第三章

§3.7　利用导数研究函数的零点

课标要求

函数零点问题在高考中占有很重要的地位，主要涉及判断函数零点的个数或范围.高考常考查三次函数与复合函数的零点问题，以及函数零点与其他知识的交汇问题，一般作为解答题的压轴题出现.

题型一　利用函数性质研究函数的零点

例1　(2023·辽宁实验中学模拟)已知函数$f(x)=e^x\cos x$.

(1)求$f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内的极大值;

解

由题得$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$

$=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时，$f'(x)>0$，

当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，

则$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，

所以$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内的极大值为$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

(2)令函数 $h(x)=\frac{axf(x)}{\mathrm{e}^x}-1$，当 $a>\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$时，证明：$h(x)$在区间$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$内有且仅有两个零点.

证明

$h(x)=\frac{axf(x)}{e^x}-1=ax\cos x-1$，

则$h'(x)=a(\cos x-x\sin x)$，

令$\varphi(x)=\cos x-x\sin x$，

则 $\varphi'(x)=-2\sin x-x\cos x<0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\varphi(x)$在区间$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减.

又 $\varphi(0)=1>0$，$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$，

证明

故存在 $x_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，使得 $\varphi(x_0)=0$，

当$x\in(0,\ x_0)$时，$\varphi(x)>0$，

即$h'(x)>0$，$h(x)$在区间$(0,\ x_0)$上单调递增；

当 $x\in\left(x_0,\ \frac{\pi}{2}\right)$时，$\varphi(x)<0$，

即 $h'(x)<0$，$h(x)$在区间$\left(x_0,\ \frac{\pi}{2}\right)$上单调递减.

因为 $h(0)=-1<0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$，

证明

又 $a>\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$，

所以 $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}a-1>\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\times\frac{4\sqrt{2}}{\pi}-1=0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内各有一个零点，

即 $h(x)$ 在区间 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内有且仅有两个零点.

■ 思维升华

利用函数性质研究函数的零点，主要是根据函数的单调性、奇偶性、最值或极值的符号确定函数零点的个数，此类问题在求解过程中可以通过数形结合的方法确定函数存在零点的条件.

跟踪训练1　(2023·芜湖模拟)已知函数$f(x)=ax+(a-1)\ln x+\frac{1}{x}-2$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论$f(x)$的单调性；

解

函数$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=a+\frac{a-1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{(ax-1)(x+1)}{x^2}$，

若$a\leqslant 0$，则$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减；

若 $a>0$，则当 $x\in\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x\in\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$上单调递增.

(2)若$f(x)$只有一个零点，求a的取值范围.

解

若 $a\leqslant 0$，$f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\dfrac{a}{\mathrm{e}}+1-a+\mathrm{e}-2=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1\right)a+\mathrm{e}-1>0$，$f(1)=a-1<0$.

结合函数的单调性可知，$f(x)$有唯一零点.

若 $a>0$，因为函数 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递减，

在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，所以要使得函数 $f(x)$有唯一零点，

只需 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=1-(a-1)\ln a+a-2=(a-1)(1-\ln a)=0$，解得 $a=1$ 或 $a=\mathrm{e}$.

综上，$a\leqslant 0$或$a=1$或$a=\mathrm{e}$.

题型二　数形结合法研究函数的零点

例2　(2023·安庆模拟)已知函数$f(x)=a\ln x+bx^2e^{1-x}$，a，$b\in\mathbf{R}$.e=2.718 28….

(1)若曲线$y=f(x)$在点$(2，f(2))$处的切线方程是$y=x+\ln 2$，求a和b的值；

解

由题意得，$f(2)=a\ln 2+4be^{-1}$，

因为$f'(x)=\frac{a}{x}+bx(2-x)e^{1-x}$，所以$f'(2)=\frac{a}{2}$，

因为曲线$y=f(x)$在点$(2，f(2))$处的切线方程是$y=x+\ln 2$，

所以$f'(2)=1$，$f(2)=2+\ln 2$，

即$\begin{cases}\frac{a}{2}=1, \\ a\ln 2+\frac{4b}{e}=2+\ln 2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2 \\ b=\frac{(2-\ln 2)e}{4}.\end{cases}$

(2)若a＝e，讨论导函数$f'(x)$的零点个数.

解

由 $f'(x)=\frac{\mathrm{e}}{x}+bx(2-x)\mathrm{e}^{1-x}=0$，

得$\frac{\mathrm{e}^x}{x}=bx(x-2)$.显然 $x>0$，且 $x\neq2$.

因此$\frac{\mathrm{e}^x}{x^2(x-2)}=b$.

