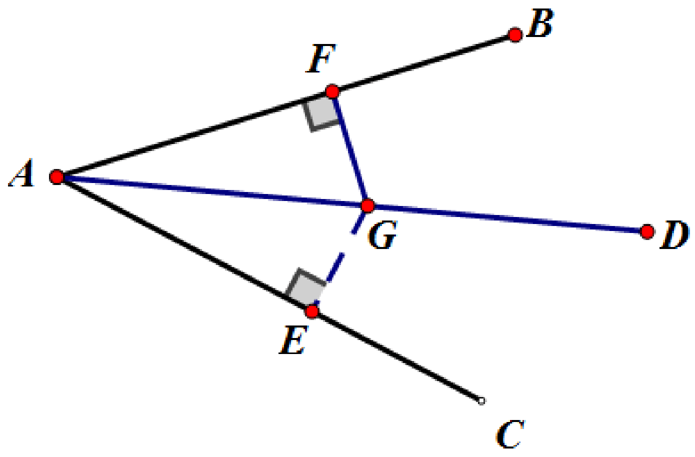
全等的相关模型总结

一、角平分线模型应用

1.角平分性质模型：

辅助线：过点 G 作 GE$\perp$射线 AC



（1）.例题应用：

①如图 1，在ΔABC中，$\angle C=90^0$，AD平分$\angle CAB, BC=6cm, BD=4cm$, 那么点 D 到直线 AB 的距离是__________cm.

②如图 2，已知，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求证：AP平分$\angle BAC$.

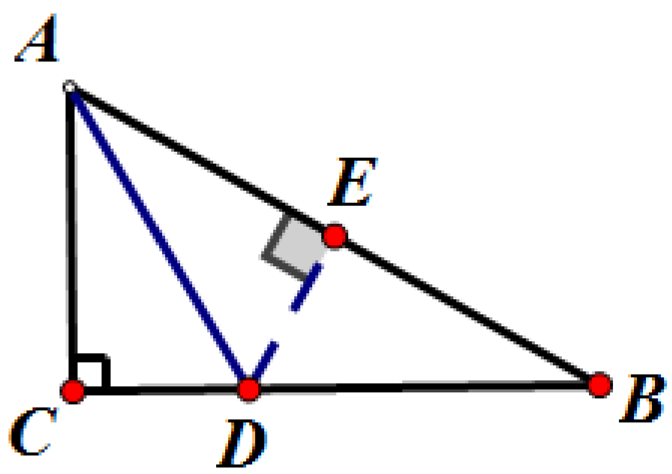


图 1

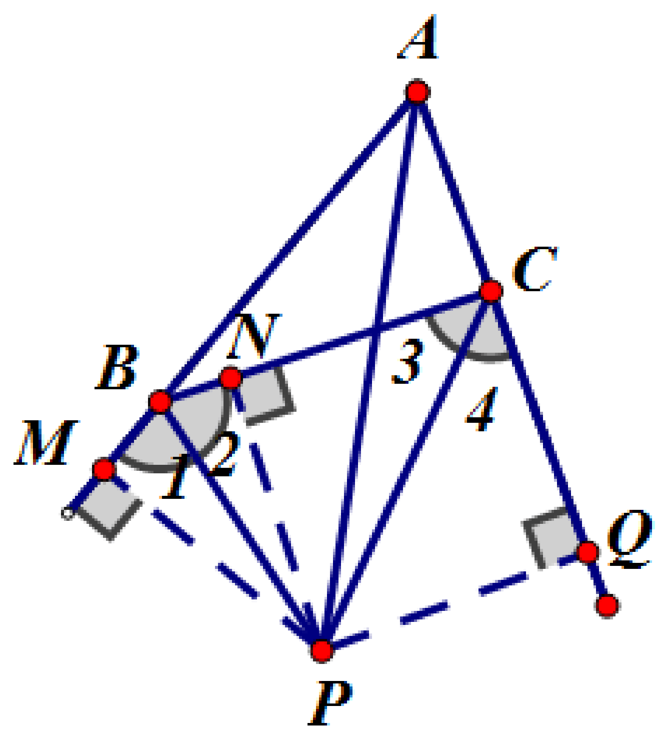


图 2

①2 （提示：作 DE$\perp$AB 交 AB 于点 E）

②$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore PM=PN$，$\because \angle 3=\angle 4$，$\therefore PN=PQ$，$\therefore PM=PQ, \therefore PA$平分$\angle BAC$.

(2).模型巩固：

练习一：如图 3，在四边形 ABCD 中，BC>AB，AD=CD，BD 平分$\angle BAC$.

.求证： $\angle A + \angle C = 180°$

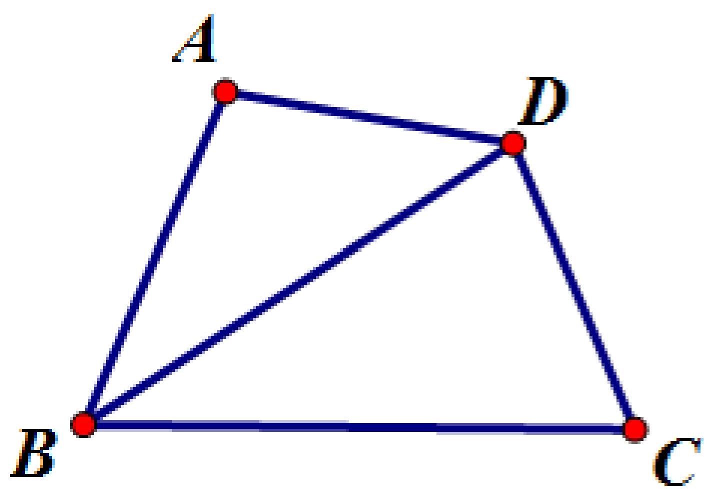


图 3

练习二：已知如图 4，四边形 ABCD 中，

$\angle B + \angle D = 180^0$，$BC = CD$.求证：$AC$平分$\angle BAD$.

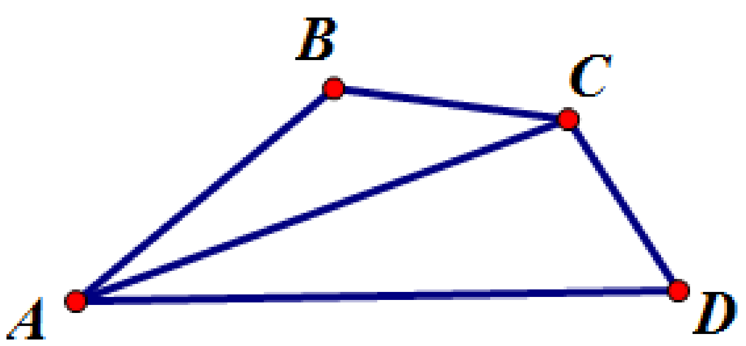


图 4

练习三：如图 5，$Rt\Delta ABC$中，$\angle ACB = 90^0$，$CD \perp AB$，垂足为D，AF平分$\angle CAB$，交 **CD 于点 E，交 CB 于点 F.**

(1)求证：CE=CF.

