§2-2 控制系统的复数域数学模型

一. 拉氏变换的定义

设函数f(t)满足:

1. f(t)实函数
2. 当t<0时 ， f(t)=0;
3. 当t≥0时，f(t)的积分 $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

在s的某一域内收敛.

则函数f(t)的拉普拉氏变换存在，并定义为:

$$\boxed{F(s)=L[f(t)]\equiv\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

式中：s=σ+jω（σ， ω均为实数）；

F(s)称为函数f(t)的拉普拉氏变换或象函数;

f(t)称为F(s)的原函数;

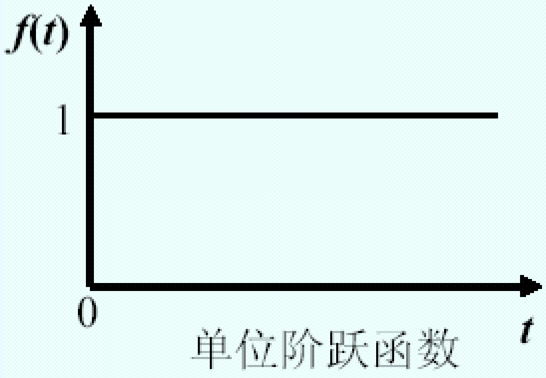
*L*为拉氏变换的符号。

阶跃函数的拉氏变换

$$1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

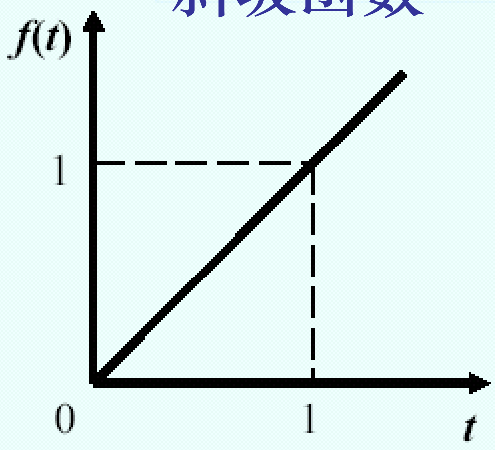
$$L\left[1(t)\right]=\int_0^{\infty}1(t)e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$



单位速度函数的拉氏变换

斜坡函数



单位速度函数

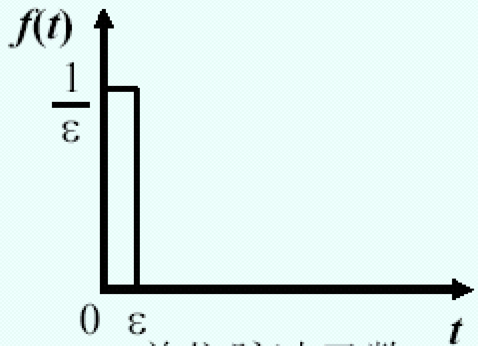
$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$$

$$L[f(t)]=\int_0^\infty te^{-st}dt$$

$$=t\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$=\frac{1}{s^2}$$

单位脉冲函数拉氏变换



单位脉冲函数

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0\text{且}t>\varepsilon)\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{\varepsilon} & (0<t<\varepsilon)\end{cases}$$

$$L[\delta(t)]=\int_0^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{-st}dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon s}(1-e^{-\varepsilon s})$$

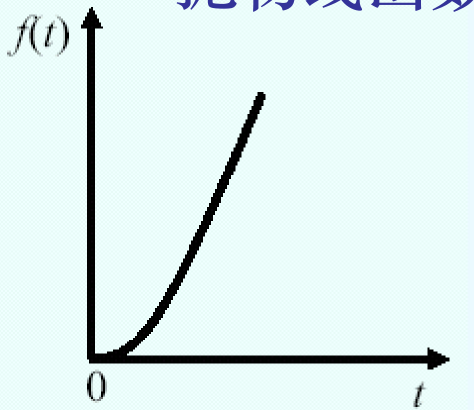
洛必达法则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon s}(1-e^{-\varepsilon s})=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1-e^{-\varepsilon s})'}{(\varepsilon s)'}$$

$$L[\delta(t)]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon}=1$$

单位加速度函数拉氏变换

抛物线函数



单位加速度函数

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2}t^2 & t\geq 0\end{cases}$$

$$L[f(t)]=\int_0^\infty \frac{1}{2}t^2e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s^3}$$