第 25 讲 规律探究

目标导航

课程标准
1.掌握数字类规律探究问题的几类题型的方法；
2.掌握等式类规律探究问题的几类题型的方法；
3.掌握图形类规律探究问题的几类题型的方法.

知识清单

知识点 01 规律探究常见的数字规律

规律总结	数列形式
$2n-1$	1，3，5，7，9，…，$2n-1$
$2n$	2，4，6，8，10，…，$2n$
$3n+1$	4，7，10，13，16，…，$3n+1$
$3n-1$	2，5，8，11，14，…，$3n-1$
2^n	2，4，8，16，32，…，2^n
2^n+1	3，5，9，17，33，…，2^n+1
n^2+1	2，5，10，17，26，…，n^2+1
n^2-1	0，3，8，15，24，…，n^2-1
$(-1)^n x$	$-x$，$+x$，$-x$，$+x$，$-x$，$+x$，…，$(-1)^n x$
$(-1)^{n+1} x$	$+x$，$-x$，$+x$，$-x$，$+x$，$-x$，…，$(-1)^{n+1} x$
$\dfrac{n(n+1)}{2}$	1，3，6，10，15，21，…，$\dfrac{n(n+1)}{2}$
斐波那契数列	1，1，2，3，5，8，13，…，从第三个数开始每个数等于与它相邻的前两个数之和

知识点 02 规律探究方法总结

1.规律探究的核心是找出每个数与对应的位次（即 n）之间的关系；

2.若数列为分数数列，则分子分母分开找规律；

3.若数列是正负交替排列，则在答案前加上$(-1)^n$；若数列是负正交替排列，则在答案前加上$(-1)^{n+1}$；

4.若是选择题，则可以用代值法，再利用排除法选出正确答案即可.

知识点 03 高斯求和定理

$$1+2+3+4+\cdots+n-1+n=\frac{(\text{首项}+\text{末项})\times\text{项数}}{2}=\frac{(1+n)\cdot n}{2}.$$

考点精析

考点一 数字类规律探究

类型一 数字类规律探究（1）

例 1 观察这些数的规律，3，-8，15，-24，35，…则第 10 个数是______.

例 2 观察下列关于 x 的单项式，探究其规律，x，$3x^2$，$5x^3$，$7x^4$，$9x^5$，$11x^6$，…按照上述规律，第 2019 个单项式是（　　）

A．$2019x^{2019}$　　B．$4037x^{2018}$　　C．$4037x^{2019}$　　D．$4039x^{2019}$

变 1 按一定规律排列的一列数依次为 2，－5，10，－17，26，－37，…，按此规律排列下去，这列数中的第 20 个数是______.

变 2 按一定规律排列的单项式：x^3，$-x^5$，x^7，$-x^9$，x^{11}，……，第 n 个单项式是（　　）

A．$(-1)^n x^{2n-1}$　　B．$(-1)^{n-1} x^{2n+1}$　　C．$(-1)^{n-1} x^{2n-1}$　　D．$(-1)^n x^{2n+1}$

例 3 观察下面一列数，根据规律写出横线上的数，$-\frac{1}{1}$；$\frac{1}{2}$；$-\frac{1}{3}$；$\frac{1}{4}$；______；______；……；第 2021 个数是______.

例 4 有一列数按如下规律排列：$-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{5}}{16}, -\frac{\sqrt{6}}{32}, \frac{\sqrt{7}}{64}$，…则第 2017 个数是______.

例 5 观察下列一组数：$-\frac{3}{2}$，1，$-\frac{9}{8}$，$\frac{17}{11}$，$-\frac{33}{14}$，…，它们是按一定规律排列的，那么这一组数的第 8 个数是______.

变 3 给定一列按规律排列的数：-1，$\frac{3}{4}$，$-\frac{5}{9}$，$\frac{7}{16}$，…，则第 9 个数为______.

变 4 观察下面一列数：1，$-\frac{3}{4}$，$\frac{8}{9}$，$-\frac{15}{16}$，$\frac{24}{25}$，……，按照这个规律，第 10 个数应该是______.