(2)将图 5 中的△ADE 沿 AB 向右平移到$\Delta A'D'E'$的位置，使点 E' 落在 BC 边上，其他条件不变，如图 6 所示，是猜想：BE' 于 CF 又怎样的数量关系？请证明你的结论.

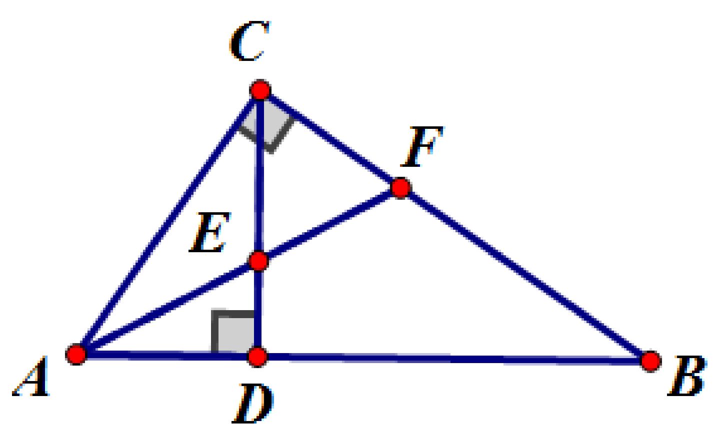


图 5

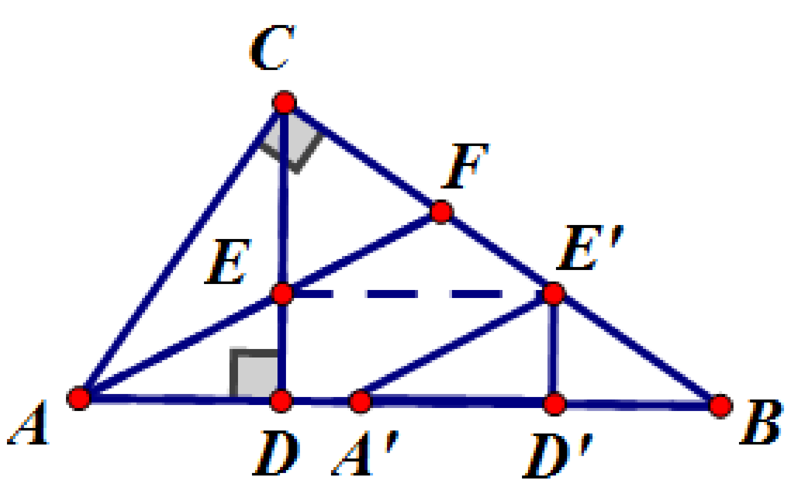


图 6

练习四：如图 7，$\angle A = 90°$，$AD \parallel BC$，P 是 AB 的中点，PD 平分∠ADC.

求证：CP 平分∠DCB.

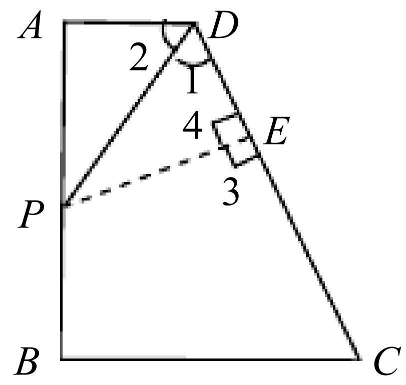


图 7

练习五：如图 8，AB＞AC，∠A 的平分线与 BC 的垂直平分线相交于D，自D 作 DE⊥AB，DF⊥AC，垂足分别为 E，F．求证：BE=CF．

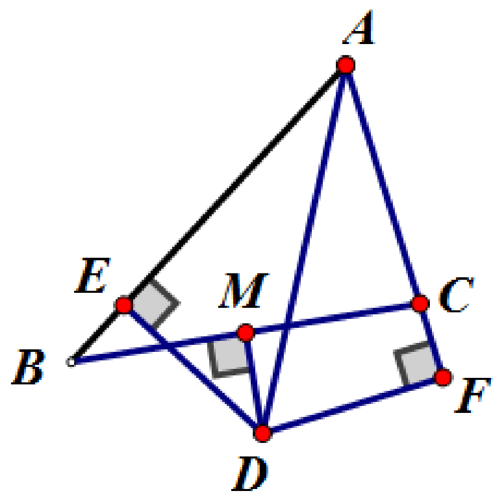


图 8

练习六：如图 9 所示，在△ABC 中，BC 边的垂直平分线 DF 交△BAC 的外角平分线 AD 于点 D，F 为垂足，DE⊥AB 于 E，并且AB>AC。求证：BE－AC=AE。

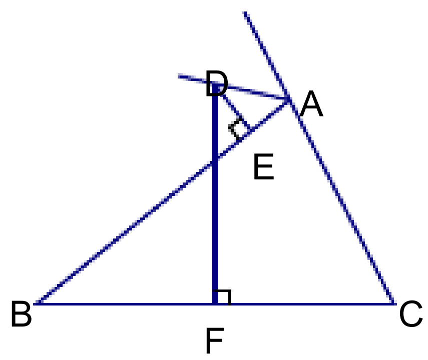
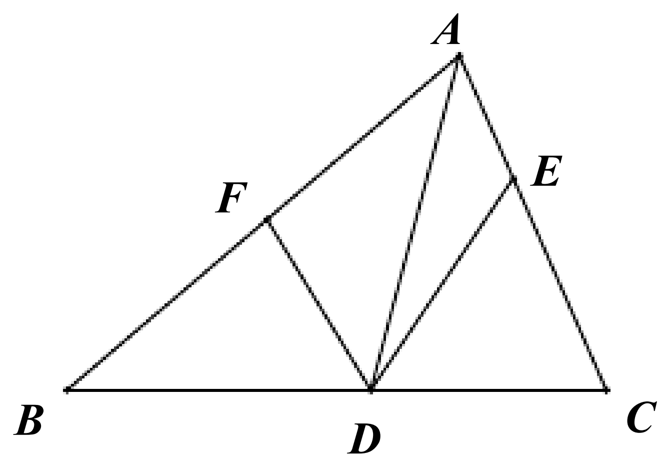
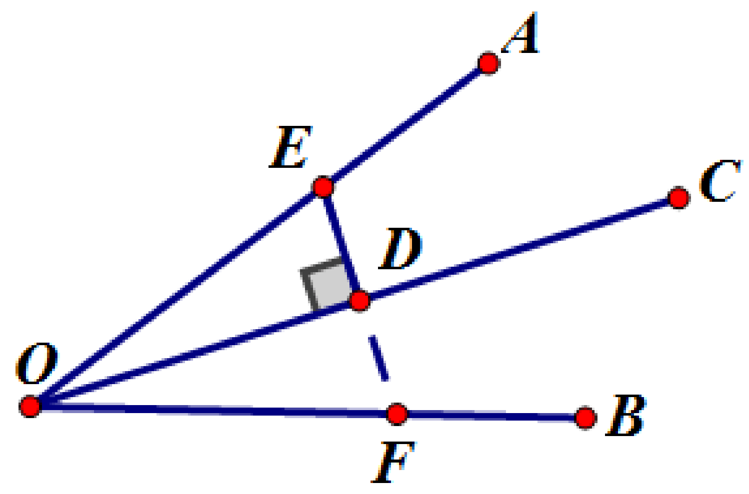


