

$y = f(x) + \frac{1}{4}$ 是奇函数. 关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{4} (k \in \mathbf{R})$ 的根为 x_1, x_2, \dots, x_m , 若

$\sum_{i=1}^m f(x_i) = -\frac{7}{4}$, 则 k 的值可以为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{7}{4}$

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若存在常数 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M|x|$ 对一切实数 x 均成立,

则称 $f(x)$ 为“倍约束函数”. 现给出下列函数: ① $f(x) = 2x$; ② $f(x) = x^2 + 1$; ③

$f(x) = \sin x + \cos x$; ④ $f(x)$ 是定义在实数集 \mathbf{R} 上的奇函数, 且对一切 x_1, x_2 均有

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|$. 其中是“倍约束函数”的有

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、多选题

9. 下列各式一定成立的是 ()

- A. $2^{-1} = \frac{1}{2}$ B. $\sqrt{a^2} = a$
 C. $\sqrt[3]{8^2} = 4$ D. $(-a)^2 \cdot (-a)^3 = a^5$

10. 已知函数 $f(x)$ 满足对于任意不同的实数 x, y , 都有 $f(x) + f(y) > \frac{xf(y) - yf(x)}{x - y}$, 则

()

- A. $f(1) > 0$
 B. $f(-1) + f(1) < 0$
 C. $(x^2 + 1)f(x^2 + 1) > xf(x)$
 D. $\frac{f(x^2 + 1)}{x^2 + 1} > \frac{f(x)}{x}$

11. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{3}{2-x} - 1$, 则下列正确的是

()

- A. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 1 - \frac{3}{2+x}$

B. $f(0) = \frac{1}{2}$

C. 不等式 $xf(x) < 0$ 的解集为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$

D. 函数 $y = |f(x)| - a$ 的图象与 x 轴有 4 个不同的交点, 则 $0 < a < \frac{1}{2}$

第 II 卷 (非选择题)

请点击修改第 II 卷的文字说明

三、填空题

12. 若 x 满足 $(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0$, 则 $x =$ _____.

13. 已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是严格增函数, 若 $f(a) \geq f(2)$, 则 a 的取值范围是_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a - |x - a|, & x \geq 0 \\ |x + a| - a, & x < 0 \end{cases}$, 其中常数 $a > 0$, 给出下列结论:

① $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数;

② 当 $a \geq 4$ 时, $f(x - a^2) \geq f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立;

③ $f(x)$ 的图象关于 $x = a$ 和 $x = -a$ 对称;

④ 若对 $\forall x_1 \in (-\infty, -2), \exists x_2 \in (-\infty, -1)$, 使得 $f(x_1)f(x_2) = 1$, 则 $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

其中正确的结论是_. (请填上你认为所有正确结论的序号)

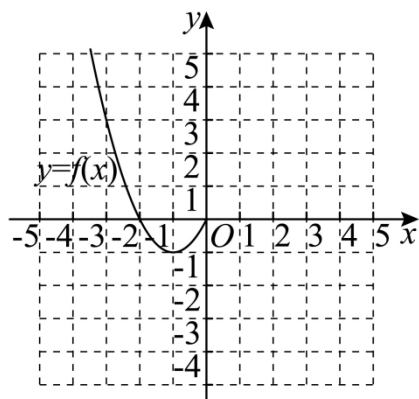
四、解答题

15. 已知集合 $A = \{x | 3 \leq x < 5\}$, $B = \{x | 4x - 3 \geq 2x + 5\}$.

(1) 求 $A \cup B$;

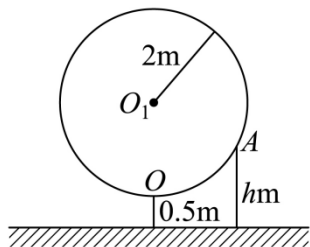
(2) 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$.

16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$.



- (1) 求出当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 的解析式;
- (2) 如图, 请补出函数 $f(x)$ 的完整图象, 根据图象直接写出函数 $f(x)$ 的单调递减区间;
- (3) 结合函数图象, 讨论函数 $f(x)$ 在 $[-3, a]$ 上的值域.

17. 如图, 某大风车的半径为 2m , 按逆时针方向匀速转动, 每 12s 旋转一周, 它的最低点 O 离地面 0.5m . 风车圆周上一点 A 从最低点 O 开始, 运动 $t\text{s}$ 后与地面的距离为 $h\text{m}$.



