专题 01　集合与常用逻辑用语

5年考情·探规律

考点	五年考情（2020-2024）	命题趋势
考点 1 集合（5 年几考）	2020-2024 一年一考：集合的交并补运算	1. 集合作为高中数学的预备知识内容,每年都是高考中的必考题，题型为选择题,以集合的运算为主,多与解不等式等内容交汇,新定义运算也有较小的可能出现,属于基础性题目，主要考查考生的运算求解能力,提升考生的数学抽象、逻辑推理和数学运算素养。 2. 常用逻辑用语是数学学习和思维的工具，主要考查充分条件与必要条件,容易与函数、不等式、数列、三角函数、立体几何内容交汇,基础性和综合性题目居多.本部分的出错原因主要是与其他知识交汇部分的信息在提取、加工上出现理解错误,主要考查考生的逻辑思维能力。提升考生的逻辑推理素养。
考点 2 常用逻辑用语（5 年几考）	2020-2024 一年一考：充分必要条件的综合判断	

5年真题·分点精准练

考点 01 集合

1．（2024·北京·高考真题）已知集合 $M=\{x\,|-3<x<1\}$，$N=\{x\,|-1\le x<4\}$，则 $M\cup N=$（　）

A．$\{x|-1\le x<1\}$　　B．$\{x|x>-3\}$

C．$\{x\,|-3<x<4\}$　　D．$\{x|x<4\}$

【答案】C

〖祥 解〗直接根据并集含义即可得到答案.

【详 析】由题意得$M\cup N=\{x|-3<x<4\}$.

故选：C.

2.（2023·北京·高考真题）已知集合$M=\{x|x+2\geq 0\},N=\{x|x-1<0\}$，则$M\cap N=$（　）

A．$\{x|-2\leq x<1\}$　　B．$\{x|-2<x\leq 1\}$

C．$\{x|x\geq -2\}$　　D．$\{x|x<1\}$

【答案】A

〖祥 解〗先化简集合M,N，然后根据交集的定义计算.

【详 析】由题意，$M=\{x|x+2\geq 0\}=\{x|x\geq -2\}$，$N=\{x|x-1<0\}=\{x|x<1\}$，

根据交集的运算可知，$M\cap N=\{x|-2\leq x<1\}$.

故选：A

3.（2022·北京·高考真题）已知全集$U=\{x|-3<x<3\}$，集合$A=\{x|-2<x\leq 1\}$，则$\complement_U A=$（　）

A．$(-2,1]$　　B．$(-3,-2)\cup[1,3)$　　C．$[-2,1)$　　D．$(-3,-2]\cup(1,3)$

【答案】D

〖祥 解〗利用补集的定义可得正确的选项.

【详 析】由补集定义可知：$\complement_U A=\{x|-3<x\leq -2$或$1<x<3\}$，即$\complement_U A=(-3,-2]\cup(1,3)$，

故选：D.

4.（2021·北京·高考真题）已知集合$A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\leq x\leq 2\}$，则$A\cup B=$（　）

A．$\{x|-1<x<2\}$　　B．$\{x|-1<x\leq 2\}$

C．$\{x|0\leq x<1\}$　　D．$\{x|0\leq x\leq 2\}$

【答案】B

〖祥 解〗结合题意利用并集的定义计算即可.

【详 析】由题意可得：$A\cup B=\{x|-1<x\leq 2\}$.

故选：B.

5.（2020·北京·高考真题）已知集合$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，则$A\cap B=$（　）.

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,1,2\}$　　D．$\{1,2\}$

【答案】D

〖祥 解〗根据交集定义直接得结果.

【详 析】$A\cap B=\{-1,0,1,2\}\cap(0,3)=\{1,2\}$，

故选：D.

【『点石成金』】本题考查集合交集概念，考查基本分析求解能力，属基础题.

考点02 常用逻辑用语

6．（2024·北京·高考真题）设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是向量，则“$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$”是“$\vec{a}=-\vec{b}$或$\vec{a}=\vec{b}$”的（　）．

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

〖祥 解〗根据向量数量积分析可知$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$等价于$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，结合充分、必要条件分析判断.

【详 析】因为$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，可得$\vec{a}^2=\vec{b}^2$，即$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

可知$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$等价于$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

若$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$，可得$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，即$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，可知必要性成立；

若$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，即$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，无法得出$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$，

例如$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$，满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，但$\vec{a}\neq\vec{b}$且$\vec{a}\neq-\vec{b}$，可知充分性不成立；

综上所述，“$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$”是“$\vec{a}\neq\vec{b}$且$\vec{a}\neq-\vec{b}$”的必要不充分条件.

故选：B.

7．（2023·北京·高考真题）若$xy\neq0$，则“$x+y=0$”是“$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-2$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

〖祥 解〗解法一：由$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$化简得到$x+y=0$即可判断；解法二：证明充分性可由$x+y=0$得到$x=-y$，代入$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$化简即可，证明必要性可由$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$去分母，再用完全平方公式即可；解法三：证明充分性可由$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$通分后用配凑法得到完全平方公式，再把$x+y=0$代入即可，证明必要性可由$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$通分后用配凑法得到完全平方公式，再把$x+y=0$代入，解方程即可.

【详 析】解法一：

因为$xy\neq0$，且$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，

所以$x^2+y^2=-2xy$，即$x^2+y^2+2xy=0$，即$(x+y)^2=0$，所以$x+y=0$.

所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件.

解法二：

充分性：因为$xy\neq0$，且$x+y=0$，所以$x=-y$，

所以$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{-y}{y}+\frac{y}{-y}=-1-1=-2$，

所以充分性成立；

必要性：因为$xy\neq 0$，且$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，

所以$x^2+y^2=-2xy$，即$x^2+y^2+2xy=0$，即$(x+y)^2=0$，所以$x+y=0$.

所以必要性成立.

所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件.