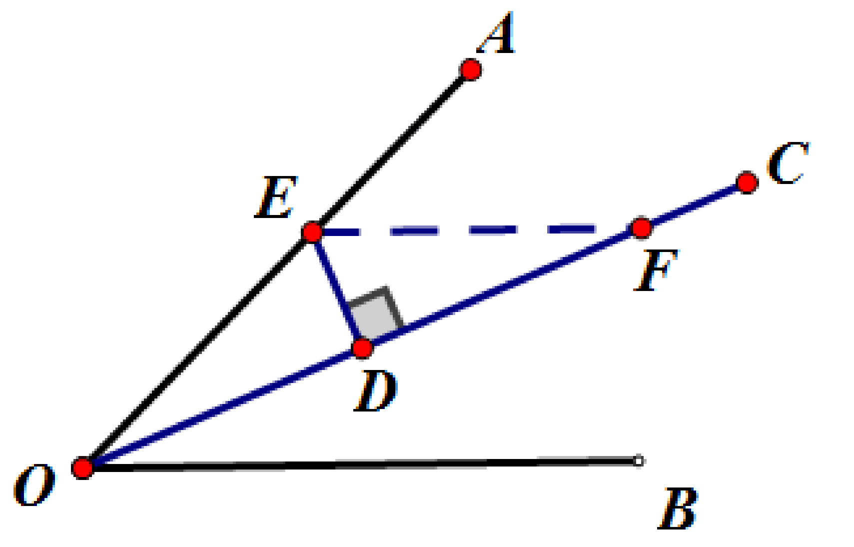
图 9

练习七： 如图 10，D、E、F 分别是△ABC 的三边上的点，CE=BF，且△DCE 的面积与△DBF 的面积相等，求证：AD 平分∠BAC。



2.角平分线+垂线，等腰三角形比呈现



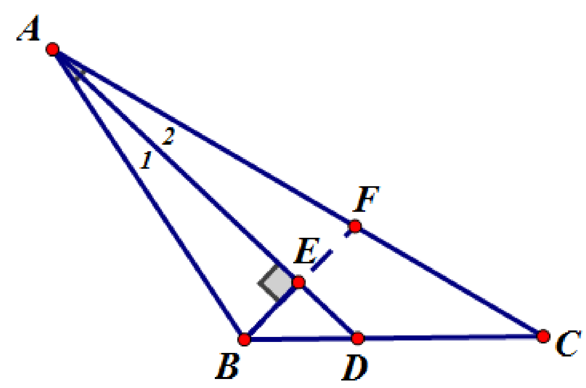


辅助线：延长 ED 交射线 OB 于 F　　　　　　　　　**辅助线：过点 E 作 EF∥射线 OB**

（1）.例题应用：

①．如图 1 所示，在△ABC 中，∠ABC=3∠C，AD 是∠BAC 的平分线，BE⊥AD 于 F。

求证： $BE=\frac{1}{2}(AC-AB)$



证明：延长BE 交 AC 于点F。

②．已知：如图 2，在ΔABC中，$\angle BAC$的角平分线AD交BC于D, 且$AB=AD$,

作$CM\perp AD$交AD的延长线于M.求证：$AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$

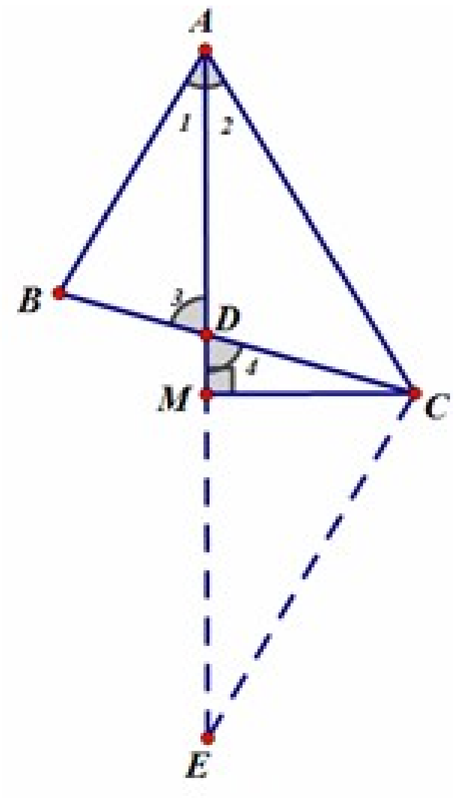


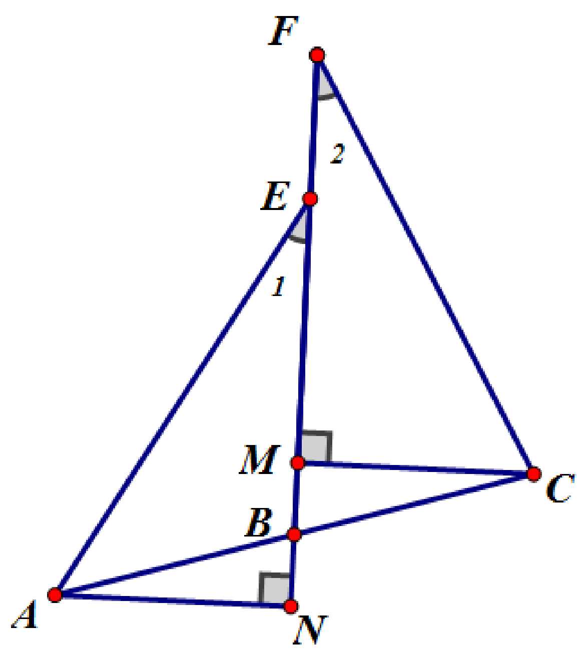
图 2

分析：此题很多同学可能想到延长线段CM，但很快发现与要证明的结论毫无关系。而此题突破口就在于 AB=AD，由此我们可以猜想过 C 点作平行线来构造等腰三角形.

