# 上海市松江二中2023-2024学年高二下学期5月考数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

## 一、填空题

1．曲线$\mathrm{y}=\frac{2\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+2}$在点$\left(-1,-3\right)$处的切线方程为________.

2．设$(1-x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则当$a_8=-a_9$时，$n=$________.

3．一批种子，如果每1粒种子发芽的概率均为$\frac{2}{3}$，那么播下4粒种子，发芽种子数量的方差是________.

4．将序号分别为1，2，3，4，5的5张参观券全部分给4人，每人至少一张，如果分给同一人的两张参观券连号，那么不同的分法种数是______.

5．事件$A$、$B$互斥，它们都不发生的概率为$\frac{2}{5}$，且$P\left(A\right)=2P\left(B\right)$，则$P\left(A\right)=$_____.

6．从非洲蔓延到东南亚的蝗虫灾害严重威胁了国际农业生产，影响了人民生活．世界性与区域性温度的异常、旱涝频繁发生给蝗灾发生创造了机会．已知蝗虫的产卵量$y$与温度$x$的关系可以用模型$y=c_1\mathrm{e}^{c_2x}$（其中$\mathrm{e}$为自然对数的底数）拟合，设$z=\ln y$，其变换后得到一组数据：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 20 | 23 | 25 | 27 | 30 |
| $z$ | 2 | 2.4 | 3 | 3 | 4.6 |

由上表可得经验回归方程$z=0.2x+a$，则当$x=35$时，蝗虫的产卵量$y$的估计值为________.

7．已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1,F_1,F_2$为两个焦点，$O$为原点，$P$为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则$\left|PO\right|=$_____.

8．已知直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，的所有棱长均为4，且$\angle ABC=120°$，点$E$是棱$BC$的中点，则过点$E$且与$BD_1$垂直的平面截该四棱柱所得截面的面积为_____.

9．双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$．过$F_2$作其中一条渐近线的垂线，垂足为$P$．已知$\left|PF_2\right|=2$，直线$PF_1$的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{4}$，则双曲线的方程为_________

10．已知定义在$\left(0,+\infty\right)$上的函数$y=f\left(x\right)$，且$f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ f'\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right), x\in\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)\end{cases}$，则函数$y=f\left(x\right)-\log_{2024}x$的零点个数为_____.

11．已知抛物线$C:y^2=4x$，直线$l$过点$G\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$且与$C$相交于A，$B$两点，若$\angle AOB$的平分线过点$E\left(1,1\right)$，则直线$l$的斜率为______.

12．已知实数$a$、$b$、$c$、$d$满足$\left|b-\dfrac{\ln a}{a}\right|+\left|c-d+2\right|=0$，则$\left(a-c\right)^2+\left(b-d\right)^2$的最小值为_____.

## 二、单选题

13．下列说法中正确的是（　）

①设随机变量$X$服从二项分布$B\left(6,\dfrac{1}{2}\right)$，则$P\left(X=3\right)=\dfrac{5}{16}$

②已知随机变量$X$服从正态分布$N\left(2,\sigma^2\right)$且$P\left(X<4\right)=0.9$，则$P\left(0<X<2\right)=0.4$

③小赵、小钱、小孙、小李到4个景点旅游，每人只去一个景点，设事件$A=$“4个人去的景点互不相同”，事件$B=$“小赵独自去一个景点”，则$P\left(A|B\right)=\dfrac{2}{9}$；

④$E\left(2X+3\right)=2E\left(X\right)+3$；$D\left(2X+3\right)=2D\left(X\right)+3$.