变 5 察下列一组数：$\frac{1}{3}$，$-\frac{4}{5}$，$\frac{9}{7}$，$-\frac{16}{9}$，$\frac{25}{11}$，…，它们是按照一定规律排列的，那么这组数的第

n

个数是（　　）

A．$\frac{n^2}{2n+1}$　　B．$(-1)^n\frac{2n}{2n+1}$　　C．$(-1)^n\frac{n^2}{2n-1}$　　D．$(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2n+1}$

类型二 数字类规律探究（2）

例 1 若 $2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$…，则 2^{2022} 的末位数字是（　　）

A．2　　B．4　　C．8　　D．6

例 2 观察式子：$7^1=7$、$7^2=49$、$7^3=343$、$7^4=2401$、$7^5=16807$、$7^6=117649$、…，请你判断 7^{2019} 的结果的个位数是（　　）

A．1　　B．3　　C．7　　D．9

例 3 观察下列等式：$7^1=7,7^2=49,7^3=343,7^4=2401,7^5=16087,\ldots$，那么 $7^1+7^2+7^3+7^4+7^5\ldots+7^{2020}$ 的末位数字是（　　）

A．1　　B．3　　C．7　　D．0

变 1 观察下列等式：$3^1=3$，$3^2=9$，$3^3=27$，$3^4=81$，$3^5=243$，$3^6=729$，$3^7=2187$……，则第 2018 个等式幂的结果的末位数字是______.

变 2 观察下列等式：$7^0=1$，$7^1=7$，$7^2=49$，$7^3=343$，$7^4=2401$，$7^5=16807$，…，根据其中的规律可得，$7+7^1+7^2+\ldots+7^{2019}+7^{2020}$ 的结果的个位数是（　　）

A．0　　B．1　　C．7　　D．8

类型三 数字类规律探究（3）

例 1 已知一列数：1，-2，3，-4，5，-6，7，……将这列数如下排列，第 10 行从左边数第 5 个数等于______.

第 1 行　1

第 2 行　-2　3

第 3 行　-4　5　-6

第 4 行　7　-8　9　-10

第 5 行　11　12　13　-14　15

…

例 2 将 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$-\frac{1}{6}$，…，按一定规律排列如下：

第 1 行 1

第 2 行 $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

第 3 行 $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $-\frac{1}{6}$

第 4 行 $\frac{1}{7}$ $-\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $-\frac{1}{10}$

第 5 行 $\frac{1}{11}$ $-\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $-\frac{1}{14}$ $\frac{1}{15}$

…

请你写出第 20 行从左至右第 10 个数是______.

例 3 观察下列两行数：

0，2，4，6，8，10，12，14，16，…

0，3，6，9，12，15，18，21，24，…

探究发现：第 1 个相同的数是 0，第 2 个相同的数是 6，…，

若第 n 个相同的数是 102，则 n 等于（　　）

A．20　　B．19　　C．18　　D．17

变 1 如图，将正整数按此规律排列成数表，则 2022 是表中第_____行第_____列.

1

2　3

4　5　6

7　8　9　10

11　12　13　14　15

…　…

变 2 观察下面的数：

−1

2　−3　4

−5　6　−7　8　−9

10　−11　12　−13　14　−15　16

……　……

按着上述的规律排下去，那么第 12 行从左边数第 4 个数是（　　）

A．-121　　B．-123　　C．-125　　D．-127

变 3 把正整数 1，2，3，4，5，……，按如下规律排列：根据排列规律，回答下列问题.

1　2

3　4　5

6　7　8　9

10　11　12　13　14

15　16　17　18　19　20

…　…　…　…

（1）第 7 行第 1 个数是_____，第 20 行第 1 个数是_____；

（2）数“180”是第几行第几个数？

考点二 等式类规律探究

类型一 等式类规律探究（1）

例 1 已知：$1+3=2^2$，$1+3+5=3^2$，$1+3+5+7=4^2$，……那么$1+3+5+7+9+11=$（　　）

A．4^2　　B．5^2　　C．6^2　　D．7^2

例 2 已知整数 a_1，a_2，a_3，a_4，…满足下列条件：$a_1=0$，$a_2=-|a_1+1|$，$a_3=-|a_2+2|$，$a_4=-|a_3+3|$，…，依此类推，则 a_{2022} 的值为（　　）

A．-1010　　B．-1011　　C．-1012　　D．-2022

例 3 已知：$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1\frac{1}{2}$，$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1\frac{1}{6}$，$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1\frac{1}{12}$，…，根据此规律

$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=$______.

变 1 下列式子：$3^2+4^2=5^2$，$8^2+6^2=10^2$，$15^2+8^2=17^2$，$24^2+10^2=26^2$……请你利用发现的规律写出第五个等式______.

故答案为：$35^2+12^2=37^2$.

变 2 观察下列式子：$\sqrt{1^3}=\sqrt{1^2}=1$；$\sqrt{1^3+2^3}=\sqrt{3^2}=3$；$\sqrt{1^3+2^3+3^3}=\sqrt{6^2}=6$；

$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3}=\sqrt{10^2}=10$；…根据上述规律，计算：$\sqrt{1^3+2^3+3^3+\cdots+100^3}=$______.