证明：过点 C 作 CE∥AB 交 AM 的延长线于点 E.

例题变形:如图， $\angle 1=\angle 2$，B为AC的中点，$CM\perp FB$于M, $AN\perp FB$于N.

求证：① $EF=2BM$；　② $FB=\frac{1}{2}(FM+FN)$.



(3).模型巩固：

练习一、 如图 3，ΔABC 是等腰直角三角形，∠BAC=90°，BD 平分∠ABC 交 AC 于点 D，CE 垂直于 BD，交 BD 的延长线于点 E。求证：BD=2CE。

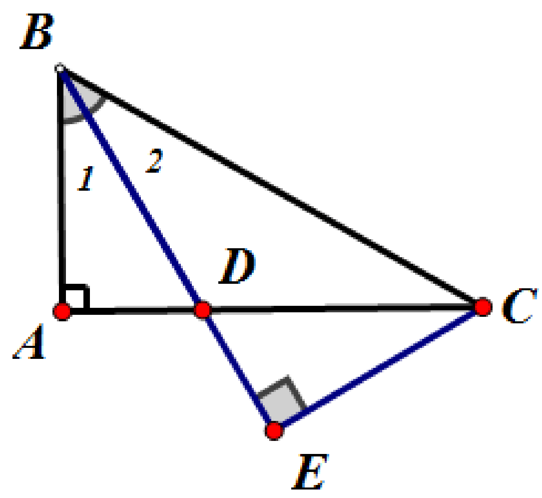


图 3

练习一变形：如图 4，在△ODC 中，$\angle D = 900, EC$是$\angle DCO$的角平分线，且$OE \perp CE$，

过点 E 作$EF \perp OC$交OC于点F.猜想：线段EF与OD之间的关系，并证明.

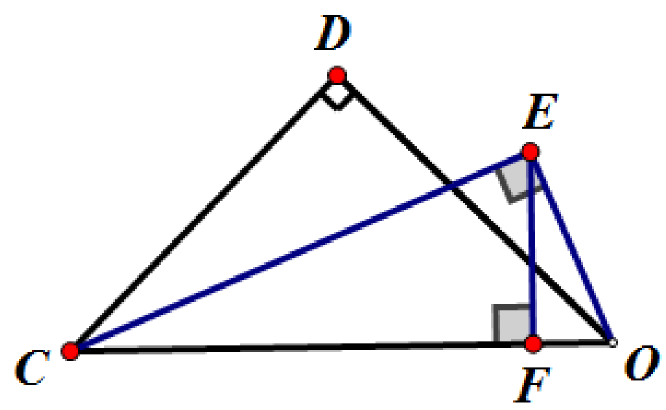


图 4

练习二、如图 5，已知△ABC 中，CE 平分∠ACB，且 AE⊥CE，∠AED＋∠CAE＝180 度，求证：DE∥BC

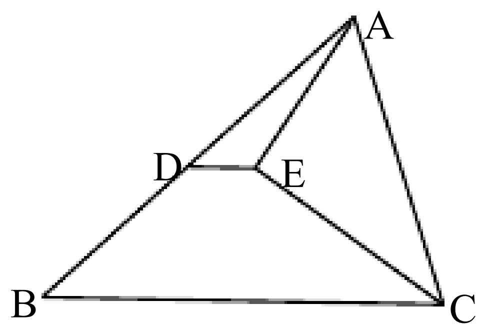


图 5

练习三、如图 6，AD⊥DC，BC⊥DC，E 是 DC 上一点，AE 平分∠DAB，BE 平分∠ABC，求证：点 E 是 DC 中点。

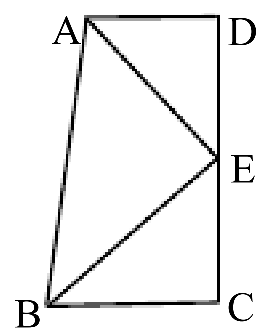


图 6

练习四、①、如图 7（a），BD、CE分别是ΔABC的外角平分线，过点A 作$AD \perp BD$、$AE \perp CE$，垂足分别是D、E，连接DE.求证：$DE \parallel BC$，$DE = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$.

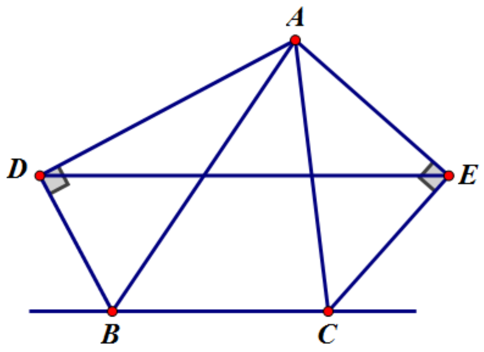


图 7（a）

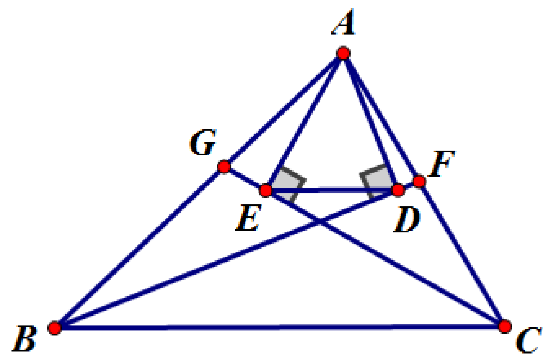


图 7（b）

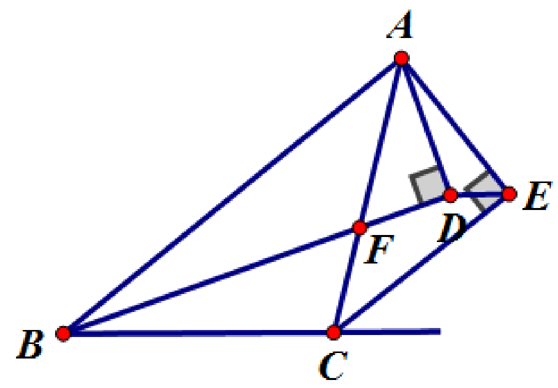


图 7（c）

②、如图 7（b），BD、CE分别是 ΔABC的内角平分线，其他条件不变

③、如图 7（c），BD为ΔABC的内角平分线，CE为ΔABC的外角平分线，其他条件不变. 则在图 7（b）、图6（c）两种情况下，DE 与 BC 还平行吗？它与ΔABC三边又有怎样的数量关系？请写出你的猜测，并证明你的结论.(提示：利用三角形中位线的知识证明线平行)