A．①②③　　B．②③④　　C．②③　　D．①②

14．已知某样本的容量为50，平均数为70，方差为75．现发现在收集这些数据时，其中的两个数据记录有误，一个错将80记录为60，另一个错将70记录为90．在对错误的数据进行更正后，重新求得样本的平均数为$\bar{x}$，方差为$s^2$，则（　）

A．$\bar{x}=70$，$s^2<75$　　B．$\bar{x}=70$，$s^2>75$

C．$\bar{x}>70$，$s^2<75$　　D．$\bar{x}<70$，$s^2>75$

15．定义曲线$\Gamma$：$\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=1$为椭圆$C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的“倒曲线”，给出以下三个结论：①曲线$\Gamma$有对称轴，②曲线$\Gamma$有对称中心，③曲线$\Gamma$与椭圆$C$有公共点．其中正确的结论个数为（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

16．定义区间$\left[a,b\right]$，$\left(a,b\right)$，$\left(a,b\right]$，$\left[a,b\right)$的长度为$b-a$.如果一个函数的所有单调递增区间的长度之和为$m$（其中$m\in\left(0,\mathrm{e}\right]$，$\mathrm{e}$为自然对数的底数），那么称这个函数为“$m$函数”.给出下列四个命题：

①函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\ln x$不是“$m$函数”；

②函数$g\left(x\right)=\ln x-\mathrm{e}^{x}$是“$m$函数”，且$m\mathrm{e}^{m}=1$；

③函数$h\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}\ln x$是“$m$函数”；

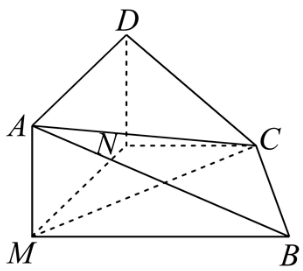
④函数$\varphi\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^{x}}$是“$m$函数”，且$m\ln m=1$.

其中真命题的个数为（　　）

A．4　　　B．3　　　C．2　　　D．1

## 三、解答题

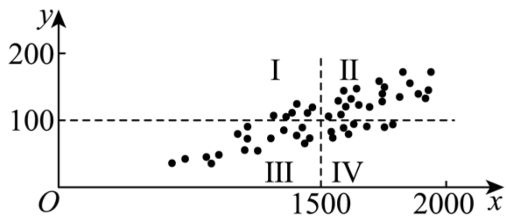
17．如图，矩形*AMND*所在平面与直角梯形*MBCN*所在的平面垂直，*MB*//*NC*，*MN*⊥*MB*．




(1)求证：平面*AMB*//平面*DNC*；

(2)若*MC*⊥*CB*，求证：*BC*⊥*AC*．

18．环境监测部门为调研汽车流量对空气质量的影响，在某监测点统计每日过往的汽车流量$x$（单位：辆）和空气中的PM2.5的平均浓度$y$（单位：$\mu g/m^{3}$）．调研人员采集了50天的数据，制作了关于$\left(x_i, y_i\right)\left(i=1,2,3,\cdots,50\right)$的散点图，并用直线$x=1500$与$y=100$将散点图分成如图所示的四个区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，落入对应区域的样本点的个数依次为6，20，16，8．




(1)完成下面的$2\times 2$列联表，并判断至少有多大把握认为“PM2.5 平均浓度不小于$100\mu g/m^3$与“汽车日流量不小于 1500 辆”有关；

| | 汽车日流量 $x<1500$ | 汽车日流量 $x\geq 1500$ | 合计 |
|---|---|---|---|
| PM2.5 的平均浓度 $y<100$ | | | |
| PM2.5 的平均浓度 $y\geq 100$ | | | |
| 合计 | | | |

(2)经计算得回归方程为$\hat{y}=0.12x-73.36$，且这 50 天的汽车日流量$x$的标准差$s_x=252$，PM2.5 的平均浓度$y$的标准差$s_y=36$．

①求相关系数$r$，并判断该回归方程是否有价值；

②若这 50 天的汽车日流量$x$满足$\sum_{i=1}^{50}x_i^2=1.2\times 10^8$，试推算这 50 天的 PM2.5 日均浓度$y$的平均数$\bar{y}$．（精确到 0.1）

参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$．

| $P(\chi^2\geq k)$ | 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$，其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$.

相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$． 若 $|r|\geq 0.75$，则认为 $y$ 与 $x$ 有较强的线性相关性.

