第二类换元法常见类型：三角代换、倒代换、根式代换

(1) $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ 令 $x = a\sin t$ 或 $x = a\cos t$

(2) $\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ 令 $x = a\tan t$

(3) $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ 令 $x = a\sec t$

(4) 分母中因子次数较高时，可试用倒代换

(5) $\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ 令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$ 即 $x = \frac{t^n - b}{a}$

[illegible]

练习

1. $$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx$$

2 $$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}.$$

3 $$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

1. $$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx$$

$$=\int \frac{d(x^2+2x-1)}{\sqrt{x^2+2x-1}} - \int \frac{3}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx$$

$$=2\sqrt{x^2+2x-1}-3\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-2}}d(x+1)$$

$$=2\sqrt{x^2+2x-1}-3\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x-1}\right|+c\ .$$

$$2.\ \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$$

$$=\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

令 $x+1=\frac{1}{t}$

$$=\int \frac{t^3}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\int \frac{(1-t^2)-1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\sqrt{1-t^2}\,dt-\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin t-\arcsin t$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}+C$$

$3\ \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx$

令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$， $dx=\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}$

原式 $=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt \quad =-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|2x+2\sqrt{x(x+1)}+1\right|+C$$

第三节　　　分部积分法

问题 $\int x\cos x dx = ?$

处理思绪

由导数公式 [illegible]

积分得: [illegible]

⇒ [illegible]

或 [illegible]

} 分部积分公式

例1　求积分 $\int x\cos x dx$.

解（一）　令 $u=\cos x$，　$x dx=\frac{1}{2}dx^2=dv$

$$\int x\cos x dx=\int\cos x d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin x dx$$

显然，u、v' 选择不当，积分更难进行.

解（二）　令 $u=x$，　$\cos x dx=d\sin x=dv$

$$\int x\cos x dx=\int x d\sin x=x\sin x-\int\sin x dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C$$

选取u及v'的原则：1) v 轻易求得；

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\,\mathrm{d}x$ 轻易计算.

例2. $\int x\arctan x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int \arctan x\,d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\Big[x^2\arctan x-\int x^2\,d\arctan x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+c$$

$$=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+c\,.$$

例3. $\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}\int \ln x\,d(x^2)$ $(u=\ln x, v=x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2 d\ln x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c\ .$$

例4. $\int xe^x dx=\frac{1}{2}\int e^x d(x^2)$ $(u=e^x, v=x^2)$

$$=\frac{1}{2}e^x x^2-\frac{1}{2}\int x^2 de^x=\frac{1}{2}e^x x^2-\frac{1}{2}\int x^2e^x dx=?$$

重解: $\int xe^x dx=\int x\,de^x$ $(u=x, v=e^x)$

$$=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c\ .$$

解题技巧: 选取的一般

把被积函数视为两个函数之积，按"反对幂指三"的顺序，前者为 u，后者为 v'。

反: 反三角函数
对: 对数函数
幂: 幂函数
指: 指数函数
三: 三角函数