第二章 方程（组）与不等式（组）

2.2 分式方程及其应用

一、课标解读

1.能根据具体问题中的数量关系列出方程，体会方程是刻画现实世界数量关系的有效模型.

2. 能解可化为一元一次方程的分式方程.

3.能根据具体问题的实际意义，检验方程的解是否合理.

二、知识点回顾

知识点 1. 分式方程及解法

1．分式方程的概念：分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

2．分式方程的解法

(1)基本思路：分式方程 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 整式方程 $\xrightarrow[\text{检验}]{\text{求解}}$ 得解

(2)解分式方程的一般步骤

方程两边同乘最简公分母，约去分母，化为整式方程（去分母时，不要漏乘常数项）

求解：求出整式方程的解

检验：把整式方程的解代入最简公分母，若结果不为零，则是原分式方程的解；若结果为零，则不是分式方程的解.

3.分式方程的增根

分式方程的增根是在去分母时产生的，它有两个特点:

(1)增根是去分母后所得整式方程的解;

(2)增根是使原方程中各分式的最简公分母为③0 的未知数的值.

知识点 2. 分式方程的应用

1.列分式方程解应用题的步骤与列一次方程(组)解应用题不一样的是:要检验两次，既要检验求出来的解是否为原方程的解，又要检验是否符合题意.

2．常见类型及关系式：

(1)行程问题：$\frac{\text{相同路程}}{\text{慢速}}-\frac{\text{相同路程}}{\text{快速}}=$时间差；

(2)工程问题：$\frac{\text{工作总量}}{\text{原工作效率}}-\frac{\text{工作总量}}{\text{新工作效率}}=$时间差，$\frac{\text{甲工作总量}}{\text{甲工作效率}}-\frac{\text{乙工作总量}}{\text{乙工作效率}}=$时间差;

(3)购买(盈利)问题.

数量 $=\frac{\text{总价}}{\text{单价}}$ 或单价 $=\frac{\text{总价}}{\text{数量}}$

三、热点训练

热点 1：解分式方程

一练基础

1．（2021·全国·九年级专题练习）解分式方程$\frac{3}{1-y}=\frac{y}{y-1}-5$时，去分母正确的是（　　）

A．$3=-y-5$　　B．$3(y-1)=y(1-y)-5$　　C．$3=y-5(1-y)$　D．$3=-y-5(1-y)$

【答案】D

【分析】

方程两边同时乘以$\left(1-y\right)$，利用等式的性质即可求解．

【详解】

解：方程两边同时乘以$\left(1-y\right)$可得：$3=-y-5(1-y)$，

故选：D．

【点睛】

本题考查去分母，掌握等式的性质是解题的关键．

2．（2021·黑龙江·哈尔滨市第六十九中学校一模）分式方程$\frac{2}{x+5}=\frac{1}{x-2}$的解是______．

【答案】$x=9$

【分析】

方程两边都乘$(x+5)(x-2)$得出$2(x-2)=x+5$，求出方程的解，再进行检验即可．

【详解】

解：$\frac{2}{x+5}=\frac{1}{x-2}$，

方程两边同乘$(x+5)(x-2)$，得$2(x-2)=x+5$，

去括号，得$2x-4=x+5$

移项得：$x=9$，

经检验，$x=9$是原方程的解，

故答案为：$x=9$．

【点睛】

本题考查了解分式方程，能把分式方程转化成整式方程是解此题的关键．

3．（2021·江苏滨海·一模）若分式$\frac{2}{x+2}$的值等于1，则x=_____．

【答案】0

【分析】

根据分式$\frac{2}{x+2}$的值等于1列方程求解即可．

【详解】

解：由题意得，$\frac{2}{x+2}$=1，

去分母，得

2=x+2，

∴x=0，

检验：当 x=0 时，x+2≠0，

故答案为：0.

【点睛】

本题考查了分式方程的解法，其基本思路是把方程的两边都乘以各分母的最简公分母，化为整式方程求解，求出 x 的值后不要忘记检验.

4．（2021·江苏鼓楼·二模）某同学解方程$\frac{x-2}{x-3}$－2＝$\frac{3x-10}{3-x}$，过程如下：

第一步：整理，得$\frac{x-2}{x-3}$－2＝$\frac{10-3x}{x-3}$，

第二步：….