解法三：

充分性：因为$xy\neq 0$，且$x+y=0$，

所以$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{-2xy}{xy}=-2$，

所以充分性成立；

必要性：因为$xy\neq 0$，且$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，

所以$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2=-2$，

所以$\frac{(x+y)^2}{xy}=0$，所以$(x+y)^2=0$，所以$x+y=0$，

所以必要性成立.

所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件.

故选：C

8.（2022·北京·高考真题）设$\{a_n\}$是公差不为 0 的无穷等差数列，则“$\{a_n\}$为递增数列”是“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

〖祥 解〗设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d\neq 0$，利用等差数列的通项公式结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详 析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d\neq 0$，记$[x]$为不超过x的最大整数.

若$\{a_n\}$为单调递增数列，则$d>0$，

若$a_1\geq 0$，则当$n\geq 2$时，$a_n>a_1\geq 0$；若$a_1<0$，则$a_n=a_1+(n-1)d$，

由 $a_n = a_1 + (n-1)d > 0$ 可得 $n > 1 - \frac{a_1}{d}$，取 $N_0 = \left[1 - \frac{a_1}{d}\right] + 1$，则当 $n > N_0$ 时，$a_n > 0$，

所以，“$\{a_n\}$ 是递增数列”$\Rightarrow$“存在正整数 N_0，当 $n > N_0$ 时，$a_n > 0$”；

若存在正整数 N_0，当 $n > N_0$ 时，$a_n > 0$，取 $k \in \mathrm{N}^*$ 且 $k > N_0$，$a_k > 0$，

假设 $d < 0$，令 $a_n = a_k + (n-k)d < 0$ 可得 $n > k - \frac{a_k}{d}$，且 $k - \frac{a_k}{d} > k$，

当 $n > \left[k - \frac{a_k}{d}\right] + 1$ 时，$a_n < 0$，与题设矛盾，假设不成立，则 $d > 0$，即数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

所以，“$\{a_n\}$ 是递增数列”$\Leftarrow$“存在正整数 N_0，当 $n > N_0$ 时，$a_n > 0$”.

所以，“$\{a_n\}$ 是递增数列”是“存在正整数 N_0，当 $n > N_0$ 时，$a_n > 0$”的充分必要条件.

故选：C.

9.（2021·北京·高考真题）已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0,1]$ 的函数，那么“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件 C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

〖祥 解〗利用两者之间的推出关系可判断两者之间的条件关系.

【详 析】若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$，

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$，

比如 $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$，

但 $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ 在 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 为减函数，在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 为增函数，

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$ 推不出 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

故“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增”是“$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$”的充分不必要条件，

故选：A.

10.（2020·北京·高考真题）已知 $\alpha, \beta \in R$，则“存在 $k \in Z$ 使得 $\alpha = k\pi + (-1)^k \beta$”是“$\sin\alpha = \sin\beta$”的（　）.

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

〖祥 解〗根据充分条件，必要条件的定义，以及诱导公式分类讨论即可判断.

【详 析】(1)当存在 $k \in Z$ 使得 $\alpha = k\pi + (-1)^k \beta$ 时，

若 k 为偶数，则 $\sin\alpha = \sin(k\pi + \beta) = \sin\beta$；

若 k 为奇数，则 $\sin\alpha=\sin(k\pi-\beta)=\sin[(k-1)\pi+\pi-\beta]=\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$；

(2)当 $\sin\alpha=\sin\beta$ 时，$\alpha=\beta+2m\pi$ 或 $\alpha+\beta=\pi+2m\pi$，$m\in Z$，即 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k=2m)$ 或

$\alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k=2m+1)$，

亦即存在 $k\in Z$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$.

所以，“存在 $k\in Z$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的充要条件.

故选：C.

【『点石成金』】本题主要考查充分条件，必要条件的定义的应用，诱导公式的应用，涉及分类讨论思想的应用，属于基础题.

1年模拟·精选模考题

1．(2024·北京西城·三模）设集合 $A=\{x|x+1<0\}$，$B=\{x|-2\le x\le 2\}$，则集合 $A\cup B=$（　）

A．$(-\infty,2]$　　B．$[-2,-1)$　　C．$(-1,2]$　　D．$(-\infty,+\infty)$

【答案】A

〖祥 解〗先解不等式求集合 A，再求并集即可.

【详 析】由 $x+1<0$ 得到 $x<-1$，故 $A=\{x|x<-1\}$，

又 $B=\{x|-2\le x\le 2\}$，所以 $A\cup B=(-\infty,2]$.

故选：A.

2．(2024·北京西城·三模）对于无穷数列 $\{a_n\}$，定义 $d_n=a_{n+1}-a_n$（$n=1,2,3,\ldots$），则“$\{a_n\}$ 为递增数列”是“$\{d_n\}$ 为递增数列”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件 C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

【答案】D

〖祥 解〗由递增数列的性质，分别判断充分性和必要性即可.

【详 析】$\{a_n\}$ 为递增数列时，有 $d_n=a_{n+1}-a_n>0$，不能得到 $\{d_n\}$ 为递增数列，充分性不成立；

$\{d_n\}$ 为递增数列时，不一定有 $d_n>0$，即不能得到 $\{a_n\}$ 为递增数列，必要性不成立.

所以“$\{a_n\}$ 为递增数列”是“$\{d_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件.

故选：D.

3．(2024·北京顺义·三模）已知集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-3x<0\}$，则 $M\cap N=$（　）

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{x|0\le x<3\}$　　D．$\{x|0<x<3\}$

【答案】B

〖祥 解〗化简集合 N，根据交集运算法则求 $M\cap N$.

【详 析】不等式 $x^2-3x<0$ 的解集为 $\{x|0<x<3\}$，

所以 $N=\{x|0<x<3\}$，又 $M=\{0,1,2\}$，

所以 $M\cap N=\{1,2\}$，

故选：B.