变 3 通过计算发现 $2^2-2^1=2$，$2^3-2^2=2^2$，$2^4-2^3=2^3$……，则 $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2021}-2^{2022}=$______.

例 4 如图，观察所给算式，找出规律：

$1+2+1=4$，

$1+2+3+2+1=9$，

$1+2+3+4+3+2+1=16$，

$1+2+3+4+5+4+3+2+1=25$，

……

根据规律计算$1+2+3+\cdots+19+20+19+\cdots+3+2+1=$______.

变 4 观察下列各式的计算结果：

$1-\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$；

$1-\frac{1}{3^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}$；

$1-\frac{1}{4^2}=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}$；

$1-\frac{1}{5^2}=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}=\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\cdots$

（1）用你发现的规律填写下列式子的结果：$1-\frac{1}{6^2}=$____×____；$1-\frac{1}{10^2}=$____×____.

（2）用你发现的规律计算：

$(1-\frac{1}{2^2})\times(1-\frac{1}{3^2})\times(1-\frac{1}{4^2})\times\ldots\times(1-\frac{1}{2020^2})\times(1-\frac{1}{2021^2})\times(1-\frac{1}{2022^2})$.

变 5 研究下列算式，你会发现什么规律？

$1\times3+1=2^2$；$2\times4+1=3^2$；$3\times5+1=4^2$；$4\times6+1=5^2$.

（1）请写出第 9 个式子______；

（2）请用含 n 的式子表示第 n 个式子：______；

（3）计算$\left(1+\frac{1}{1\times3}\right)\times\left(1+\frac{1}{2\times4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3\times5}\right)\times\left(1+\frac{1}{4\times6}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{10\times12}\right)$的值时可以这样做：

解：原式$=\frac{1\times3+1}{1\times3}\times\frac{2\times4+1}{2\times4}\times\frac{3\times5+1}{3\times5}\times\frac{4\times6+1}{4\times6}\times\cdots\times\frac{10\times12+1}{10\times12}$

$=\frac{2^2}{1\times3}\times\frac{3^2}{2\times4}\times\frac{4^2}{3\times5}\times\frac{5^2}{4\times6}\times\cdots\times\frac{11^2}{10\times12}$

$=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{11}{10}\times\frac{11}{12}$

$=\frac{2}{1}\times\frac{11}{12}$

$=\frac{11}{6}$.

请你用发现的规律解决下面的问题：

计算：$\left(1+\frac{1}{11\times13}\right)\times\left(1+\frac{1}{12\times14}\right)\times\left(1+\frac{1}{13\times15}\right)\times\left(1+\frac{1}{14\times16}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{21\times23}\right)$

类型二 等式类规律探究（2）

例 1 观察式子$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，……由此可知$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2019\times2020}=$______.

例 2 观察下列等式：$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2},\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$将以上三个等式的两边分别相加得$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

（1）猜想并写出$\frac{1}{2020\times2021}=$____.（不必写出计算结果）

（2）直接写出下列各式的计算结果：①$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2019\times2020}=$______；

②$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{199\times201}=$______；

（3）填空：$\frac{3}{1\times4}+\frac{3}{4\times7}+\frac{3}{7\times10}+\cdots+\frac{3}{2020\times2023}=$______.

变 1 观察下列等式：

第 1 个等式：$a_1=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})$；

第 2 个等式：$a_2=\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$；

第 3 个等式：$a_3=\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})$；

第 4 个等式：$a_4=\frac{1}{7\times9}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})$；

……

请解答下列问题：

（1）按以上规律列出第 5 个等式：a_5=________=________；

（2）按以上规律列出第 2015 个等式：a_{2015}=________=________；

（3）求 $a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{2016}$ 的值.

变 2 （1）请观察下列算式：$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，…，

则第 10 个算式为____________=____________，第 n 个算式为____________=____________；

（2）运用以上规律计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$.

变 3 观察下列各式：

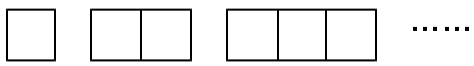
$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1\times 2}$，$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2\times 3}$，$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3\times 4}$，……

请利用你所发现的规律，计算$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2021^2}+\frac{1}{2022^2}}$，其结果为______.

考点三 图形类规律探究

类型一 图形规律探究（1）

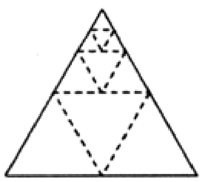
例 1 搭一个正方形需要 4 根火柴棒，按照如图的方式搭n个正方形需要（　　）根火柴棒.