（1）请你说明第一步变化过程的依据是：____________；

（2）请把以上解方程的过程补充完整.

【答案】（1）分式的基本性质；（2）见解析

【分析】

（1）根据分式的基本性质将原方程进行变形；

（2）先将分式方程变为整式方程，然后去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化 1 求解，最后注意分式方程结果要检验.

【详解】

（1）由题意可得：第一步变化过程的依据是：分式的基本性质，

故答案为：分式的基本性质；

（2）方程两边同乘（x－3）得：x－2－2（x－3）＝10－3x，

去括号，得：x－2－2x+6＝10－3x，

移项，得：x－2x+3x＝10－6+2，

合并同类项，得：2x＝6，

系数化 1，得：x＝3，

检验：当 $x=3$ 时，$x-3=0$，

∴$x=3$ 是原方程的增根，

∴原分式方程无解.

【点睛】

本题考查解分式方程，掌握解方程的步骤和计算法则准确计算是解题关键.

5．（2021·福建·福州三牧中学九年级开学考试）解方程：$\frac{2x}{x-1}-1=\frac{4}{x-1}$.

【答案】$x=3$

【分析】

分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】

解：方程的两边同乘 $x-1$，得：$2x-(x-1)=4$，

解这个方程，得：$x=3$，

检验，把 $x=3$ 代入 $x-1=3-1=2\neq0$，

∴原方程的解是 $x=3$.

【点睛】

此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是"转化思想"，把分式方程转化为整式方程求解．解分式方程一定注意要验根.

二练巩固

6．（2021·广西柳江·二模）对于实数 a，b，定义一种新运算"⊗"为：$a\otimes b=\frac{1}{a-b^2}$，这里等式右边是实数运算．例如：$1\otimes3=\frac{1}{1-3^2}=-\frac{1}{8}$．则方程 $x\otimes(-2)=1$ 的解是______________.

【答案】$x=5$

【分析】

已知等式利用题中的新定义化简，求出解即可.

【详解】

解：根据题中的新定义化简得：

$\frac{1}{x-4}=1$，

去分母得：$x-4=1$

解得：$x=5$，

经检验 $x=5$ 是分式方程的解，

故答案为： $x=5$.

【点睛】

此题考查了解分式方程，以及实数的运算，弄清题中的新定义是解本题的关键.

7.（2021·广东佛山·九年级期中）从一个不透明的口袋中随机摸出一球，再放回袋中，不断重复上述过程，一共摸了 150 次，其中有 50 次摸到黑球，已知口袋中仅有黑球 10 个和白球若干个，这些球除颜色外，其他都一样，由此估计口袋中白球的个数约为（　　）

A．10　　　　B．15　　　　C．20　　　　D．30

【答案】C

【分析】

先由频率=频数÷数据总数计算出频率，再由题意列出方程求解即可.

【详解】

解：摸了 150 次，其中有 50 次摸到黑球，则摸到黑球的频率是 $\frac{50}{150}=\frac{1}{3}$ ，

设口袋中大约有 x 个白球，则 $\frac{10}{x+10}=\frac{1}{3}$ ，

解得 x=20.

经检验，x=20 是原方程的解，

所以，口袋里有白球约 20 个，

故选：C.

【点睛】

考查利用频率估计概率．大量反复试验下频率稳定值即概率．关键是得到关于黑球的概率的等量关系.

8.（2021·山东安丘·二模）定义运算 $a\otimes b=a^2-2ab+1$，下面给出了关于这种运算的几个结论其中正确的（______）

A．$2\otimes 5=-15$；　　B．不等式组 $\begin{cases}(-3)\otimes x-1<0\\ 2\otimes x-5<0\end{cases}$ 的解集为 $x<-\frac{3}{2}$；

C．方程 $2x\otimes 1=0$ 是一元一次方程；　　D．方程 $\frac{1}{x}\otimes x=\frac{1}{x^2}+x$ 的解是 $x=-1$.

【答案】AD

【分析】

根据定义的运算规则 $a\otimes b=a^2-2ab+1$，对各选项逐一进行计算判断，即可得到答案.