4．（2022·山东淄博·模拟预测）“角 α 与 β 的终边关于直线 $y=x$ 对称”是“$\sin(\alpha+\beta)=1$”的（　）

A．充分必要条件　B．必要不充分条件　C．充分不必要条件　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

〖祥 解〗根据终边关于 $y=x$ 对称，得两角的关系，再由 $\sin(\alpha+\beta)=1$，得两角满足的关系，根据充分必要条件的定义即可求解.

【详 析】角 α 与 β 的终边关于直线 $y=x$ 对称,则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

$\sin(\alpha+\beta)=1$,则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

“角 α 与 β 的终边关于直线 $y=x$ 对称”是“$\sin(\alpha+\beta)=1$”的充分必要条件.

故选:A

5．（2024·北京通州·三模）已知 $a>0$，$b>0$，则“$a^2+b^2>2$”是“$a+b>2$”的（　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

〖祥 解〗举出反例得到充分性不成立，再由基本不等式得到必要性成立.

【详 析】不妨设 $a=1.5,b=0.4$，此时满足 $a^2+b^2=2.25+0.16>2$，

但不满足 $a+b>2$，充分性不成立，

$a+b>2$ 两边平方得 $a^2+2ab+b^2>4$，由基本不等式得 $2ab\le a^2+b^2$，

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，

故 $a^2+b^2>4-2ab\ge 4-(a^2+b^2)$，解得 $a^2+b^2>2$，必要性成立，

故“$a^2+b^2>2$”是“$a+b>2$”的必要不充分条件.

故选：B

6．（2024·北京通州·三模）已知 U 为整数集，$A=\{x\in Z,|x^2\ge 4\}$，则 $\complement_U A=$（　）

A．$\{-1,0,1\}$　B．$\{-1,0,1,2\}$　C．$\{0,1,2\}$　D．$\{-2,-1,0,1,2\}$

【答案】A

〖祥 解〗根据条件，利用集合的运算，即可求出结果.

【详 析】因为 $A=\{x\in Z,|x^2\ge 4\}$，所以 $\complement_U A=\{x\in Z|x^2<4\}=\{x\in Z|-2<x<2\}=\{-1,0,1\}$，

故选：A.

7．（2024·北京海淀·二模）已知集合 $A=\{-1,0,1,2\},B=\{x|\ a\le x<3\}$.若 $A\subseteq B$，则 a 的最大值为（　）

A．2　　B．0　　C．-1　　D．-2

【答案】C

〖祥 解〗根据集合的包含关系可得 $a\le -1$ 求解.

【详 析】由于 $A\subseteq B$，所以 $a\le -1$，

故 a 的最大值为 -1，

故选：C

8．（2024·北京海淀·二模）设 $\{a_n\}$ 是公比为 $q(q\ne -1)$ 的无穷等比数列，S_n 为其前 n 项和，$a_1>0$.则“$q>0$”是“S_n 存在最小值”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

〖祥 解〗根据充分条件、必要条件的判定以及等比数列前 n 项和公式判断即可

【详 析】若 $a_1>0$ 且公比 $q>0$，则 $a_n=a_1q^{n-1}>0$，所以 S_n 单调递增，S_n 存在最小值 S_1，故充分条件成立.

若 $a_1>0$ 且 $q=-\frac{1}{2}$ 时，$S_n=\frac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]>0$，

当 n 为奇数时，$S_n=\frac{2}{3}a_1\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$，$S_n$ 单调递减，故最大值为 $n=1$ 时，$S_1=a_1$，而 $S_n<\frac{2}{3}a_1$，

当 n 为偶数时，$S_n=\frac{2}{3}a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$，$S_n$ 单调递增，故最小值为 $n=2$，$S_2=\frac{a_1}{2}$，

所以 S_n 的最小值为 $\frac{1}{2}a_1$，

即由 $a_1>0$，S_n 存在最小值得不到公比 $q>0$,故必要性不成立.

故 $a_1>0$ 公比“$q>0$”是“S_n 存在最小值”的充分不必要条件.

故选：A

9．（2024·北京朝阳·二模）已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2<10\right\},B=\{2,3,4,5\}$ 则 $A\cap B=$（　）

A．$\{2\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{3,4\}$　　D．$\{2,3,4\}$

【答案】B

〖祥 解〗由题意可得 $A=\{x\in\mathbf{R}|-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}\}$，结合交集的定义与运算即可求解.

【详 析】由题意知，$A=\{x\in\mathbf{R}|x^2<10\}=\{x\in\mathbf{R}|-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}\}$，

又 $B=\{2,3,4,5\}$，

所以 $A\cap B=\{2,3\}$.

故选：B

10.（2024·北京朝阳·二模）已知 α,β 是两个互相垂直的平面，l,m 是两条直线，$\alpha\cap\beta=l$，则"$m\perp l$"是"$m\perp\alpha$"的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

〖祥 解〗根据面面垂直的性质与线面垂直的性质，结合充分、必要条件的定义即可求解.

【详 析】由题意知，$\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l$，

若 $m\perp l$，当 $m\subset\beta$ 时，有 $m\perp\alpha$；当 $m\not\subset\beta$ 时，m 与 α 可能相交、平行、垂直.

若 $m\perp\alpha$，由 $l\subset\alpha$，得 $m\perp l$.

故"$m\perp l$"是"$m\perp\alpha$"是必要不充分条件.

故选：B

11.（2024·北京通州·二模）已知集合 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{0,2,3\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$（　）

A．$\{3\}$　　B．$\{0,3\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{0,1,2,3\}$

【答案】B

〖祥 解〗先求 $\complement_U A$，再求 $(\complement_U A)\cap B$ 即可.

【详 析】由题意知，$\complement_U A=\{-1,0,3\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=\{0,3\}$.

故选：B.