A．$4n$　　B．$3n+1$　　C．$3n$　　D．$3n-1$

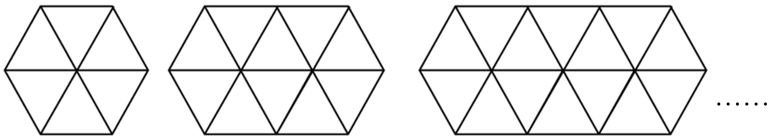
例 2 如图，将一个正三角形纸片剪成四个全等的小正三角形，再将其中的一个按同样的方法剪成四个更小的正三角形，……如此继续下去，剪的次数记为 n，得到的正三角形的个数记为a_n，如

$a_1=4$，$a_2=7\cdots\cdots$，则$a_{2020}=$（　　）



A．6058　　B．6059　　C．6060　　D．6061

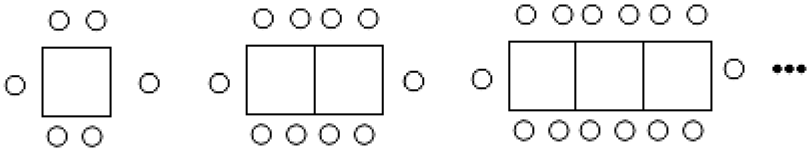
例 3 如图，图（1）是由 6 块完全相同的正三角形地砖铺成，图（2）是由 10 块完全相同的正三角形地砖铺成，图（3）是由 14 块完全相同的正三角形地砖铺成，……，按图中所示规律，则图（8）所需地砖数量为（　　）



(1)　　(2)　　(3)

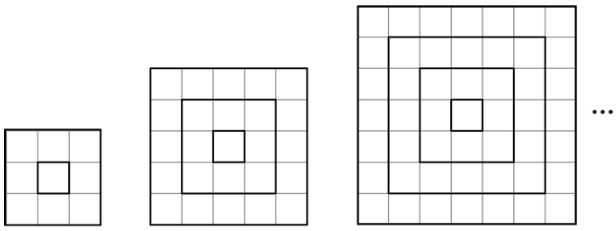
A．26 块　　B．30 块　　C．34 块　　D．38 块

例 4 按如图的方式摆放餐桌和椅子，n 张餐桌可以摆放多少把椅子？（　　）



A．$4n+2$　　B．$4n+1$　　C．$5n+2$　　D．$5n-2$

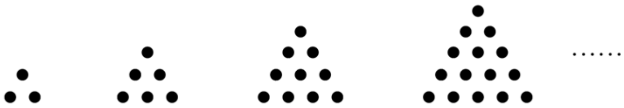
例 5 观察下列图形及图形所对应的等式，根据你发现的规律，写出第 n 幅图形对应的等式______．



①　　②　　③

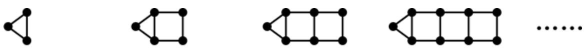
1+8=9　　1+8+16=25　　1+8+16+24=49

例 6 如图，第 n 个图形需要的棋子数量是______．（用含有 n 的代数式表示）



①　　②　　③　　④

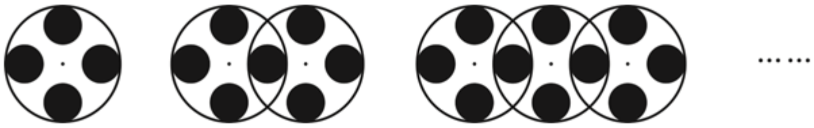
变 1 下面图案是用长度相同的火柴棒按一定规律拼搭而成，若第 n 个图案需要 y 根火柴棒，则 y 与 n 的函数关系式为（　　）



第1个图案　第2个图案　第3个图案　第4个图案

A．$y=3n$　　B．$y=3n+3$　　C．$y=4n+3$　　D．$y=4n-1$

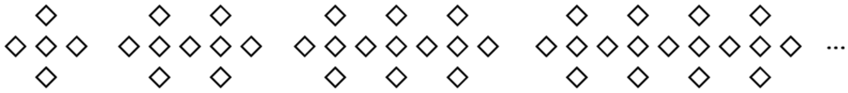
变 2 下列图形都是由圆和几个黑色围棋子按一定规律组成，图（1）中有 4 个黑色棋子，图（2）中有 7 个黑色棋子，图（3）中有 10 个黑色棋子，…，依次规律，图（2022）中黑色棋子的个数是（　　）