令 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^3-2x^2}$，$x>0$ 且 $x\neq2$，

则 $g'(x)=\frac{(x^2-5x+4)x\mathrm{e}^x}{(x^3-2x^2)^2}$，

解

解方程$x^2-5x+4=0$得，$x_1=4$，$x_2=1$，

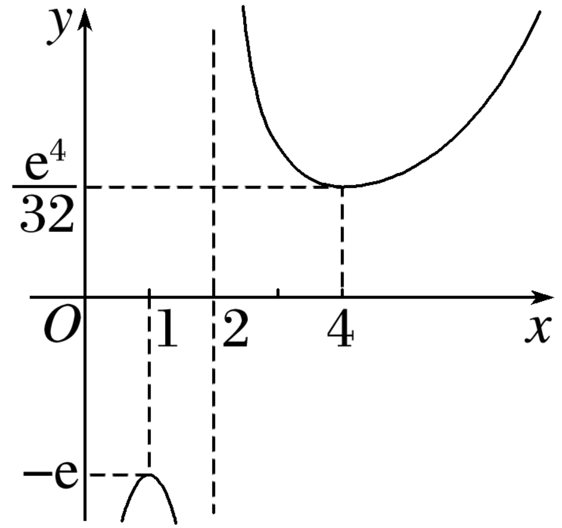
因此函数$g(x)$在$(0,1)$和$(4，+\infty)$上单调递增，在$(1,2)$和$(2,4)$上单调递减，

且极大值为 $g(1)=-e$，极小值为 $g(4)=\frac{e^4}{32}$，

当$x\to 2^+$时，$g(x)\to+\infty$，当$x\to 2^-$时，$g(x)\to-\infty$，

当$x\to 0$时，$g(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$.

$g(x)$的大致图象如图所示.

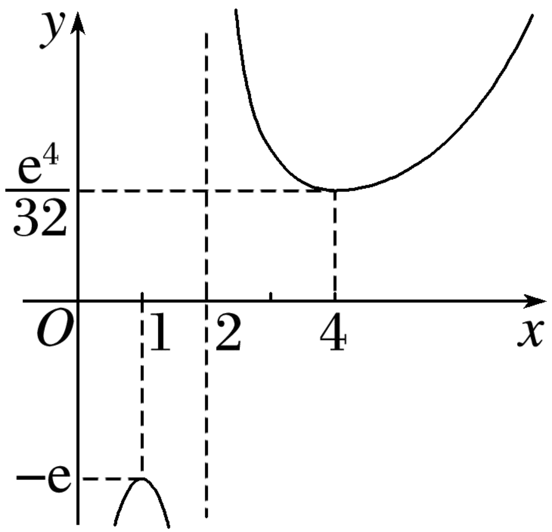


解

由图象可知，当 $b>\frac{e^4}{32}$ 或 $b<-e$ 时，直线 $y=b$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象有两个交点，

即函数 $f'(x)$ 有两个零点；

当 $b=\frac{e^4}{32}$ 或 $b=-e$ 时，直线 $y=b$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象有一个交点，即函数 $f'(x)$ 有一个零点；



当 $-e<b<\frac{e^4}{32}$ 时，直线 $y=b$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象没有交点，

即函数 $f'(x)$ 没有零点.

■ 思维升华

含参数的函数的零点个数，可转化为方程解的个数，若能分离参数，则可将参数分离出来后，用x表示参数的函数，作出该函数的图象，根据图象特征求参数的范围或判断零点个数.

跟踪训练2　(2024·厦门模拟)设函数$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-bx(a，b\in\mathbf{R})$.

(1)当$a=2$，$b=1$时，求函数$f(x)$的单调区间；

解

依题意知$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

当$a=2$，$b=1$时，$f(x)=\ln x-x^2-x$，

则$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x-1=\dfrac{-(2x-1)(x+1)}{x}$，

令$f'(x)=0$，解得$x=\dfrac{1}{2}$或$x=-1$(舍去)，

当$0<x<\dfrac{1}{2}$时，$f'(x)>0$，当$x>\dfrac{1}{2}$时，$f'(x)<0$，

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(0，\dfrac{1}{2}\right)$，单调递减区间为$\left(\dfrac{1}{2}，+\infty\right)$.

(2)当$a=0$，$b=-1$时，方程$f(x)=mx$在区间$[1，e^2]$上有唯一实数解，求实数m的取值范围.