12.（2024·北京通州·二模）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则"$S_2-2a_2<0$"是"$nS_{n+1}>(n+1)S_n$"的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

〖祥 解〗利用等差数列通项和求和公式可推导得到充分性成立；将 $n=1$ 代入 $nS_{n+1}>(n+1)S_n$，可得 $a_2>a_1$，进而得到必要性成立，从而得到结论.

【详 析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由 $S_2-2a_2<0$ 得：$a_1+a_2-2a_2=a_1-a_2=-d<0$，$\therefore d>0$，

$$\therefore nS_{n+1}-(n+1)S_n=n\left[(n+1)a_1+\frac{n(n+1)}{2}d\right]-(n+1)\left(na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\right)$$

$$=\frac{n^2(n+1)}{2}d-\frac{n(n+1)(n-1)}{2}d=\frac{n^2+n}{2}d>0,$$

$\therefore nS_{n+1}>(n+1)S_n$，即 $S_2-2a_2<0\Rightarrow nS_{n+1}>(n+1)S_n$，充分性成立；

由 $nS_{n+1} > (n+1)S_n$ 得：$S_2 > 2S_1$，$\therefore S_2 - S_1 > S_1$，即 $a_2 > a_1$，

$\therefore S_2 - 2a_2 = a_1 + a_2 - 2a_2 = a_1 - a_2 < 0$，

即 $nS_{n+1} > (n+1)S_n \Rightarrow S_2 - 2a_2 < 0$，必要性成立；

$\therefore$“$S_2 - 2a_2 < 0$”是“$nS_{n+1} > (n+1)S_n$”的充分必要条件.

故选：C.

13．（2024·北京房山·一模）“$0 < x < 1$”是“$|x(x-1)| = x(1-x)$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

〖祥 解〗先求出 $|x(x-1)| = x(1-x)$，再由充分条件和必要条件的定义求解即可.

【详 析】由 $|x(x-1)| = x(1-x)$ 可得：$x(x-1) \le 0$，

解得：$0 \le x \le 1$，

所以“$0 < x < 1$”能推出“$|x(x-1)| = x(1-x)$”，

但“$|x(x-1)| = x(1-x)$”推不出“$0 < x < 1$”，

所以“$0 < x < 1$”是“$|x(x-1)| = x(1-x)$”的充分不必要条件.

故选：A.

14．（2024·北京房山·一模）已知全集 $U = \{-2,-1,0,1,2\}$，集合 $A = \{1,2\}$，则 $\complement_U A =$（　）

A．$\{-2,-1,0,1\}$　　B．$\{-2,-1,0\}$　　C．$\{-2,-1,1\}$　　D．$\{-2,-1\}$

【答案】B

〖祥 解〗根据补集的定义即可得解.

【详 析】因为全集 $U = \{-2,-1,0,1,2\}$，集合 $A = \{1,2\}$，

所以 $\complement_U A = \{-2,-1,0\}$.

故选：B.

15．（2024·北京海淀·一模）设 α, β 是两个不同的平面，l, m 是两条直线，且 $m \subset \alpha, l \perp \alpha$.则“$l \perp \beta$”是“$m // \beta$”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

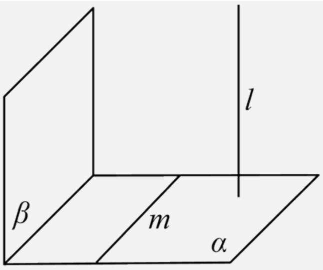
〖祥 解〗通过面面平行的性质判断充分性，通过列举例子判断必要性.

【详 析】$l \perp \beta$，且 $l \perp \alpha$，所以 $\alpha // \beta$，又 $m \subset \alpha$，所以 $m // \beta$，充分性满足，

如图：满足 $m // \beta$，$m \subset \alpha, l \perp \alpha$，但 $l \perp \beta$ 不成立，故必要性不满足，

所以“$l \perp \beta$”是“$m // \beta$”的充分而不必要条件.

故选：A.



16.（2024·北京海淀·一模）已知全集 $U=\{x\mid -2\le x\le 2\}$，集合 $A=\left\{x\middle|-1\le x<2\right\}$，则 $\complement_U A=$（　）

A．$(-2,-1)$　　B．$[-2,-1]$　　C．$(-2,-1)\cup\{2\}$　　D．$[-2,-1)\cup\{2\}$

【答案】D

〖祥 解〗根据给定条件，利用补集的定义求解即得.

【详 析】全集 $U=\{x\mid -2\le x\le 2\}$，集合 $A=\left\{x\middle|-1\le x<2\right\}$，

所以 $\complement_U A=[-2,-1)\cup\{2\}$.

故选：D

17.（2024·北京朝阳·一模）已知 $a\in\mathbf{R}$，则“$0<a<1$”是“函数 $f(x)=(1-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

〖祥 解〗分 $a=1$，$a>1$，$a<1$ 讨论函数 $f(x)$ 的单调性，进而根据充分性和必要性的概念确定答案.

【详 析】对于函数 $f(x)=(1-a)x^3$

当 $a=1$ 时，$f(x)=0$，为常数函数，

当 $a>1$ 时，$1-a<0$，函数 $f(x)=(1-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

当 $a<1$ 时，$1-a>0$，函数 $f(x)=(1-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以“$0<a<1$”是“函数 $f(x)=(1-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增”的充分而不必要条件.

故选：A.

18.（2024·北京朝阳·一模）已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$，$A=\left\{x\in U\middle|x<2\right\}$，则 $\complement_U A=$（　）

A．$\{1\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{3,4\}$　　D．$\{2,3,4\}$

【答案】D

〖祥 解〗求出集合 A，再利用补集的定义求解即得.

【详 析】全集 $U=\{1,2,3,4\}$，则 $A=\{1\}$，

所以 $\complement_U A=\{2,3,4\}$.