练习五、如图 8，在直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D．自C 作 $CG \perp AB$ 交 AD 于 E，交 AB 于 G．自 D 作 $DF \perp AB$ 于 F，求证：$CF \perp DE$．

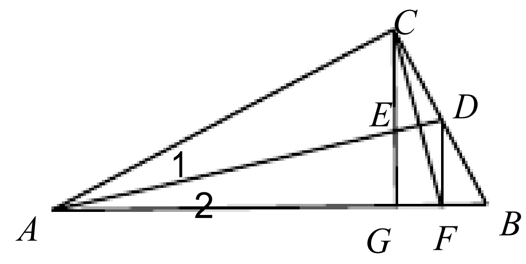


图 8

练习六、如图 9 所示，在ΔABC**中，**$AC > AB$**，**M**为**BC**的中点，**AD**是**$\angle BAC$**的平分线，若**$CF \perp AD$**且交**AD**的延长线于**F**．求证**$MF = \frac{1}{2}(AC - AB)$**．**

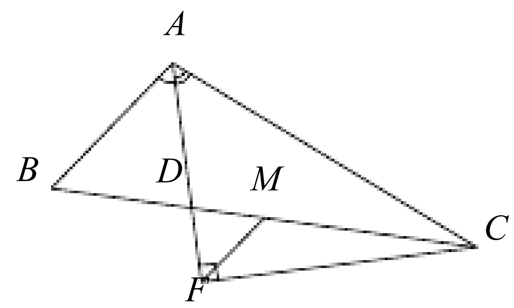


图 9

练习六变形一：如图 10 所示，AD**是**ΔABC**中**$\angle BAC$**的外角平分线，**$CD \perp AD$**于**D**，**E**是**BC**的中点，求证**$DE \parallel AB$ **且**$DE = \frac{1}{2}(AB + AC)$**．**

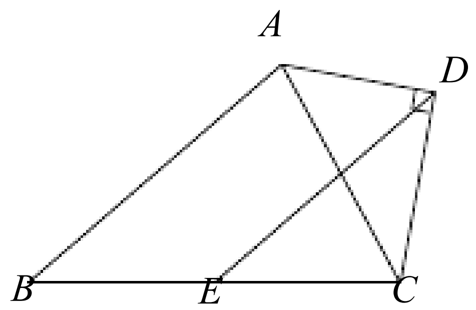


图 10

练习六变形二：如图 11 所示，在ΔABC**中，**AD**平分**$\angle BAC$**，**$AD = AB$**，**$CM \perp AD$**于**M**，求证**$AB + AC = 2AM$**．**

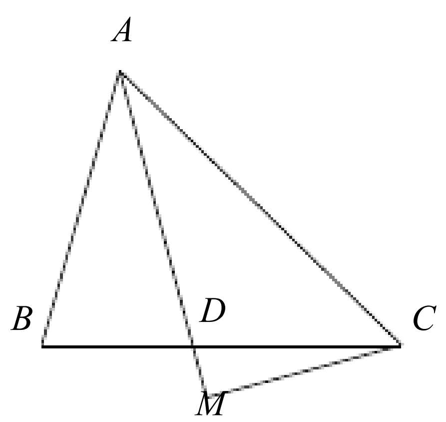


图 11

练习七、如图 12，在ΔABC**中，**$\angle B = 2\angle C$**，**$\angle BAC$**的平分线**AD**交**BC**与**D**．则有**$AB + BD = AC$**．那么如图 13，已知在**ΔABC**中，**$\angle ABC = 3\angle C$**，**$\angle 1 = \angle 2$**，**$BE \perp AE$**．求证：**$AC - AB = 2BE$**．**

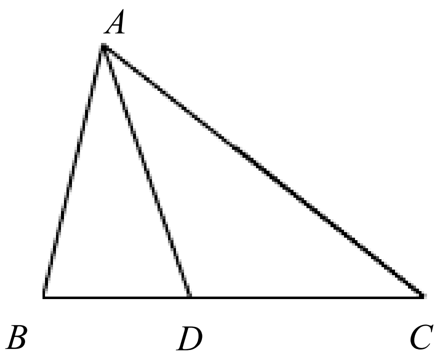


图 12

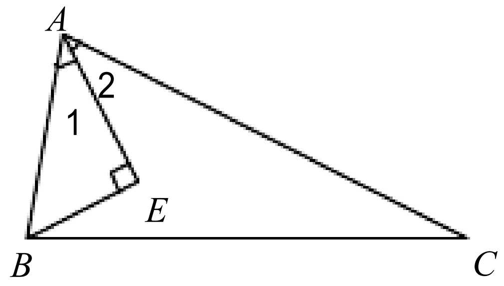
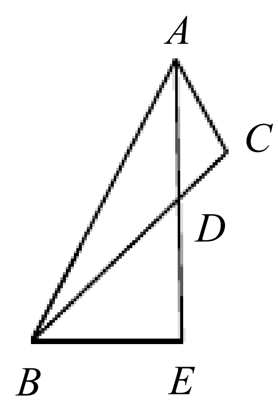


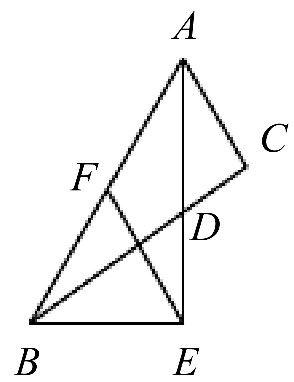
图 13

练习八、在△ABC 中，$AB=3AC$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 D，过B 作 $BE\perp AD$，E 为垂足，求证：$AD=DE$．