【详解】

解：A．$2\otimes5=2^2-2\times2\times5+1=-15$，故 A 正确；

B．不等式组$\begin{cases}(-3)\otimes x-1<0\\ 2\otimes x-5<0\end{cases}$等价于$\begin{cases}(-3)^2-2\times(-3)x+1-1<0\\ 2^2-2\times2x+1-5<0\end{cases}$，解得该不等式组无解，故 B 错误；

C．$2x\otimes1=(2x)^2-2\times2x\times1+1=4x^2-4x+1=0$ 是一元二次方程，故 C 错误；

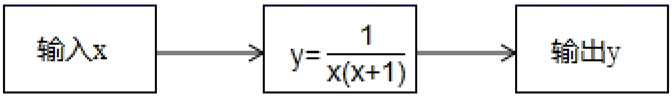
D．$\frac{1}{x}\otimes x=\frac{1}{x^2}-2\times\frac{1}{x}\times x+1=\frac{1}{x^2}+x$ 则 $x=-1$，故 D 正确；

故答案为：AD．

【点睛】

本题考查了不等式组的解集、实数的运算、一元二次方程的定义等，其中利用 $a\otimes b=a^2-2ab+1$ 是解题关键，本题对计算要求较高，要求学生具备观察仔细、计算细心等品质．

9．（2021·广东·九年级专题练习）按如图所示的程序，若输入一个数字 x，经过一次运算后，可得对应的 y 值．若输入的 x 值为﹣5，则输出的 y 值为_____；若依次输入 5 个连续的自然数，输出的 y 的平均数的倒数是 50，则所输入的最小的自然数是_____．



【答案】$\frac{1}{20}$　　5

【分析】

①将 x=-5 代入 $y=\frac{1}{x\cdot(x+1)}$ 计算可得答案；②根据平均数的概念可得：$\frac{1}{x\cdot(x+1)}+\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}+\frac{1}{(x+2)\cdot(x+3)}+\frac{1}{(x+3)\cdot(x+4)}+\frac{1}{(x+4)\cdot(x+5)}=\frac{1}{50}\times5$，即$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$，进一步计算即可求得答案．

【详解】

解：①当 x=-5 时，$y=\frac{1}{x\cdot(x+1)}=\frac{1}{(-5)\times(-4)}=\frac{1}{20}$；

②根据平均数的概念可得：$\frac{1}{x\cdot(x+1)}+\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}+\frac{1}{(x+2)\cdot(x+3)}+\frac{1}{(x+3)\cdot(x+4)}+\frac{1}{(x+4)\cdot(x+5)}=\frac{1}{50}\times5$，

即$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$，

$\therefore\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$

解得 x＝5 或 x＝-10（舍去），

故答案为：$\frac{1}{20}$；5．

【点睛】

本题主要考察了流程图与有理数计算、分式方程求解，解题的关键在于读懂流程图的含义，并将 x 代入式子进行求解．

10．（2020·湖南资兴·一模）观察下列等式：

$\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

将以上三个等式两边分别相加得：$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

猜想并得出：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

根据以上推理，求出分式方程 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=1$ 的解是______．

【答案】x=5

【分析】

根据题目中的运算法则，原方程利用拆项法变形后，求出答案即可．

【详解】

解：根据题意，

$\because \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore \frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=1$，

整理得：$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-3)}-\frac{1}{(x-2)}+\frac{1}{(x-4)}-\frac{1}{(x-3)}=1$，

$\therefore \frac{1}{x-4}=1$，

解得：x=5，

经检验 x=5 是分式方程的解．

故答案为：x=5．

【点睛】

此题考查了解分式方程，以及有理数的混合运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

三练拔高

11．（2021·四川邛崃·二模）关于 x 的分式方程 $\frac{2x-a}{x-1}-3=\frac{1}{1-x}$ 的解为非负数，则 a 的取值范围是______．