故选：D

19．（2024·北京朝阳·一模）设 A，B 为两个非空有限集合，定义 $J(A,B)=1-\dfrac{|A\cap B|}{|A\cup B|}$ 其中 $|S|$ 表示集合 S 的元素个数.某学校甲、乙、丙、丁四名同学从思想政治、历史、地理、物理、化学、生物这 6 门高中学业水平等级性考试科目中自主选择 3 门参加考试，设这四名同学的选考科目组成的集合分别为 S_1，S_2，S_3，S_4.已知 $S_1=$ {物理，化学，生物}，$S_2=$ {地理，物理，化学}，$S_3=$ {思想政治，历史，地理}，给出下列四个结论：

①若 $J(S_2,S_4)=1$，则 $S_4=$ {思想政治，历史，生物}；

②若 $J(S_1,S_2)=J(S_1,S_4)$，则 $S_4=$ {地理，物理，化学}；

③若 $S_4=$ {思想政治，物理，生物}，则 $J(S_1,S_4)<J(S_2,S_4)=J(S_3,S_4)$；

④若 $J(S_1,S_4)>J(S_2,S_4)=J(S_3,S_4)$，则 $S_4=$ {思想政治，地理，化学}.

其中所有正确结论的序号是________.

【答案】①③

〖祥 解〗对于①③：直接根据定义计算即可；对于②：通过定义计算得到 $|S_1\cup S_4|$ 必为偶数，讨论 $|S_1\cup S_4|=6$ 和 $|S_1\cup S_4|=4$ 两种情况下的求解即可；对于④：通过举例 $S_4=$ {物理，地理，历史}来说明.

【详 析】对于①：$J(S_2,S_4)=1-\dfrac{|S_2\cap S_4|}{|S_2\cup S_4|}=1$，所以 $|S_2\cap S_4|=0$，所以 $S_2\cap S_4=\varnothing$，

又 $S_2=$ {地理，物理，化学}，所以 $S_4=$ {思想政治，历史，生物}，①正确；

对于②：$J(S_1,S_2)=J(S_1,S_4)$，即 $\dfrac{|S_1\cap S_2|}{|S_1\cup S_2|}=\dfrac{|S_1\cap S_4|}{|S_1\cup S_4|}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $2|S_1\cap S_4|=|S_1\cup S_4|$，所以 $|S_1\cup S_4|$ 必为偶数，又 $3\le|S_1\cup S_4|\le 6$，

当 $|S_1\cup S_4|=6$ 时，$|S_1\cap S_4|=|\varnothing|=0$，不符合 $2|S_1\cap S_4|=|S_1\cup S_4|$，

所以 $|S_1\cup S_4|=4$，且 $|S_1\cap S_4|=2$，此时 S_4 情况较多，比如 $S_4=$ {物理，地理，生物}，②错误；

对于③：若 $S_4=$ {思想政治，物理，生物}，则 $J(S_1,S_4)=1-\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2},J(S_2,S_4)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5},J(S_3,S_4)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$，

所以 $J(S_1,S_4)<J(S_2,S_4)=J(S_3,S_4)$，③正确；

对于④：当 $S_4=$ {物理，地理，历史}时，

$$J(S_1,S_4)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5},J(S_2,S_4)=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2},J(S_3,S_4)=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

满足 $J(S_1,S_4)>J(S_2,S_4)=J(S_3,S_4)$，但不是 $S_4=$ {思想政治，地理，化学}，④错误.

故选：①③

【〖点石成金〗】方法〖点石成金〗：对于新定义题目，一定要深刻理解定义的意义，然后套用定义进行计算即可，很多时候新定义题目难度并不很大，关键是要大胆做，用心做.

20．（2024·北京西城·三模）记集合 $\Omega=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}(n>2)$.对任意

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\Omega$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\Omega$，记$d(\alpha,\beta)=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$，对于非空集合$A\subseteq\Omega$，定义集合$D(A)=\{d(\alpha,\beta)\,|\,\alpha\in A,\beta\in A\}$.

(1)当$n=2$时，写出集合Ω；对于$A=\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$，写出$D(A)$；

(2)当$n=3$时，如果$D(A)=\Omega$，求$\text{card}(A)$的最小值；

(3)求证：$\text{card}(D(A))\geqslant\text{card}(A)$.

（注：本题中，$\text{card}(A)$表示有限集合A中的元素的个数.）

【答案】(1)$\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$；$D(A)=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

(2)5

(3)证明见解析

〖祥 解〗(1)根据定义直接写出集合Ω，再根据$D(A)$的定义写出$D(A)$；

（2）设$\text{card}(A)=m$，则$\text{card}(\Omega)=8$，则由题意可得$\mathrm{C}_m^2\geqslant7$，从而可求得结果；

（3）设A中的所有元素为α_1，α_2，…，α_m，其中$m=\text{card}(A)$，记$\alpha_i'=d(\alpha_i,\alpha_1)$（$i=1,2,\ldots,m$），先利用反证法证明这些$\alpha_i'$互不相等，再根据定义证明即可.

【详 析】(1) $\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$；

若$A=\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$，则$D(A)=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

（2）$\text{card}(A)$的最小值为 5.

证明如下：

设$\text{card}(A)=m$.

因为$\text{card}(\Omega)=2^3=8$，除$(0,0,0)=d(\alpha,\beta)$外，其它 7 个元素需由两个不同的$\alpha$，$\beta$计算得到，

所以$\mathrm{C}_m^2\geqslant7$，解得$m\geq5$.

当$A=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$时，有$D(A)=\Omega$，符合题意.

（3）证明：设A中的所有元素为α_1，α_2，…，α_m，其中$m=\text{card}(A)$.

记$\alpha_i'=d(\alpha_i,\alpha_1)$（$i=1,2,\ldots,m$），则这些$\alpha_i'$互不相等.