19．某公司在一次年终总结会上举行抽奖活动，在一个不透明的箱子中放入 3 个红球和 3 个白球（球的形状和大小都相同），抽奖规则有以下两种方案可供选择：

方案一：选取一名员工在袋中随机摸出一个球，若是红球，则放回袋中；若是白球，则不放回，再在袋中补充一个红球，这样反复进行 3 次，若最后袋中红球个数为 $X$，则每位员工颁发奖金 $X$ 万元；

方案二：从袋中一次性摸出 3 个球，把白球换成红球再全部放回袋中，设袋中红球个数为 $Y$，则每位员工颁发奖金 $Y$ 万元.

(1)若用方案一，求 $X$ 的分布列与数学期望；

(2)比较方案一与方案二，求采用哪种方案，员工获得奖金数额的数学期望值更高？请说明理由；

(3)若企业有 1000 名员工，他们为企业贡献的利润近似服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$\mu$ 为各位员工贡献利润数额的均值，计算结果为 100 万元，$\sigma^2$ 为数据的方差，计算结果为 225 万元，若规定奖金只有贡献利润大于 115 万元的员工可以获得，若按方案一与方案二两种抽奖方式获得奖金的数学期望值的最大值计算，求获奖员工的人数及每人可以获得奖金的平均数值（保留到整数）参考数据：若随机变量 $\xi$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则

$P\left(\mu-\sigma<\xi\leq\mu+\sigma\right)\approx 0.6826$

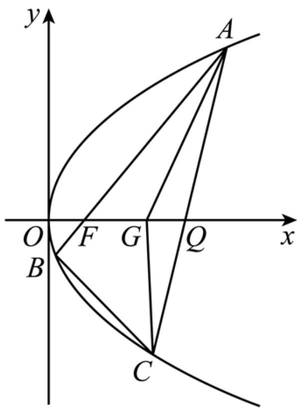
20．已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x-ax+1\left(a\in\mathbf{R}\right)$．

(1)若经过点 $\left(0,0\right)$ 的直线与函数 $f\left(x\right)$ 的图像相切于点 $\left(3,f\left(3\right)\right)$，求实数 $a$ 的值；

(2)设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{3}{2}x^2-1$，若函数 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[\dfrac{3}{2},4\right]$ 为减函数时，求实数 $a$ 的取值范围;

(3)对于函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{3}{2}x^2-1$，若函数 $g\left(x\right)$ 有两个极值点为 $x_1$、$x_2\left(x_1\neq x_2\right)$，且不等式 $g\left(x_1\right)+g\left(x_2\right)<\lambda\left(x_1+x_2\right)$ 恒成立，求实数 $\lambda$ 的取值范围.

21．如图，已知抛物线$\Gamma$：$y^2=4x$，过焦点$F$的直线交抛物线$\Gamma$于$A$、$B$两点，点$C$在抛物线$\Gamma$上，使得$\triangle ABC$的重心$G$在$x$轴上，直线$AC$交$x$轴于点$Q$，且点$Q$在点$F$右侧，记$\triangle AFG$、$\triangle CQG$的面积分别为$S_1$、$S_2$．




(1)证明：$A$、$B$两点的纵坐标之积为定值；

(2)设$A\left(t^2,2t\right)$，求点$Q$的横坐标（用$t$表示）；

(3)求$\dfrac{S_1}{S_2}$的最小值及此时点$G$的坐标．

## 参考答案：

1．$5x-y+2=0$

【分析】先验证点在曲线上，再求导，代入切线方程公式即可．

【详解】由题，当$x=-1$时，$y=-3$，故点在曲线上．

求导得：$y'=\dfrac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2}$，所以$y'|_{x=-1}=5$．

故切线方程为$5x-y+2=0$．

故答案为：$5x-y+2=0$．

2．17

【分析】先求出$(1-x)^n$的通项，求出$a_8,a_9$，再由$a_8=-a_9$，即可求出$n$的值.