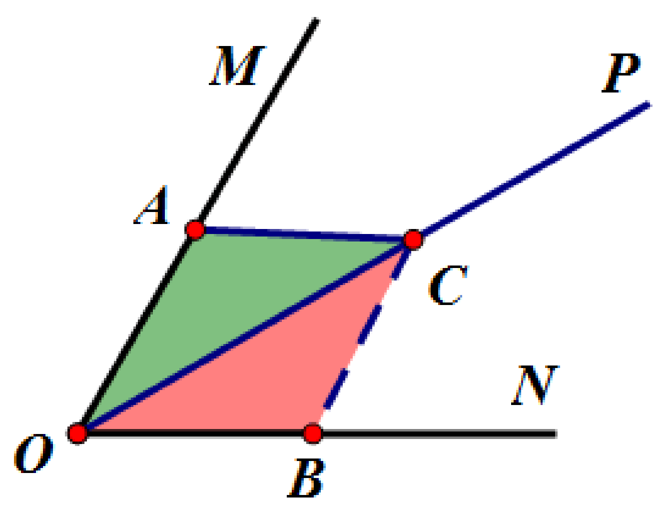


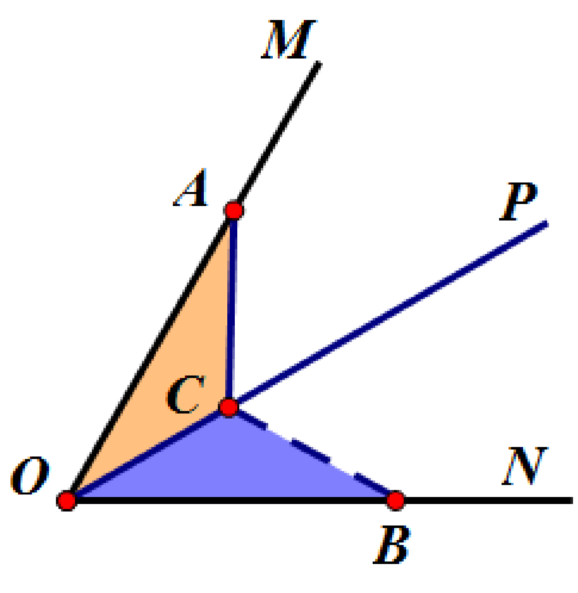
练习九、 AD 是 ΔABC 的角平分线， $BE\perp AD$ 交 AD 的延长线于 E， $EF\ /\!/\ AC$ 交 AB 于 F．

求证： $AF=FB$．



1.角分线，分两边，对称全等要记全

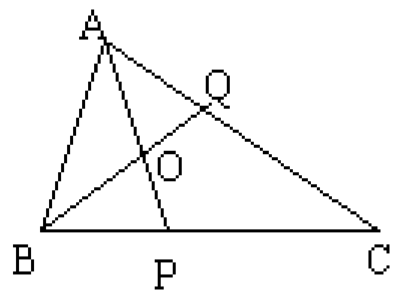




两个图形的辅助线都是在射线 **OA** 上取点 **B**，使 **OB=OA**，从而使ΔOAC ≌△**OBC.**

（1）.例题应用：

①、在△ABC 中，∠BAC=60°，∠C=40°，AP 平分∠BAC 交 BC 于 P，BQ 平分∠ABC 交 AC 于 Q，求证：AB+BP=BQ+AQ。

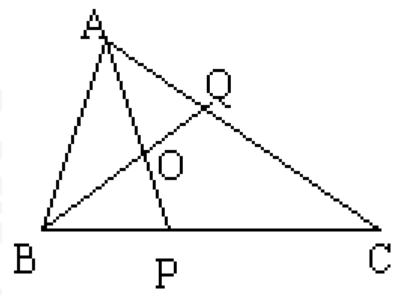


思路分析：

1）题意分析：本题考查全等三角形常见辅助线的知识：作平行线。

2）解题思路：本题要证明的是AB+BP=BQ+AQ。形势较为复杂，我们可以通过转化的思想把左式和右式分别转化为几条相等线段的和即可得证。可过O 作BC 的平行线。得△ADO≌△AQO。得到 OD=OQ，AD=AQ，只要再证出 BD=OD 就可以了。

解答过程：



图(1)

证明：如图（1），过 O 作 OD∥BC 交 AB 于 D，

∴∠ADO=∠ABC=180°－60°－40°=80°，

又∵∠AQO=∠C+∠QBC=80°，

∴∠ADO=∠AQO，

又∵∠DAO=∠QAO，OA=AO，

∴△ADO≌△AQO，

∴OD=OQ，AD=AQ，

又∵OD∥BP，

∴∠PBO=∠DOB，

又∵∠PBO=∠DBO，

∴∠DBO=∠DOB，

∴BD=OD，

又∵∠BPA=∠C+∠PAC=70°，

∠BOP=∠OBA+∠BAO=70°，

∴∠BOP=∠BPO，

∴BP=OB，

∴

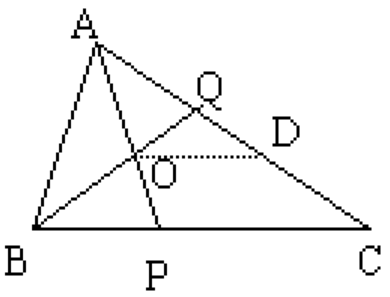
AB+BP=AD+DB+BP=AQ+OQ+BO=AQ+BQ。

解题后的思考：

（1）本题也可以在 AB 上截取 AD=AQ，连 OD，构造全等三角形，即“截长法”。

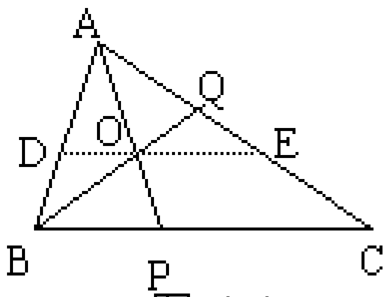
（2）本题利用“平行法”的解法也较多，举例如下：

①如图（2），过 O 作 OD∥BC 交 AC 于 D，则△ADO≌△ABO 从而得以解决。



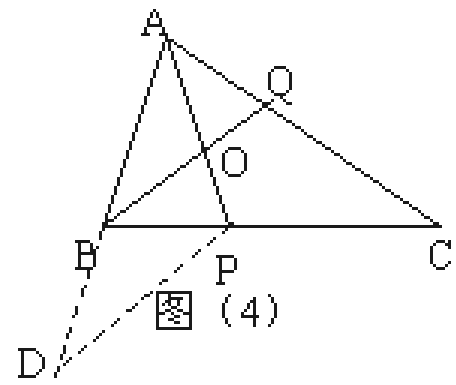
图（2）

②如图（3），过O作DE∥BC交AB于D，交AC于E，则△ADO≌△AQO，△ABO≌△AEO从而得以解决。



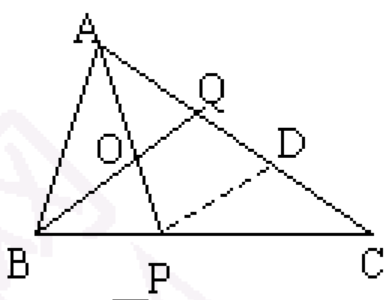
图（3）

③如图（4），过P作PD∥BQ交AB的延长线于D，则△APD≌△APC从而得以解决。



图（4）

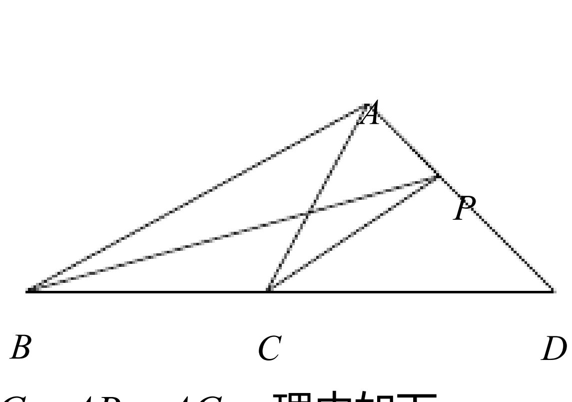
④如图（5），过 P 作 PD∥BQ 交 AC 于 D，则△ABP≌△ADP 从而得以解决。