证明如下：如果存在$i\neq j$，$d(\alpha_i,\alpha_1)=d(\alpha_j,\alpha_1)$，

则$d(\alpha_i,\alpha_1)$，$d(\alpha_j,\alpha_1)$的每一位都相等，

所以α_i，α_j的每一位都相等，

从而$\alpha_i=\alpha_j$，与集合A中元素的互异性矛盾.

定义集合$D'(A)=\{\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_m'\}$，则$\text{card}(D'(A))=m=\text{card}(A)$.

又$D(A)\supseteq D'(A)$，

所以$\text{card}(D(A))\geqslant\text{card}(D'(A))=\text{card}(A)$.

【『点石成金』】关键点『点石成金』

：此题考查集合的新定义，考查集合间的关系，解题的关键是对集合新定义的正确理解，考查理解能力，属于难题.

21．（2024·北京海淀·二模）设正整数 $n\geq 2$，$a_i,d_i\in\mathbf{N}^*$，$A_i=\{x|x=a_i+(k-1)d_i,k=1,2,\cdots\}$，这里 $i=1,2,\cdots,n$．若 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\mathbf{N}^*$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing(1\leq i<j\leq n)$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 具有性质 P.

(1)当 $n=3$ 时，若 A_1,A_2,A_3 具有性质 P，且 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，令 $m=d_1d_2d_3$，写出 m 的所有可能值；

(2)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 具有性质 P：

①求证：$a_i\leq d_i(i=1,2,\cdots,n)$；

②求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}$ 的值.

【答案】(1)27 或 32

(2)①证明见解析 ②$\frac{n+1}{2}$

〖祥 解〗（1）对题目中所给的 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，我们先通过分析集合中的元素，证明 $a_i\leq d_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}=1$，以及 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}=\frac{n+1}{2}$，然后通过分类讨论的方法得到小问 1 的结果；

（2）直接使用（1）中的这些结论解决小问 2 即可.

【详 析】（1）对集合 S，记其元素个数为 $|S|$．先证明 2 个引理.

引理 1：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 具有性质 P，则 $a_i\leq d_i(i=1,2,\cdots,n)$.

引理 1 的证明：假设结论 $a_i\leq d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不成立.

不妨设 $a_1>d_1$，则正整数 $a_1-d_1\notin A_1$，但 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\mathbf{N}^*$，

故 a_1-d_1 一定属于某个 $A_i(2\leq i\leq n)$，不妨设为 A_2.

则由 $a_1-d_1\in A_2$ 知存在正整数 k，使得 $a_1-d_1=a_2+(k-1)d_2$.

这意味着对正整数 $c=a_1-d_1+d_1d_2$，有 $c=a_1-d_1+d_1d_2=a_1+(d_2-1)d_1\in A_1$，

$c=a_1-d_1+d_1d_2=a_2+(k-1)d_2+d_1d_2=a_2+(k+d_1-1)d_2\in A_2$，但 $A_1\cap A_2=\varnothing$，矛盾.

所以假设不成立，从而一定有 $a_i\leq d_i(i=1,2,\cdots,n)$，从而引理 1 获证.

引理 2：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 具有性质 P，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}=1$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}=\frac{n+1}{2}$.

证明：取集合 $T=\{1,2,...,d_1d_2...d_n\}$.

注意到关于正整数 k 的不等式 $0<a_i+(k-1)d_i\leq d_1d_2...d_n$ 等价于 $1-\frac{a_i}{d_i}<k\leq 1-\frac{a_i}{d_i}+\frac{d_1d_2...d_n}{d_i}$，

而由引理 1 有 $a_i\leq d_i$，即 $0\leq 1-\frac{a_i}{d_i}<1$.

结合 $\frac{d_1d_2...d_n}{d_i}$ 是正整数，知对于正整数 k，$1-\frac{a_i}{d_i}<k\le 1-\frac{a_i}{d_i}+\frac{d_1d_2...d_n}{d_i}$ 当且仅当 $k\le\frac{d_1d_2...d_n}{d_i}=\frac{|T|}{d_i}$，

这意味着数列 $x_k=a_i+(k-1)d_i\,(k=1,2,...)$ 恰有 $\frac{|T|}{d_i}$ 项落入集合 T，即 $|T\cap A_i|=\frac{|T|}{d_i}$.

而 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两之间没有公共元素，且并集为全体正整数，

故 T 中的元素属于且仅属于某一个 $A_i\,(1\le i\le n)$，故 $|T\cap A_1|+|T\cap A_2|+...+|T\cap A_n|=|T|$.

所以 $\frac{|T|}{d_1}+\frac{|T|}{d_2}+...+\frac{|T|}{d_n}=|T\cap A_1|+|T\cap A_2|+...+|T\cap A_n|=|T|$，

从而 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+...+\frac{1}{d_n}=1$，这就证明了引理 2 的第一个结论；

再考虑集合 T 中全体元素的和.

一方面，直接由 $T=\{1,2,...,d_1d_2...d_n\}$ 知 T 中全体元素的和为 $\frac{d_1d_2...d_n(d_1d_2...d_n+1)}{2}$，即 $\frac{|T|(|T|+1)}{2}$.

另一方面，$T\cap A_i$ 的全部 $\frac{|T|}{d_i}$ 个元素可以排成一个首项为 a_i，公差为 d_i 的等差数列.

所以 $T\cap A_i$ 的所有元素之和为 $a_i\cdot\frac{|T|}{d_i}+\frac{1}{2}\frac{|T|}{d_i}\left(\frac{|T|}{d_i}-1\right)d_i=\frac{a_i}{d_i}|T|+\frac{|T|}{2}\left(\frac{|T|}{d_i}-1\right)$.

最后，再将这 n 个集合 $T\cap A_i\,(i=1,2,...,n)$ 的全部元素之和相加，

得到 T 中全体元素的和为 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{d_i}|T|+\frac{|T|}{2}\left(\frac{|T|}{d_i}-1\right)\right)$.