【详解】$(1-x)^n$展开式的通项为$T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r 1^{n-r}\cdot(-x)^r=\mathrm{C}_n^r(-1)^r x^r$，

则$a_8=(-1)^8\cdot\mathrm{C}_n^8$，$a_9=(-1)^9\cdot\mathrm{C}_n^9$，

由$a_8=-a_9$，可得$(-1)^8\cdot\mathrm{C}_n^8=-(-1)^9\cdot\mathrm{C}_n^9$，即$\mathrm{C}_n^8=\mathrm{C}_n^9$，所以$n=17$．

故答案为：$17$．

3．$\dfrac{8}{9}$

【详解】根据给定条件，利用二项分布的方差公式计算即得.

【解答】每 1 粒种子发芽的概率为$\dfrac{2}{3}$，发芽种子数量$X\sim B(4,\dfrac{2}{3})$，

所以发芽种子数量的方差是$D(X)=4\times\dfrac{2}{3}\times(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{8}{9}$.

故答案为：$\dfrac{8}{9}$

4．96

【详解】试题分析：5 张参观券全部分给 4 人，分给同一人的 2 张参观券连号，方法数为：1 和 2，2 和 3，3 和 4，4 和 5，四种连号，其它号码各为一组，分给 4 人，共有 4×$A_4^4$=96 种

考点：排列、组合及简单计数问题

5．$\dfrac{2}{5}$/0.4

【分析】根据互斥事件概率的运算性质求解.

【详解】因为事件 $A$、$B$ 都不发生的概率为 $\frac{2}{5}$，

所以 $P(A)+P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，

又因为 $P(A)=2P(B)$ 代入上式可得 $P(A)+\frac{1}{2}P(A)=\frac{3}{5}$，

所以 $P(A)=\frac{2}{5}$，

故答案为: $\frac{2}{5}$.

6．$e^5$

【分析】根据题意，求得样本中心代入回归方程 $z=0.2x+a$，求得 $a=-2$，进而求得 $y=e^{0.2x-2}$，令 $x=35$ 时，求得 $y$ 的值，即可得到答案.

【详解】由表格数据得 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(20+23+25+27+30)=25$，$\bar{z}=\frac{1}{5}\times(2+2.4+3+3+4.6)=3$，

因为数对 $(\bar{x},\bar{z})$ 满足 $z=0.2x+a$，解得 $a=3-0.2\times25=-2$，

所以 $z=0.2x-2$，即 $\ln y=0.2x-2$，可得 $y=e^{0.2x-2}$，

当 $x=35$ 时，可得 $y=e^5$，

即当 $x=35$ 时，蝗虫的产卵量 $y$ 的估计值为 $e^5$.

故答案为：$e^5$.

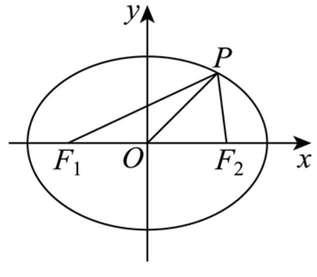
7．$\frac{\sqrt{30}}{2}$

【分析】利用椭圆的定义，结合余弦定理和 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$ 得到

$|PF_1||PF_2|=\frac{15}{2},|PF_1|^2+|PF_2|^2=21$，再由 $|PO|=|\overrightarrow{PO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$ 求解.

【详解】解：由题意椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1,F_1,F_2$ 为两个焦点，

所以 $a=3,b=\sqrt{6},c=\sqrt{3}$，




则 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$ ①，即 $|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|=36$，

由余弦定理得$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$，

又$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$，

所以$\left(|PF_1|+|PF_2|\right)^2-2|PF_1||PF_2|\left(1+\dfrac{3}{5}\right)=12$，②

联立①②，解得：$|PF_1||PF_2|=\dfrac{15}{2},\therefore|PF_1|^2+|PF_2|^2=21$，

而$\overrightarrow{PO}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)$，所以$|PO|=\left|\overrightarrow{PO}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|$，

即$\left|\overrightarrow{PO}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{21+2\times\dfrac{15}{2}\times\dfrac{3}{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

8．$\sqrt{6}$

【解析】取$AB$的中点$F$，在$BB_1$取点$M$，使得$BM=1$，分别连接$EF,ME,MF$，且$BD$与$EF$交于点$N$，连接$MN$，根据线面位置关系，$BD_1\perp$平面$MEF$，得到截面$\triangle MEF$为等腰三角形，再结合三角形的面积公式，即可求解.

