，$a=2^{-1.1}<2^{-1}=\frac{1}{2}$，

$\frac{1}{2}=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}<b=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}=1$，$c=\log_2 3>\log_2 2=1$，

所以$a<b<c$，

故选：A.

7．纯电动汽车是以车载电源为动力，用电机驱动车轮行驶，符合道路交通、安全法规各项要求的车辆，它使用存储在电池中的电来发动．因其对环境影响较小，逐渐成为当今世界的乘用车的发展方向．研究发现电池的容量随放电电流的大小而改变，1898 年 Peukert 提出铅酸电池的容量C、放电时间t和放电电流I之间关系的经验公式：

$C=I^{\lambda}t$，其中λ为与蓄电池结构有关的常数（称为 Peukert 常数），在电池容量不变的条件下，当放电电流为7.5A时，放电时间为60h；当放电电流为25A时，放电时间为15h，则该蓄电池的 Peukert 常数λ约为（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$）（　）

A．1.12　　B．1.13

C．1.14　　D．1.15

【答案】D

【详解】由题意知$C=7.5^{\lambda}\times 60=25^{\lambda}\times 15$，

所以$\left(\dfrac{25}{7.5}\right)^{\lambda}=\left(\dfrac{10}{3}\right)^{\lambda}=\dfrac{60}{15}=4$，两边取以 10 为底的对数，得$\lambda\lg\dfrac{10}{3}=2\lg 2$，

所以$\lambda=\dfrac{2\lg 2}{1-\lg 3}\approx\dfrac{2\times 0.301}{1-0.477}\approx 1.15$，

故选：D.

8．已知双曲线$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与抛物线$C_2:y^2=2px(p>0)$，抛物线$C_2$的准线过双曲线$C_1$的焦点$F$，过点$F$作双曲线$C_1$的一条渐近线的垂线，垂足为点$M$，延长$FM$与抛物线$C_2$相交于点$N$，若$\overrightarrow{ON}+3\overrightarrow{OF}=4\overrightarrow{OM}$，则双曲线$C_1$的离心率等于（　）

A．$\sqrt{3}+1$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{2}+1$

【答案】C

【详解】设双曲线的焦距为$2c$，

$\because$抛物线C_2的准线过双曲线C_1的焦点F，

$\therefore -\dfrac{p}{2}=-c\Rightarrow\dfrac{p}{2}=c$，

又$\because F(-c,0)$到$y=\dfrac{b}{a}x$的距离$d=\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，即$|MF|=b$，

$\because\ \overrightarrow{ON}+3\overrightarrow{OF}=4\overrightarrow{OM}\Rightarrow\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OM}-3\overrightarrow{OF}$，$\therefore\ \overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{FM}$，

$\therefore|NM|=3b$，则$|FN|=4b$，

$\therefore|OF|=c$，得$|OM|=\sqrt{FO^2-FM^2}=a$，

过N作$NP\perp x$轴，则$\triangle FOM\sim\triangle FNP$，

故$\dfrac{|FO|}{|FN|}=\dfrac{|OM|}{|NP|}=\dfrac{|FM|}{|FP|}\Rightarrow\dfrac{c}{4b}=\dfrac{a}{|NP|}=\dfrac{b}{|FP|}\Rightarrow|NP|=\dfrac{4ab}{c},|FP|=\dfrac{4b^2}{c}$，

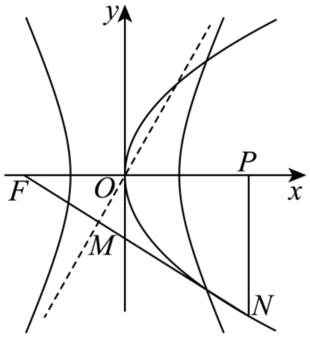
因此$P\left(\dfrac{4b^2}{c}-c,\dfrac{4ab}{c}\right)$

由于$P\left(\frac{4b^2}{c}-c,\frac{4ab}{c}\right)$在抛物线$C_2: y^2=2px(p>0)$上，所以即

$\left(\frac{4ab}{c}\right)^2=2p\left(\frac{4b^2}{c}-c\right)\Rightarrow\left(\frac{4ab}{c}\right)^2=4c\left(\frac{4b^2}{c}-c\right)$,