这就得到 $\frac{|T|(|T|+1)}{2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{d_i}|T|+\frac{|T|}{2}\left(\frac{|T|}{d_i}-1\right)\right)$，所以有

$$\frac{|T|(|T|+1)}{2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{d_i}|T|+\frac{|T|}{2}\left(\frac{|T|}{d_i}-1\right)\right)=|T|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}+\frac{|T|^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}-\frac{n|T|}{2}=|T|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}+\frac{|T|^2}{2}-\frac{n|T|}{2}.$$

即 $\frac{|T|+1}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}+\frac{|T|-n}{2}$，从而 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}=\frac{n+1}{2}$，这就证明了引理 2 的第二个结论.

综上，引理 2 获证.

回到原题.

将 d_1,d_2,d_3 从小到大排列为 $r_1\le r_2\le r_3$，则 $m=d_1d_2d_3=r_1r_2r_3$，

由引理 2 的第一个结论，有 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}=1$.

若 $r_1\ge 3$，则 $1=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\le\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1}=\frac{3}{r_1}\le 1$，

所以每个不等号都取等，从而 $r_1=r_2=r_3=3$，故 $m=r_1r_2r_3=27$；

情况1：若$r_1=1$，则$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=1-\frac{1}{r_1}=0$，矛盾；

情况2：若$r_1=2$，则$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=1-\frac{1}{r_1}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{2}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\le\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_2}=\frac{2}{r_2}$，得$r_2\le4$.

此时如果$r_2=2$，则$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{r_2}=0$，矛盾；

如果$r_2=4$，则$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{r_2}=\frac{1}{4}$，从而$r_3=4$，故$m=r_1r_2r_3=32$；

如果$r_2=3$，由于$r_1=2$，设$(r_1,r_2,r_3)=(d_{i_1},d_{i_2},d_{i_3})$，$\{i_1,i_2,i_3\}=\{1,2,3\}$，则$d_{i_1}=2$，$d_{i_2}=3$.

故对于正整数对$\begin{cases}k_1=3+3\left|a_{i_2}-a_{i_1}-1\right|+2\left(a_{i_2}-a_{i_1}-1\right)\\k_2=2+2\left|a_{i_2}-a_{i_1}-1\right|+\left(a_{i_2}-a_{i_1}-1\right)\end{cases}$，有$2k_1-3k_2=a_{i_2}-a_{i_1}-1$，

从而$a_{i_1}+2k_1=a_{i_2}+3k_2\in A_{i_1}\cap A_{i_2}$，这与$A_{i_1}\cap A_{i_2}=\varnothing$矛盾.

综上，m的取值只可能是27或32.

当$(d_1,d_2,d_3)=(3,3,3)$时，$m=27$；当$(d_1,d_2,d_3)=(4,2,4)$时，$m=32$.

所以$m=d_1d_2d_3$的所有可能取值是27和32.

（2）①由引理1的结论，即知$a_i\le d_i\ (i=1,2,\cdots,n)$；

②由引理2的第二个结论，即知$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d_i}=\frac{n+1}{2}$.

【『点石成金』】关键点『点石成金』：本题的关键点在于，我们通过两个方面计算了一个集合的各个元素之和，从而得到了一个等式，这种方法俗称“算二次”法或富比尼定理.

22．（2024·北京朝阳·二模）设n为正整数，集合$A_n=\{\alpha\mid\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),a_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}$.对于$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，设集合$P(a)=\{t\in\mathbf{N}\mid 0\le t\le n-1,a_{i+t}=a_i,i=1,2,\ldots,n-t\}$.

(1)若$\alpha=(0,1,0,0,1,0),\beta=(0,1,0,0,1,0,1,0,0,1,0)$，写出集合$P(\alpha),P(\beta)$；

(2)若$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，且$s,t\in P(\alpha)$满足$s<t$，令 $\alpha'=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-s})\in A_{n-s}$，求证： $t-s\in P(\alpha')$；

(3)若$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，且 $P(\alpha)=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}(s_1<s_2<\cdots<s_m,m\ge3)$，求证：

$2s_{k+1}\ge s_k+s_{k+2}\ (k=1,2,\cdots,m-2)$.

【答案】(1)$P(\alpha)=\{0,3,5\},P(\beta)=\{0,5,8,10\}$；

(2)证明见解析；

(3)证明见解析.

〖祥 解〗（1）由题意，即可直接写出$P(\alpha),P(\beta)$；

（2）由$a_{i+s}=a_i$可得$a_{j+t}=a_{j+t-s}$，结合$a_{j+t}=a_j$可得$a_{j+t-s}=a_j,j=1,2,\cdots,n-t$，即可证明；

（3）若$t\in P(\alpha')$且$2t<n-s$则$a_{i+2t}=a_i,i=1,2,\cdots,n-s-2t$，进而$s+2t\in P(\alpha)$，由（2）可知$s_{k+1}-s_k\in P(\alpha_k)$，分类讨论

$2(s_{k+1}-s_k)<n-s_k$、$2(s_{k+1}-s_k)\ge n-s_k$ 时 $2s_{k+1}-s_k$ 与 s_{k+2} 的大小关系，即可证明.

【详 析】（1） $P(\alpha)=\{0,3,5\},P(\beta)=\{0,5,8,10\}$；

（2）因为 $s\in P(\alpha)$，所以 $a_{i+s}=a_i,i=1,2,\cdots,n-s$，

当 $1\le j\le n-t$ 时，$1<j+t-s\le n-t+t-s=n-s$，

所以 $a_{j+t-s+s}=a_{j+t-s}$，即 $a_{j+t}=a_{j+t-s}$，$j=1,2,\cdots,n-t$，

又因为 $t\in P(\alpha)$，所以 $a_{j+t}=a_j,j=1,2,\cdots,n-t$，

所以 $a_{j+t-s}=a_j,j=1,2,\cdots,n-t$，

所以 $t-s\in P(\alpha')$；

（3）对任意 $s\in P(\alpha)$，令 $\alpha'=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-s})\in A_{n-s}$，

若 $t\in P(\alpha')$ 且 $2t<n-s$，则 $a_{i+t}=a_i,i=1,2,\cdots,n-s-t$，

所以 $a_{i+2t}=a_i,i=1,2,\cdots,n-s-2t$，

因为 $s\in P(\alpha)$，所以 $a_{j+1}=a_j,j=1,2,\cdots,n-s$，

所以 $a_i=a_{i+2t}=a_{i+2t+s},i=1,2,\cdots,n-s-2t$，所以 $s+2t\in P(\alpha)$.