【答案】$a\le 4$ 且 $a\ne 3$

【分析】

按照解分式方程的步骤求出方程的解，再根据解为非负即得关于 a 的不等式，解不等式即可得出 a 的取值范围，但一定要考虑此时的解可能会是分式方程的增根的情况．

【详解】

方程两边都乘 x-1，得：2x-a-3(x-1)=-1

解得：x=4-a

由题意，4-a≥0

∴a≤4

但当 4-a=1，即 a=3 时，x=1 是方程的增根，所以 a≠3

所以 a 的取值范围为 $a \le 4$ 且 $a \ne 3$

故答案为：$a \le 4$ 且 $a \ne 3$

【点睛】

本题考查了分式方程的解法，一元一次不等式的解法，分式方程的增根等知识，易忽略分式方程的增根情况．

12．（2021·重庆八中二模）若数 a 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 3x-12 \le 4(x-2) \\ 5x-a<3 \end{cases}$ 有且仅有 4 个整数解，且使关于 y 的分式方程 $\frac{3y}{y-2}+\frac{a+12}{2-y}$ =1 有正整数解，则满足条件的 a 的个数是（　　）

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【答案】B

【分析】

不等式组变形后，根据有且仅有四个整数解确定出 a 的范围，再表示出分式方程的解，由分式方程有整数解，确定出满足条件 a 的值．

【详解】

解：解不等式组 $\begin{cases} 3x-12 \le 4(x-2) \\ 5x-a<3 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} x \ge -4 \\ x < \frac{a+3}{5} \end{cases}$，

∵不等式组 $\begin{cases} 3x-12 \le 4(x-2) \\ 5x-a<3 \end{cases}$ 有且仅有 4 个整数解，

∴－1＜$\frac{a+3}{5}$≤0，

∴－8＜a≤－3．

解分式方程$\frac{3y}{y-2}+\frac{a+12}{2-y}$＝1，得 y＝$\frac{a+10}{2}$，

∵y＝$\frac{a+10}{2}$≠2 为整数，

∴a≠﹣6，

∴所有满足条件的只有﹣4，

故选：B．

【点睛】

本题考查了解分式方程，解一元一次不等式组，熟练掌握解分式方程和一元一次不等式组的方法是解题的关键．

13．（2021·上海·九年级专题练习）对于两个不相等的实数a,b，我们规定符号$\max\{a,b\}$表示a,b中的较大值，如：$\max\{2,4\}=4$，故$\max\{3,5\}=$__________；按照这个规定，方程$\max\{x,-x\}=\frac{2x-1}{x}$的解为__________．

【答案】5　　$-1-\sqrt{2}$或1

【分析】

按照规定符号可求得$\max\{3,5\}=5$；根据x与$-x$的大小关系化简所求方程，求出解即可．

【详解】

$\max\{3,5\}=5$；

故答案为：5；

当$x>-x$，即$x>0$时，方程化简得：$x=\frac{2x-1}{x}$，

去分母得：$x^2=2x-1$，

整理得：$x^2-2x+1=0$，即$(x-1)^2=0$

解得：$x=1$，

经检验：$x=1$是分式方程的解；

当$x<-x$，即$x<0$时，方程化简得：$-x=\frac{2x-1}{x}$，

去分母得：$-x^2=2x-1$，

整理得：$x^2+2x-1=0$，

解得：$x=-1+\sqrt{2}$(不合题意，舍去)或$-1-\sqrt{2}$，

经检验：$x=-1-\sqrt{2}$是分式方程的解；

故答案为：$-1-\sqrt{2}$或1．

【点睛】

本题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是"转化思想"，把分式方程转化为整式方程求解．解分式方程一定注意要验根．弄清题中的新定义是解本题的关键．

14．（2021·重庆市广益中学校九年级阶段练习）若数 *a* 使关于 *x* 的不等式组$\begin{cases}\frac{x-1}{3}-\frac{1}{2}x>-1\\2x>a-3x+4\end{cases}$有且只有 3 个整数解，且使关于 *y* 的方程$\frac{ay}{2-y}=\frac{3y}{y-2}+1$的解为正数，则符合条件的所有整数 *a* 的和为（　　）

A．﹣7　　　　B．﹣6　　　　C．﹣3　　　　D．﹣2

【答案】C

【分析】

解不等式组求得其解集，根据不等式组只有 3 个整数解得出 *a* 的取值范围，解分式方程得出$y=\frac{2}{a+4}$，由方程的解为整数且分式有意义得出 *a* 的取值范围，综合两者所求最终确定 *a* 的值，据此可得答案．