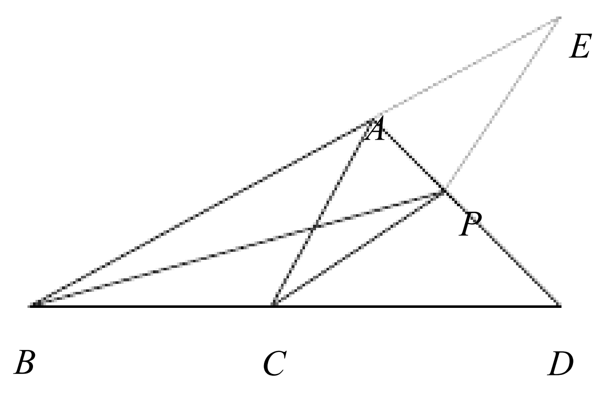


图（5）

小结: 通过一题的多种辅助线添加方法，体会添加辅助线的目的在于构造全等三角形。而不同的添加方法实际是从不同途径来实现线段的转移的，体会构造的全等三角形在转移线段中的作用。从变换的观点可以看到，不论是作平行线还是倍长中线，实质都是对三角形作了一个以中点为旋转中心的旋转变换构造了全等三角形。

②、如图所示，在ΔABC中，AD是$\angle BAC$的外角平分线，P是AD上异于点A的任意一点，试比较$PB+PC$与$AB+AC$的大小，并说明理由．





【解析】 $PB+PC>AB+AC$，**理由如下．**

如图所示，在 AB 的延长线上截取 $AE=AC$ ，连接 PE .

因为 AD 是 $\angle BAC$ 的外角平分线，

故 $\angle CAP=\angle EAP$.

在 ΔACP 和 ΔAEP 中， $AC=AE$ ， $\angle CAP=\angle EAP$ ， AP 公用，

因此 $\Delta ACP\cong\Delta AEP$ ，

从而 $PC=PE$.

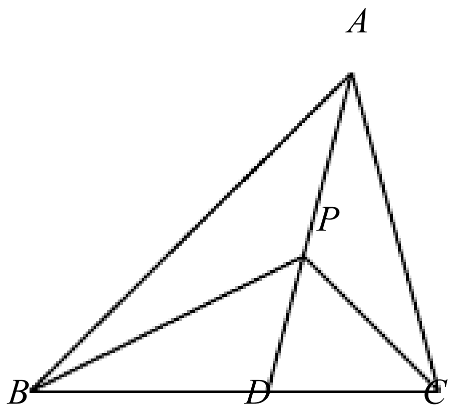
在 ΔBPE 中， $PB+PE>BE$ ，

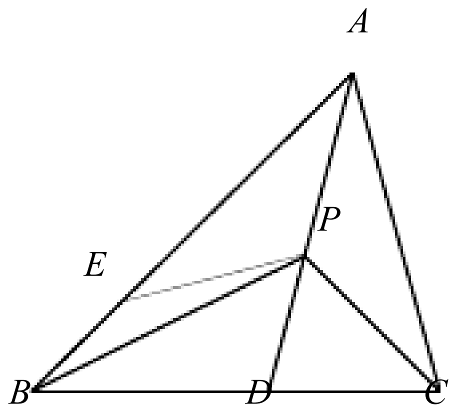
而 $BE=BA+AE=AB+AC$ ，

故 $PB+PC>AB+AC$.

变形：在 ΔABC 中， $AB>AC$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线． P 是 AD 上任意一点．

求证： $AB-AC>PB-PC$ ．



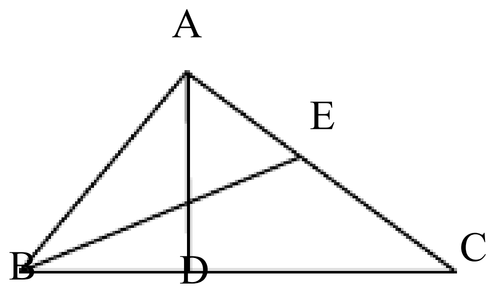


【解析】在 AB 上截取 $AE=AC$ ，连结 EP ，根据SAS 证得 $\Delta AEP\cong\Delta ACP$ ，$\therefore PE=PC$ ， $AE=AC$

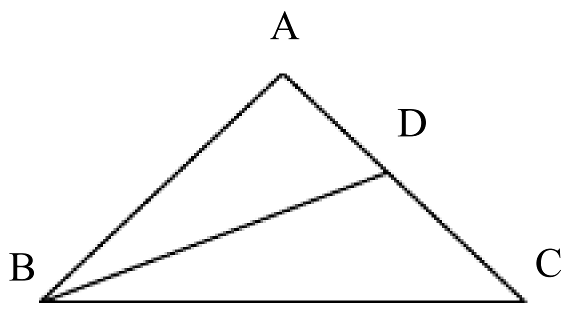
又 ΔBEP 中， $BE>PB-PE$ ， $BE=AB-AC$ ，$\therefore AB-AC>PB-PC$

（2）、模型巩固：

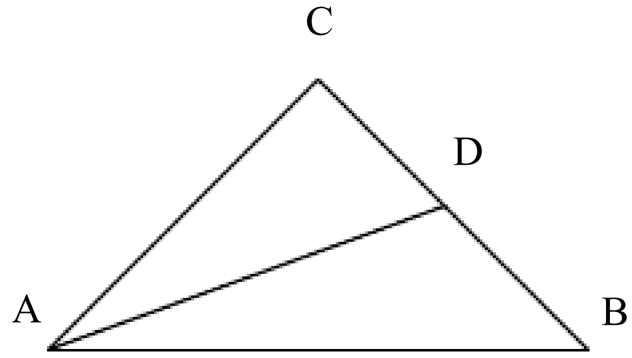
练习一、.如图，在△ABC 中，AD⊥BC 于 D，CD＝AB＋BD，∠B 的平分线交AC 于点E，求证：点E 恰好在BC 的垂直平分线上。