解

当$a=0$，$b=-1$时，$f(x)=\ln x+x$，

由$f(x)=mx$得$\ln x+x=mx$，

又 $x>0$，所以 $m=1+\frac{\ln x}{x}$，

要使方程$f(x)=mx$ 在区间$[1，e^2]$上有唯一实数解，只需 $m=1+\frac{\ln x}{x}$在区间$[1，e^2]$上有唯一实数解，

令 $g(x)=1+\frac{\ln x}{x}$，$x\in[1，e^2]$，

解

则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

由$g'(x)>0$，得$1\leqslant x<\mathrm{e}$；

由$g'(x)<0$，得$\mathrm{e}<x\leqslant \mathrm{e}^2$，

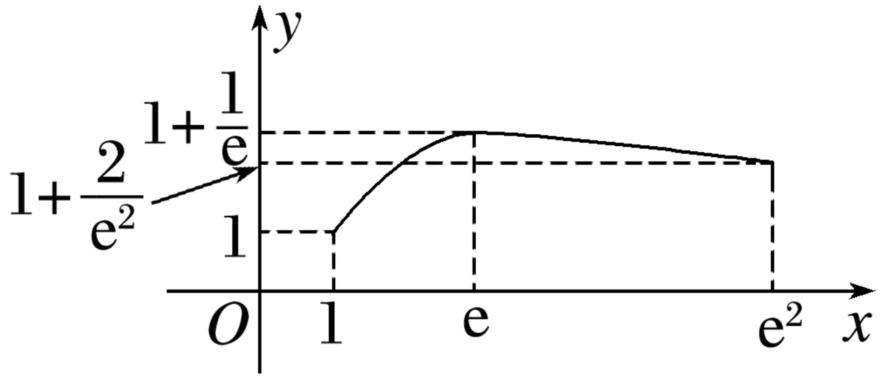
所以$g(x)$在区间$[1，\mathrm{e})$上单调递增，在区间$(\mathrm{e}，\mathrm{e}^2]$上单调递减.

又 $g(1)=1$，$g(\mathrm{e}^2)=1+\frac{\ln \mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}=1+\frac{2}{\mathrm{e}^2}$，$g(\mathrm{e})=1+\frac{1}{\mathrm{e}}$，

解

则函数 $g(x)=1+\frac{\ln x}{x}$，$x\in[1，e^2]$的大致图象如图所示.

由图象可知，



$m=1+\frac{1}{e}$或 $1\leqslant m<1+\frac{2}{e^2}$.

故 m 的取值范围为$\left\{1+\frac{1}{e}\right\}\cup\left[1，1+\frac{2}{e^2}\right)$.

例3　已知函数$f(x)=e^x+x+4\ln(2-x)$.

(1)求函数$f(x)$的图象在点$(0，f(0))$处的切线方程；

解

$f'(x)=e^x+1-\dfrac{4}{2-x}(x<2)$，

所以$f'(0)=e^0+1-\dfrac{4}{2-0}=0$，

又$f(0)=e^0+0+4\ln(2-0)=1+4\ln 2$，

所以切点坐标为$(0,1+4\ln 2)$，

所以函数$f(x)$的图象在点$(0，f(0))$处的切线方程为$y=1+4\ln 2$.

(2)判断函数$f(x)$的零点个数，并说明理由.

解

方法一　函数$f(x)$有两个零点，理由如下：

令$g(x)=f'(x)$，$x\in(-\infty,2)$，

$$g'(x)=e^x-\frac{4}{(2-x)^2}=\frac{(2-x)^2e^x-4}{(2-x)^2},$$

令$h(x)=(2-x)^2e^x-4$，$x\in(-\infty,2)$，

$h'(x)=x(x-2)e^x$，

当$x<0$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

当$0<x<2$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

解

所以$h(x)\leqslant h(0)=0$，故$g'(x)\leqslant 0$，

所以$g(x)$在$(-\infty，2)$上为减函数，

所以当$x<0$时，$g(x)>g(0)=0$，即当$x<0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递增，

当$0<x<2$时，$g(x)<g(0)=0$，即当$0<x<2$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,2)$上单调递减，

又因为$f(2-e^6)=e^{2-e^6}+2-e^6+24<0$，

解

$f(0)=e^0+0+4\ln 2>0$，

$f(2-e^{-6})=e^{2-e^{-6}}+2-e^{-6}-24<e^2-22<0$，

所以$f(x)$在区间$(2-e^6,0)$，$(0,2-e^{-6})$内各有一个零点，即函数$f(x)$有两个零点.

综上，函数$f(x)$有两个零点.

方法二　函数$f(x)$有两个零点，理由如下：

令$f(x)=e^x+x+4\ln(2-x)=0$，

可得$e^x=-x-4\ln(2-x)$，