图（1）　　图（2）　　图（3）

A．6067　　B．6066　　C．6065　　D．6064

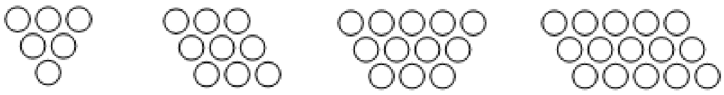
变 3 用正方形按如图所示的规律拼图案，其中第①个图案中有 5 个正方形，第②个图案中有 9 个正方形，第③个图案中有 13 个正方形，第④个图案中有 17 个正方形，此规律排列下去，则第⑧个图案中正方形的个数为（　　）



①　　②　　③　　④

A．30　　B．33　　C．37　　D．41

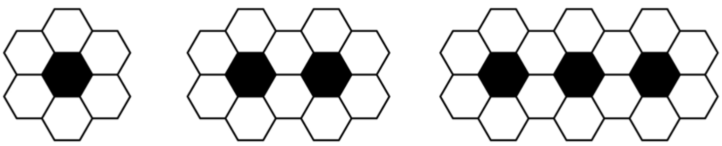
变 4 用大小相同的棋子按如下规律摆放图形，第 2022 个图形的棋子数为（　　）



第1个　　第2个　　第3个　　第4个

A．6069 个　　B．6066 个　　C．6072 个　　D．6063 个

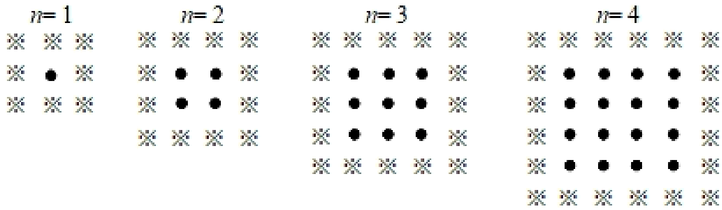
变 5 如图，第 1 个图案是由灰白两种颜色的六边形地面砖组成的，第 2 个，第 3 个图案可以看成是由第 1 个图案经过平移而得，那么第 $n(n\geq 2)$ 个图案中有白色六边形地面砖的块数是（　　）



第1个　　第2个　　第3个

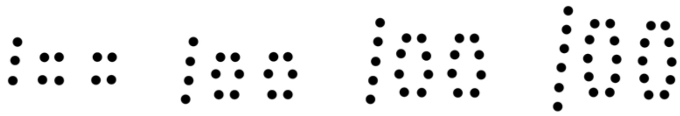
A．$4n-4$　　B．$4n-2$　　C．$4n+2$　　D．$4n+4$

变 6 植物园内，月季花按正方形种植，在它的周围种植牵牛花，如图反映了月季花的列数（n）和牵牛花的数量规律，那么当 n=2021 时，牵牛花的数量为（　　）



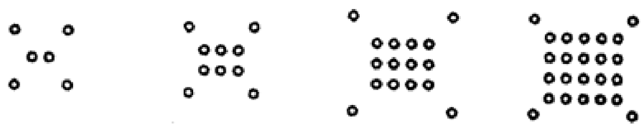
A．8076 株　　　　B．8080 株　　　　C．8084 株　　　　D．8088 株

变 7 在庆祝建党“100 周年”的活动上，某学校用围棋棋子按照某种规律摆成如图所示的“100”字样，按照这种规律，第 2022 个“100”字样的棋子个数是______．



①　　　②　　　③　　　④

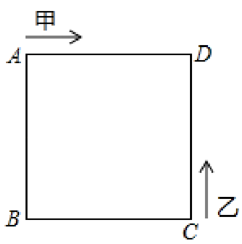
变 8 将一些半径相同的小圆按如图所示的规律摆放，第 10 个图形有______个小圆．



第 1 个图形　　第 2 个图形　　第 3 个图形　　第 4 个图形

类型二 图形规律探究（2）

例 1 如图所示，甲、乙两动点分别从正方形 $ABCD$ 的顶点 A， C 同时沿正方形的边开始移动，甲点依顺时针方向环行，乙点依逆时针方向环行，若乙的速度是甲的速度的 4 倍，则它们第 2021 次相遇在边（　　）上．



A． AB　　　　B． BC　　　　C． CD　　　　D． DA

例 2 桌面上有一个正方体，每个面均有一个不同的编号（1，2，3，…，6），且每组相对面上的编号和为 7．将其按顺时针方向滚动（如图），每滚动$90°$算一次，则滚动第 2022 次后，正方体朝下一面的数字是（　　）