对 $s_k,s_{k+1}\in P(\alpha)(k=1,2,\cdots,m-2)$，因为 $s_k<s_{k+1}$，

由（2）可知，令 $\alpha_k=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-s_k})$，则 $s_{k+1}-s_k\in P(\alpha_k)$.

若 $2(s_{k+1}-s_k)<n-s_k$，因为 $s_k\in P(\alpha)$，

所以 $s_k+2(s_{k+1}-s_k)\in P(\alpha)$，即 $2s_{k+1}-s_k\in P(\alpha)$，

又因为 $2s_{k+1}-s_k=s_{k+1}+(s_{k+1}-s_k)>s_{k+1}$，所以 $2s_{k+1}-s_k\ge s_{k+2}$.

若 $2(s_{k+1}-s_k)\ge n-s_k$，则 $s_k+2(s_{k+1}-s_k)\ge n>s_m\ge s_{k+2}$，

所以 $2s_{k+1}-s_k>s_{k+2}$.

综上，$2s_{k+1}-s_k\ge s_{k+2}$ 即 $2s_{k+1}\ge s_k+s_{k+2}(k=1,2,\cdots,m-2)$.

【『点石成金』】方法『点石成金』:

学生在理解相关新概念、新定义、新法则(公式)之后，运用学过的知识，结合已掌握的技能，通过推理、运算等解决问题.在新环境下研究“旧”性质.主要是将新性质应用在“旧”性质上，创造性地证明更新的性质，落脚点仍然是集合相关知识..

23．（2024·北京房山·一模）已知无穷数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，各项均为正整数的递增数列，集合 $A=\{k\in\mathbf{N}^*\mid a_n<k<a_{n+1},n\in\mathbf{N}^*\}$．若对于集合 A 中的元素 k，数列 $\{a_n\}$ 中存在不相同的项 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m}$，使得 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_m}=k$，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $N(k)$，记集合 $B=\{k|$数列$\{a_n\}$具有性质$N(k)\}$.

(1)若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2n-1,n\le 4,\\ n+6,n>4.\end{cases}$ 写出集合 A 与集合 B；

(2)若集合 A 与集合 B 都是非空集合，且集合 A 中的最小元素为 t，集合 B 中的最小元素为 s，当 $t\ge 3$ 时，证明：$t=s$；

(3)若 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n\ge a_{n+1},n\in\mathrm{N}^*$，证明：$A=B$.

【答案】(1) $A=\{2,4,6,8,9,10\}$， $B=\{4,6,8,9,10\}$

(2)证明见解析

(3)证明见解析

〖祥 解〗（1）定义 $C=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$，可知 $A=\complement_{\mathbf{N}^*}C$，结合题中通项公式分析求解；

（2）根据题意可知 $1,2,\cdots,t-1\in C$，可得 $t=1+t-1$，即可分析证明；

（3）由题意可知： $a_1=1,a_2=2$，可知集合 A,B 在 (a_1,a_2) 均不在元素，分类讨论集合 A,B 是否为空集，结合题意利用数学归纳法分析证明.

【详 析】（1）定义 $C=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$，由题意可知 $A=\complement_{\mathbf{N}^*}C$，

若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2n-1,n\le 4,\\ n+6,n>4.\end{cases}$，可知 $C=\{1,3,5,7,11,12,13,\cdots\}$，

所以 $A=\complement_{\mathbf{N}^*}C=\{2,4,6,8,9,10\}$，

因为 2 只能写成 $2=1+1$，不合题意，即 $2\notin B$；

$4=1+3$，符合题意，即 $4\in B$；

$6=1+5$，符合题意，即 $6\in B$；

$8=1+7$，符合题意，即 $8\in B$；

$9=1+3+5$，符合题意，即 $9\in B$；

$10=3+7$，符合题意，即 $10\in B$；

所以 $B=\{4,6,8,9,10\}$.

（2）因为 $t\ge 3$，由题意可知： $1,2,\cdots,t-1\notin A$，且 $t\le s$，

即 $1,2,\cdots,t-1\in C$，

因为 $t=1+t-1$，即存在不相同的项 $a_1=1,a_K=t-1$，使得 $a_1+a_K=t$

可知 $t\in B$，所以 $t=s$.

（3）因为 $a_1=1,2a_n\ge a_{n+1},n\in \mathrm{N}^*$，

令 $n=1$，可得 $a_2\le 2a_1=2$，则 $a_2=2$，即 $1,2\in C$，

即集合 A,B 在 (a_1,a_2) 内均不存在元素，此时我们认为集合 A,B 在 (a_1,a_2) 内的元素相同；

（i）若集合 A 是空集，则 B 是空集，满足 $A=B$；

（ⅱ）若集合 A 不是空集，集合 A 中的最小元素为 t，可知 $t\ge 3$，

由（2）可知：集合 B 存在的最小元素为 s，且 $t=s$，

设存在 $n_0\ge 2,n_0\in \mathbf{N}^*$，使得 $2\le a_{n_0}<t<a_{n_0+1}$，

可知集合 A,B 在 (a_1,a_{n_0}) 内的元素相同,

可知 $1,2,\cdots,a_{n_0}\notin A$，则 $1,2,\cdots,a_{n_0}\in C$，