【详解】

解：$\begin{cases}\frac{x-1}{3}-\frac{1}{2}x>-1\\2x>a-3x+4\end{cases}$，

解得：$\frac{a+4}{5}<x<4$，

∵该不等式组只有 3 个整数解，

∴$0\le\frac{a+4}{5}<1$，

∴﹣4≤*a*＜1，

$\frac{ay}{2-y}=\frac{3y}{y-2}+1$，

去分母，方程两边同时乘以 2﹣*y*，得，

ay=﹣3y+2﹣*y*，

$y=\frac{2}{a+4}$＞0，

∴*a*＞﹣4，

∵*y*≠2，

∴*a*≠﹣3，

综上，整数 a=－2，－1，0，

则符合条件的所有整数 a 的和为：－1－2=－3，

故选：C.

【点睛】

本题考查了解一元一次不等式组、分式方程的解，属于基础题，注意分式方程中的解要满足分母不为 0 的情况.

15.（2021·云南陆良·一模）若整数 a 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\frac{1}{2}(x-4)+\frac{x}{2}\ge 3\\ \frac{a-x}{4}\ge 0\end{cases}$ 无解，且使关于 x 的分式方程 $\frac{ax}{x-3}+\frac{3}{3-x}=2$ 有整数解，那么所有满足条件的 a 的值的积是（　　）

A．2　　B．3　　C．-3　　D．8

【答案】C

【分析】

解不等式组中的两个不等式，根据不等式组无解得出 a 的范围；解分式方程知 $x=\frac{-3}{a-2}$，由分式方程有整数解可知 $\frac{-3}{a-2}$=±1、-3，求得 a 的值后求积即可得.

【详解】

解：解不等式 $\frac{1}{2}(x-4)+\frac{x}{2}\ge 3$ 得 x≥5，

解不等式 $\frac{a-x}{4}\ge 0$，得：$x\le a$，

∵不等式组无解，

∴$a<5$，

解方程 $\frac{ax}{x-3}+\frac{3}{3-x}=2$ 得 $x=\frac{-3}{a-2}$，

∵分式方程有整数解，

∴$\frac{-3}{a-2}$=±1、-3，

解得：a=3 或 5 或-1，

又 a<5，所以 a 只能为-1 或 3

∴所有满足条件的 a 值的积为 $3\times(-1)$=-3，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查解一元一次不等式组和分式方程的能力，解题的关键是熟练掌握解不等式（组）和分式方程的基本技能，并求得符合条件的 a 的值．

16．（2021·重庆大渡口·二模）如果关于x的分式方程$\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{m+1}{2-x}=1$有非负整数解，关于 y的不等式组$\begin{cases}\dfrac{y}{2}\ge\dfrac{y+2}{3}-1\\5(y-1)<y-(m+3)\end{cases}$有且只有三个整数解，则所有符合条件的整数 m的个数为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】D

【分析】

分式方程去分母转化为整式方程，由解为非负整数解，以及不等式组只有 3 个整数解，确定出符合条件m的值，求出之和即可．

【详解】

解：去分母得：$2-m-1=x-2$，

解得：$x=3-m$，

由解为非负整数解，得到$3-m\ge0$，且$3-m\ne2$，即$m\le3$且$m\ne1$，

不等式组整理得：$\begin{cases}y\ge-2\\y<\dfrac{2-m}{4}\end{cases}$，

由不等式组只有 3 个整数解，得到$y=-2$，-1，0，即$0<\dfrac{2-m}{4}\le1$，

解得：$-2\le m<2$，

则符合题意$m=-2$，-1，0，

故选：D．

【点睛】

本题考查了分式方程的解，以及一元一次不等式组的整数解，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

17．（2021·全国·九年级专题练习）（1）解下列方程．

①$x+\dfrac{2}{x}=3$根为______；

②$x+\dfrac{6}{x}=5$根为______；

③$x+\dfrac{12}{x}=7$根为______；

（2）根据这类方程特征，写出第 n 个方程和它的根；

（3）请利用（2）的结论，求关于 x 的方程 $x+\frac{n^2+n}{x-3}=2n+4$（n 为正整数）的根．

【答案】（1）①$x_1=1,x_2=2$；②$x_1=2,x_2=3$；③$x_1=3,x_1=4$；（2）$x+\frac{n(n+1)}{x}=2n+1$，$x_1=n,x_2=n+1$；（3）$x_1=n+3,x_2=n+4$．