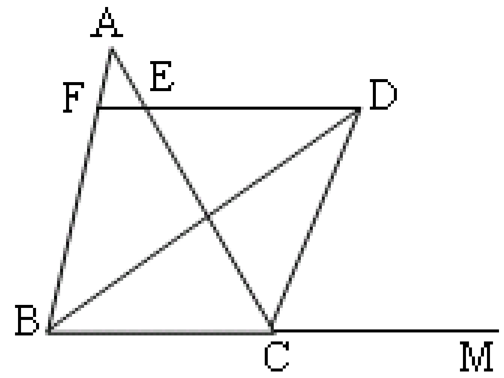
练习二、如图，已知△ABC 中，AB＝AC，∠A＝100°，∠B 的平分线交 AC 于 D，求证：AD＋BD＝BC



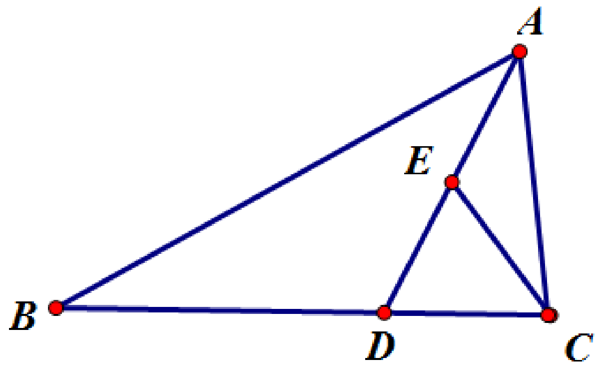
练习三、如图，已知△ABC 中，BC＝AC，∠C＝90°，∠A 的平分线交BC 于 D，求证：AC＋CD＝AB



练习四、已知：在△ ABC 中，$\angle B$ 的平分线和外角 $\angle ACM$ 的平分线相交于 $D, DF \parallel BC$，交 AC 于 E, 交AB于F，求证： $EF = BF - CE$

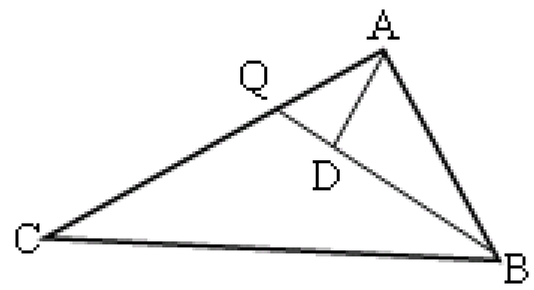


练习五、在△ ABC 中， $AB = 2AC$，AD 平分$\angle BAC$， E 是 AD 中点，连结CE ，求证： $BD = 2CE$



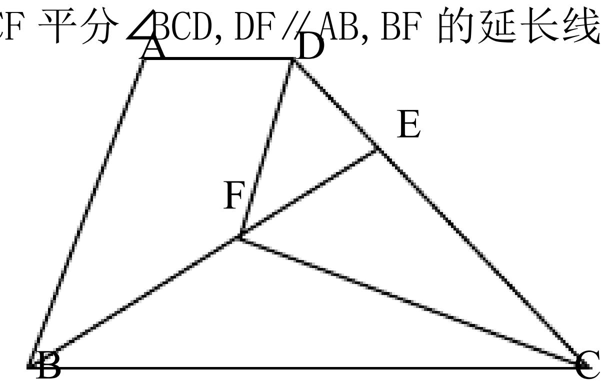
变式：已知：在△ ABC 中， $\angle B = 2\angle C, BD$ 平分$\angle ABC$， $AD \perp BQ$于D,

求证： $BD = \dfrac{1}{2}AC$

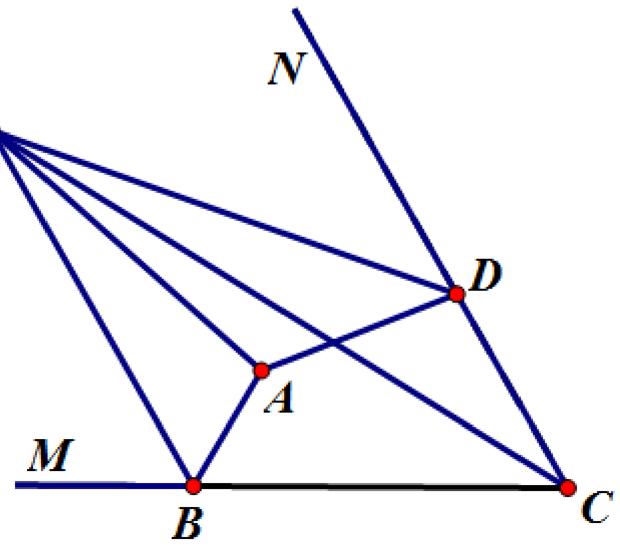


练习六、 已知：如图，在四边形ABCD 中，AD∥BC, BC=DC, CF 平分∠BCD, DF∥AB, BF 的延长线交 DC 于点 E.

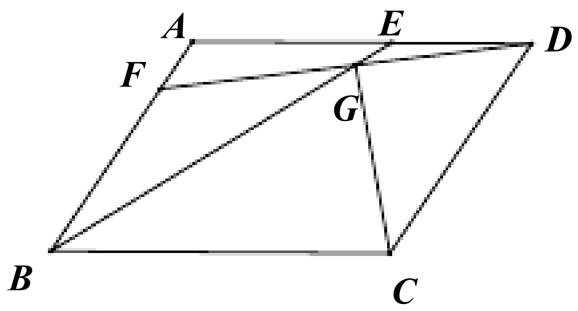
求证：（1） BF=DF； （2） AD=DE.



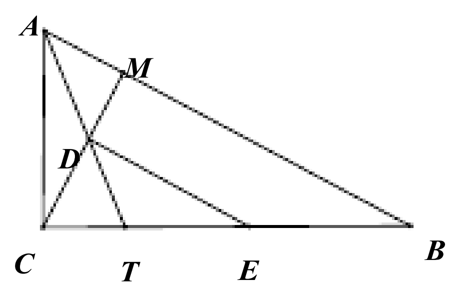
练习七、已知如图，在四边形 ABCD 中，AB+BC=CD+DA，∠ABC 的外角平分线与∠CDA 的外角平分线交于点P.求证：∠APB=∠CPD



练习八、如图，在平行四边形ABCD（两组对边分别平行的四边形）中，E，F 分别是 AD，AB 边上的点，且BE、DF 交于 G 点，BE=DF，求证：GC 是∠BGD 的平分线。



练习九、如图，在△ABC 中，∠ACB 为直角，CM⊥AB 于 M，AT 平分∠BAC 交 CM 于 D，交 BC 于 T，过 D 作 DE∥AB 交 BC 于 E，求证：CT=BE.



练习十、如图所示，已知ΔABC中，AD平分$\angle BAC$，E、F 分别在 BD 、AD 上．$DE=CD$，$EF=AC$．求证： $EF\parallel AB$