- (1) 求函数 $h = f(t)$ 的关系式;
- (2) 画出函数 $h = f(t)$ ($0 \leq t \leq 12$) 的大致图象.
18. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 关于 x 的一元二次不等式 $-x^2 + bx + 6 > 0$ 的解集为 $\{x | -2 < x < c\}$.

- (1) 求 b, c 的值;
- (2) 若 a 为非负实数, 解关于 x 的不等式 $ax^2 - (ac + b)x + bc < 0$.

19. 现定义了一种新运算“ \oplus ”: 对于任意实数 x, y , 都有 $x \oplus y = \log_a(a^x + a^y)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

- (1) 当 $a = 2$ 时, 计算 $4 \oplus 4$;
- (2) 证明: $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, 都有 $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
- (3) 设 $m = \log_a(x^2 - 3ax + 2a^2)$, 若 $f(x) = m \oplus m - \log_a 2$ 在区间 $[s, t]$ ($0 < s < t < a$) 上的值域为

关注公众号《品数学》

$[\log_a t, \log_a s]$, 求实数 a 的取值范围.

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	D	A	B	B	B	B	AC	AC
题号	11									
答案	ACD									

1. D

【解析】利用特称命题的否定形式，直接判断选项.

【解析】命题的否定，需要修改量词并且否定结论，

所以命题 $P: \exists x \in \mathbf{R}, x^3 > 2^x$ ，则它的否定形式 $\neg P$ 为 $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 \leq 2^x$.

故选: D.

2. D

【分析】利用任意角的三角函数的定义可求出 $\sin \theta, \cos \theta$ 的值，从而可求得答案

【解析】解：因为角 θ 的终边经过点 $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$,

所以 $\sin \theta = -\frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}$,

所以 $2 \sin \theta + \cos \theta = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{5} = -1$,

故选: D

3. D

【解析】求出选项函数值域得解.

【解析】 $y = x^2$ 的值域为 $[0, +\infty)$; $y = \sin x$ 的值域为 $[-1, 1]$; $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 的值域为 $(0, 1]$;

$y = \sqrt{1 - x^2}$ 的值域为 $[0, 1]$

故选:D

【小结】熟练掌握基本初等函数的值域求法是解题关键.

4. A

【分析】解不等式确定集合 A, B ，然后由集合运算定义计算.

【解析】 $A = \left\{ x \mid \frac{x-3}{x-6} \leq 0 \right\} = \{3 \leq x < 6\}$,

$B = \{x \mid x^2 - 3x - 10 < 0\} = \{x \mid -2 < x < 5\}$,

$\therefore A \cap B = [3, 5)$,

$$\therefore \partial_r(A \cap B) = (-\infty, 3) \cup [5, +\infty),$$

故选：A.

本题考查集合的综合运算，掌握集合运算定义是解题基础，还考查了解分式不等式 and 一元二次不等式，属于基础题.

5. B

【分析】利用基本不等式求出 $x+2y$ 的最小值，再将不等式恒成立转化为最值问题，解不等式可得结果.

【解析】因为 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2$ ，

$$\text{所以 } x+2y = \frac{1}{2}(x+2y)\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4y}{x} + \frac{x}{y} + 4\right) \geq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 4\right) = 4,$$

当且仅当 $\frac{4y}{x} = \frac{x}{y}$ ，即 $x=2, y=1$ 时等号成立，

即 $x+2y$ 的最小值为 4，

所以 $x+2y > m^2 - 3m$ 恒成立，可化为 $4 > m^2 - 3m$ ，

即 $m^2 - 3m - 4 < 0$ ，解得 $-1 < m < 4$ 。

故选：B.

6. B

【分析】根据奇函数和中心对称的性质求解即可.

【解析】因为 $y = f(x-a) + b$ 是奇函数，

$$f(-x-a) + b + f(x-a) + b = 0, \text{ 即 } f(-a-x) + f(-a+x) = -2b,$$

所以 $f(x)$ 是关于 $(-a, -b)$ 对称.

由于函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = h(x)$ 的图象关于 x 轴对称

所以 $y = h(x)$ 的中心对称点为 $(-a, b)$.

故选：B

7. B

【分析】画出 $y = f(x), y = kx - \frac{1}{4}$ 的图象，结合图象以及对称轴来求得正确答案.