【分析】

（1）首先去分母，即可化成一元二次方程，解方程求得 x 的值，然后进行检验，即可求得方程的解；

（2）根据（1）中的三个方程的规律特点以及解的关系即可求解；

（3）根据（2）的结果，把所求的方程化成 $x-3+\frac{n(n+1)}{x-3}=2n+1$ 的形式，把 $x-3$ 当作一个整体即可求解．

【详解】

解：（1）①去分母，得：$x^2+2=3x$，即 $x^2-3x+2=0$，$(x-1)(x-2)=0$，

则 $x-1=0$，$x-2=0$，

解得：$x_1=1$，$x_2=2$，

经检验：$x_1=1$，$x_2=2$ 都是方程的解，

所以原分式方程的解是 $x_1=1$，$x_2=2$；

②去分母，得：$x^2+6=5x$，即 $x^2-5x+6=0$，$(x-2)(x-3)=0$，

则 $x-2=0$，$x-3=0$，

解得：$x_1=2$，$x_2=3$，

经检验：$x_1=2$，$x_2=3$ 是方程的解，

所以原分式方程的解是 $x_1=2$，$x_2=3$；

③去分母，得：$x^2+12=7x$，即 $x^2-7x+12=0$，$(x-3)(x-4)=0$，

则 $x_1=3$，$x_2=4$，

经检验 $x_1=3$，$x_2=4$ 是方程的解，

所以原分式方程的解是 $x_1=3$，$x_2=4$；

（2）根据（1）中的规律可以写出第 n 个方程为 $x+\frac{n(n+1)}{x}=2n+1$，

去分母，得 $x^2+n(n+1)=(2n+1)x$，即：$x^2-(2n+1)x+n(n+1)=0$，

则：$(x-n)[x-(n+1)]=0$，解是 $x_1=n$，$x_2=n+1$；

经检验：$x_1=n$，$x_2=n+1$是方程的解，

所以原分式方程的解是$x_1=n$，$x_2=n+1$；

（3）$x+\frac{n^2+n}{x-3}=2n+4$，

即$x-3+\frac{n(n+1)}{x-3}=2n+1$，

设$x-3=y$，则原方程变为：$y+\frac{n(n+1)}{y}=2n+1$，

利用（2）中的结论可知：$y_1=n$，$y_2=n+1$，

即：$x-3=n$或$x-3=n+1$，

解得：$x_1=n+3, x_2=n+4$，

经检验：$x_1=n+3, x_2=n+4$是方程的解，

所以原分式方程的解是$x_1=n+3, x_2=n+4$．

【点睛】

本题考查了分式方程的解法，注意方程的式子的特点，以及对应的方程的解之间的关系是解决本题的关键．

热点2：分式方程的增根和无解问题

练拔高

1．（2021·湖南师大附中博才实验中学一模）若解关于x的方程$\frac{x-5}{x-2}+\frac{m}{2-x}=1$时产生增根，那么常数$m$的值为（　　）

A．4　　B．3　　C．﹣4　　D．﹣3

【答案】D

【分析】

分式方程去分母转化为整式方程，由分式方程有增根，得到$x-2=0$，求出x的值，代入整式方程计算即可求出m的值．

【详解】

解：方程两边都乘以$x-2$，得：$x-5-m=x-2$，

∵方程有增根，

∴$x=2$，

将$x=2$代入$x-5-m=x-2$，得：$m=-3$，

故选D．

【点睛】

本题考查了分式方程的增根，解分式方程，理解增根的概念是解题的关键.

2.（2021·内蒙古呼伦贝尔·中考真题）若关于 *x* 的分式方程$\frac{2}{x-3}+\frac{x+a}{3-x}=2$无解，则 *a* 的值为（　　）

A．3　　B．0　　C．-1　　D．0 或 3

【答案】C

【分析】

直接解分式方程，再根据分母为 0 列方程即可.