$4a^2b^2=(4b^2-c^2)c^2\Rightarrow c^4=4b^2(c^2-a^2)=4b^4\Rightarrow c^2=2b^2$，故$c^2=2a^2$，

故$e=\sqrt{2}$．故选：C．



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．在复平面内，下列说法正确的是（　）

A．若复数$z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（i 为虚数单位），则$z^{74}=-1$

B．若复数z满足$z=\overline{z}$，则$z\in\mathbf{R}$

C．若$\overline{z_1z_2}=0$，则$\overline{z_1}=0$或$\overline{z_2}=0$

D．若复数z满足$|z-1|+|z+1|=2$，则复数z对应点的集合是以坐标原点O为中心，焦点在x轴上的椭圆

【答案】ABC

【详解】解：复数$z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\frac{2\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i}$,

因为$i^4=1$，所以$z^{74}=\left(\mathrm{i}^4\right)^{18}\cdot\mathrm{i}^2=-1$，故选项 A 正确；

设$z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，若复数$z$满足$z=\overline{z}$，

则$a+b\mathrm{i}=a-b\mathrm{i}$，即$b=0$，所以$z\in\mathbf{R}$，故选项 B 正确；

设$z_1=m+n\mathrm{i}\left(m,n\in\mathbf{R}\right)$，$z_2=c+d\mathrm{i}\left(c,d\in\mathbf{R}\right)$,

则$z_1z_2=\left(m+n\mathrm{i}\right)\left(c+d\mathrm{i}\right)=mc-nd+\left(md+nc\right)\mathrm{i}$．

因为$\overline{z_1z_2}=mc-nd-\left(md+nc\right)\mathrm{i}$，且$\overline{z_1}\,\overline{z_2}=mc-nd-\left(md+nc\right)\mathrm{i}$，

所以$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$．

若$\overline{z_1z_2}=0$，则$\bar{z}_1\bar{z}_2=0$，所以$\bar{z}_1=0$或$\bar{z}_2=0$，故选项C正确；

由复数z满足$|z-1|+|z+1|=2$，则复数z对应点的集合是一条线段，故选项D错误．

故选：ABC

10．设直线系$M:x\cos^m\theta+y\sin^n\theta=1$（其中0，$m$，$n$均为参数，$0\le\theta\le2\pi$，$m,n\in\{1,2\}$），则下列命题中是真命题的是（　）

A．当$m=1$，$n=1$时，存在一个圆与直线系M中所有直线都相切

B．存在m，n，使直线系M中所有直线恒过定点，且不过第三象限

C．当$m=n$时，坐标原点到直线系M中所有直线的距离最大值为1，最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

D．当$m=2$，$n=1$时，若存在一点$A(a,0)$，使其到直线系M中所有直线的距离不小于1，则$a\le0$

【答案】ABD

【详解】A选项，当$m=1$，$n=1$时，$M:x\cos\theta+y\sin\theta=1$，

设圆为$x^2+y^2=1$，则圆心$(0,0)$到直线$M:x\cos\theta+y\sin\theta=1$的距离$d=\frac{|1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$，

故$M:x\cos\theta+y\sin\theta=1$与$x^2+y^2=1$总相切，A正确；

B选项，当$m=n=2$时，$M:x\cos^2\theta+y\sin^2\theta=1$，

由于$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，故直线$M:x\cos^2\theta+y\sin^2\theta=1$恒过$(1,1)$，

若$\sin\theta=0$时，直线为$M:x=1$，

若$\sin\theta\ne0$时，直线$M:x\cos^2\theta+y\sin^2\theta=1$的斜率为$-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\le0$，

故直线$M:x\cos^2\theta+y\sin^2\theta=1$不过第三象限，

所以存在m，n，使直线系M中所有直线恒过定点，且不过第三象限，B正确；

C选项，当$m=n=1$时，$M:x\cos\theta+y\sin\theta=1$，

坐标原点到直线系M的距离为$d_1=\frac{|1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$，

当当$m=n=2$时，$M:x\cos^2\theta+y\sin^2\theta=1$，

坐标原点到直线系M的距离为$d_2=\frac{|1|}{\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}$

其中$\cos^4\theta+\sin^4\theta=\cos^2\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta\sin^2\theta<\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，