【详解】由题意，取$AB$的中点$F$，在$BB_1$取点$M$，使得$BM=1$，

分别连接$EF,ME,MF$，且$BD$与$EF$交于点$N$，连接$MN$，

因为底面$ABCD$为菱形，可得$AC\perp BD$，

又由$E,F$是$BC,AB$的中点，可得$EF\,//\,AC$，所以$EF\perp BD$，

因为直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，可得$EF\perp BB_1$，所以$EF\perp$平面$BDD_1B_1$，

又由$BD_1\subset$平面$BDD_1B_1$，可得$EF\perp BD_1$，

在正方形$BDD_1B_1$中，可得$BD_1\perp B_1D$，因为$MN\,//\,B_1D$，可得$MN\perp BD_1$，

从而得到$BD_1\perp$平面$MEF$，此时$\triangle MEF$为等腰三角形，

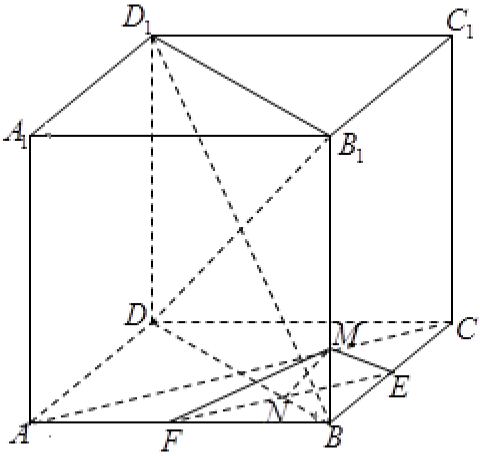
在直角$\triangle BME$中，$BE=2,BM=1$，可得$ME=\sqrt{5}$，

又由$EN=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{1}{4}AC=\dfrac{1}{4}\times4\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

在直角$\triangle MNE$中，可得$MN=\sqrt{ME^2-NE^2}=\sqrt{2}$，

所以截面的面积为$S=\dfrac{1}{2}EF\cdot MN=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$.

故答案为：$\sqrt{6}$.




【点睛】解答空间中点、线、面位置关系的确定截面问题常见解题策略：

1、根据空间平行关系的转化找出几何体的截面，其中有时对于平行关系条件理解不透导致错误；对面面平行判定定理的条件“面内两相交直线”认识不清导致错解；

2、根据空间中的垂直关系找几何体的截面，对于空间中的垂直关系中确定线面垂直是关键，结合线线垂直则需借助线面垂直的性质，垂直关系的判定定理和性质定理合理转化是证明垂直关系的基本思想.

9．$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$

【分析】根据点到线的距离公式可得$b=2$，设$\angle POF_2=\theta$，根据渐近线的性质，结合直角三角形中各边关系可得$P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，再根据直线$PF_1$的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{4}$列式化简即可.

【详解】因为$F_2(c,0)$，不妨设渐近线方程为$y=\frac{b}{a}x$，即$bx-ay=0$，

所以$\left|PF_2\right|=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc}{c}=b$，所以$b=2$.

设$\angle POF_2=\theta$，则$\tan\theta=\frac{\left|PF_2\right|}{|OP|}=\frac{b}{|OP|}=\frac{b}{a}$，所以$|OP|=a$，所以$\left|OF_2\right|=c$.

因为$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c\cdot y_P$，所以$y_P=\frac{ab}{c}$，所以$\tan\theta=\frac{y_P}{x_P}=\frac{\frac{ab}{c}}{x_P}=\frac{b}{a}$，

所以$x_P=\frac{a^2}{c}$，所以$P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，

因为$F_1(-c,0)$，所以$k_{PF_1}=\frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}+c}=\frac{ab}{a^2+c^2}=\frac{2a}{a^2+a^2+4}=\frac{a}{a^2+2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/818056107110006077