【详解】

解：$\frac{2}{x-3}+\frac{x+a}{3-x}=2$，

去分母得：2﹣*x*﹣*a*＝2（*x*﹣3），

解得：*x*＝$\frac{8-a}{3}$，

当$\frac{8-a}{3}=3$时，方程无解，

解得$a=-1$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了分式方程无解，解题关键是明确分式方程无解的条件，解方程，再根据分母为 0 列方程.

3.（2021·山东·潍坊市寒亭区教学研究室一模）关于x的分式方程$\frac{6}{(x+1)(x-1)}-\frac{m}{x-1}=1$有增根，则它的增根是（　　）

A．$x=1$　　B．$x=-1$　　C．$x=1$或$x=-1$　　D．$x=3$

【答案】A

【分析】

先去分母，然后把分母为 0 的 *x* 值代入整式方程，可求 *m* 的值，则有增根，整式方程不成立，则没有增根即可.

【详解】

解：$\frac{6}{(x+1)(x-1)}-\frac{m}{x-1}=1$，

方程两边都乘以$(x+1)(x-1)$去分母得：

$6-m(x+1)=(x+1)(x-1)$，

关于 x 的分式方程 $\frac{6}{(x+1)(x-1)}-\frac{m}{x-1}=1$ 有增根，

当 x=1 时，$6-2m=0$，

解得 $m=3$，

当 m=3 时有增根 x=1，

当 x=-1 时，$6=0$ 不成立，

只有一个增根 x=1.

故选择：A.

【点睛】

本题考查可化为一元二次方程的分式方程的增根问题，掌握利用增根解决问题的方法是解题关键.

4.（2021·山东福山·模拟预测）若关于 x 的分式方程 $\frac{6}{x-2}-1=\frac{ax}{2-x}$ 有增根，则 a 的值为（　　）

A．-3　　B．3　　C．2　　D．$-\frac{7}{2}$

【答案】A

【分析】

去分母化分式方程为整式方程，将增根 x=2 代入整式方程即可求得.

【详解】

解：$\frac{6}{x-2}-1=\frac{ax}{2-x}$，

去分母，得：$6-(x-2)=-ax$.

∵分式方程有增根，

∴增根为 x=2，

将 x=2 代入整式方程，得：$6-(x-2)=-ax$，

得：$6-(2-2)=-2a$.

解得 $a=-3$

故选 A.

【点睛】

本题主要考查了分式方程的增根，熟练掌握增根的定义是解题的关键.

5.（2021·广东天河·二模）小明把分式方程 $\frac{2}{x}=\frac{x}{x-4}$ 去分母后得到整式方程 $x^2-2x-8=0$，由此他判断该分

式方程只有一个解．对于他的判断，你认为下列看法正确的是（　　）

A．小明的说法完全正确　　B．整式方程正确，但分式方程有 2 个解

C．整式方程不正确，分式方程无解　　D．整式方程不正确，分式方程只有 1 个解

【答案】C

【分析】

解分式方程$\frac{2}{x}=\frac{x}{x-4}$去分母后得到整式方程$x^2-2x+8=0$，由于$\triangle=4-32=-28<0$，得到方程$x^2-2x+8=0$无实数根，于是得到结论．

【详解】

解：∵分式方程$\frac{2}{x}=\frac{x}{x-4}$去分母后得到整式方程$x^2-2x+8=0$，

∵$\triangle=4-32=-28<0$，

∴方程$x^2-2x+8=0$无实数根，

∴方程$\frac{2}{x}=\frac{x}{x-4}$无解，

故整式方程不正确，分式方程无解，

故选：*C*．

【点睛】

本题考查了分式方程的解法,一元二次方程根的判别式,熟练将分式方程转化为一元二次方程是解题的关键．

6．（2021·全国·九年级专题练习）下列结论正确的是（　　）

A．$\frac{y+1}{5}=\frac{y}{3}$是分式方程　　B．方程$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}$＝1 无解

C．方程$\frac{x}{x^2+x}=\frac{3x}{x^2+x}$的根为 x＝0　　D．解分式方程时，一定会出现增根

【答案】B

【分析】

根据分式方程的定义和分式方程的增根的意义即可判断．

【详解】

解：*A*．原方程中分母不含未知数，不是分式方程，

所以 *A* 选项不符合题意；

B．解方程，得 x＝﹣2，