【解析】当 $x > 0$ 时， $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} + \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 2 \\ 2(x-3)^2, & x > 2 \end{cases}$,

因为 $y = f(x) + \frac{1}{4}$ 是奇函数，所以 $y = f(x)$ 的图象关于 $(0, -\frac{1}{4})$ 对称，且 $f(0) = -\frac{1}{4}$ ，

由此画出 $f(x)$ 的图象如下图所示，直线 $y = kx - \frac{1}{4}$ 过点 $(0, -\frac{1}{4})$ ，

因为 $2^{-2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $2(2-3)^2 = 2$ ，

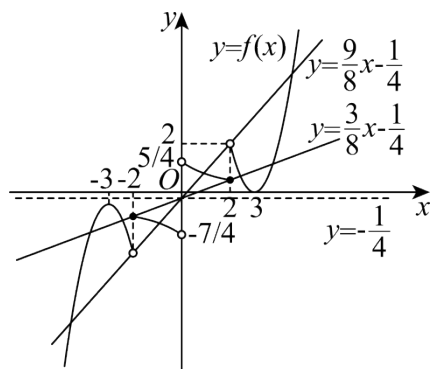
所以过点 $(0, -\frac{1}{4})$ 和点 $(2, \frac{1}{2})$ 的直线的斜率为 $\frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{4})}{2-0} = \frac{3}{8}$ ，对应直线方程为 $y = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}$ ，

过点 $(0, -\frac{1}{4})$ 和点 $(2, 2)$ 的直线的斜率为 $\frac{2 - (-\frac{1}{4})}{2-0} = \frac{9}{8}$ ，对应直线方程为 $y = \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}$ ，

由图象以及对称性可知，要使 $\sum_{m}^{i=1} f(x_i) = -\frac{7}{4}$ ，则需 $k \in [\frac{3}{8}, \frac{9}{8}]$ ，

所以 B 选项正确，ACD 选项错误。

故选：B



【小结】关键小结：

1. 利用图像对称性确定斜率范围：通过对函数图像对称性的利用，结合几何方法来确定直线的斜率范围，是解题的核心方法。

2. 计算斜率和交点：通过计算直线与函数图像的交点，分析交点的个数与斜率的关系，从而准确求解 k 的取值范围。

8. B

【分析】根据函数的新定义，一次对选项中的函数的性质进行判定，即可求解。

【解析】由题意，若存在常数 $M > 0$ ，使 $|f(x)| \leq M|x|$ 对一切实数 x 均成立，则称 $f(x)$ 为“倍约束函数”

对于①中，函数 $f(x) = 2x$ ，存在实数 $M = 3$ ，使得 $|f(x)| \leq 3|x|$ ，所以是成立的；

对于②中，函数 $f(x) = x^2 + 1$ ，因为 $\frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{x^2 + 1}{|x|} = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$ ，所以不存在满足条件的实数

M ，使得 $|f(x)| \leq M|x|$ ，所以不是“倍约束函数”；

对于③中，函数 $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ，其中 $|f(0)| > M|0|$ ，所以不是“倍约束函数”；

对于④中，函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且对一切 x_1, x_2 均有

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|$ ，所以必有 $|f(x)| \leq 2|x|$ ，所以是“倍约束函数”。

故选：B.

【小结】本题主要考查了函数的新定义，以及基本初等函数的图象与性质的应用，其中解答中熟记函数的图象与性质，结合函数的新定义，逐项判定是解答的关键，着重考查了分析问题和解决问题的能力。

9. AC

【分析】利用根式的性质、根式与指数幂的互化以及指数幂的运算逐项判断即可。

【解析】对于 A 选项， $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ，A 对；

对于 B 选项， $\sqrt{a^2} = |a|$ ，B 错；

对于 C 选项， $\sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ ，C 对；

对于 D 选项， $(-a)^2 \cdot (-a)^3 = (-a)^5$ ，D 错。

故选：AC.

10. AC

【分析】由 $f(x) + f(y) > \frac{xf(y) - yf(x)}{x - y}$ ，整理得到 $\frac{xf(x) - yf(y)}{x - y} > 0$ 。令函数

$h(x) = xf(x)$ ，得到 $h(x)$ 在 R 上单调递增，再逐项判断。

【解析】由 $f(x) + f(y) > \frac{xf(y) - yf(x)}{x - y}$ ，得 $f(x) + f(y) - \frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} > 0$ ，

则 $\frac{(x - y)[f(x) + f(y)] - [xf(y) - yf(x)]}{x - y} > 0$ ，整理得 $\frac{xf(x) - yf(y)}{x - y} > 0$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/827165133025010006>