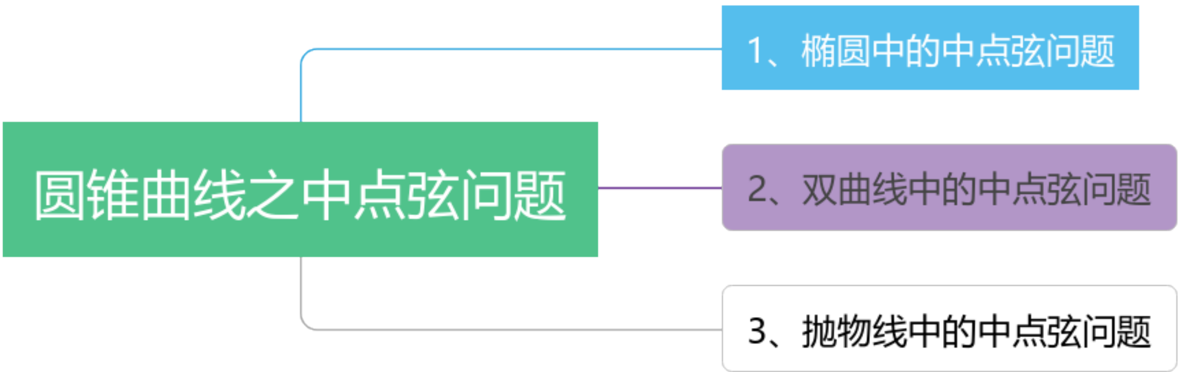
专题 06 中点弦问题

网络构建



夯基·必备基础知识梳理

1、相交弦中点（点差法）

直线与曲线相交，涉及到交线中点的题型，多数用点差法。按下面方法整理出式子，然后根据实际情况处理该式子。

主要有以下几种问题：

（1）求中点坐标；（2）求中点轨迹方程；（3）求直线方程；（4）求曲线；

中点 $M(x_0,y_0)$， $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$， $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

椭圆中的中点弦解题步骤：

第一步： 若 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上不重合的两点，则 $\begin{cases}\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1\\ \dfrac{{x_2}^2}{a^2}+\dfrac{{y_2}^2}{b^2}=1\end{cases}$，

第二步： 两式相减得 $\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，

第三步： $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 是直线 AB 的斜率 k， $(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$ 是线段 AB 的中点 (x_0,y_0)，化简可得

$\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}\Rightarrow\dfrac{y_0}{x_0}\cdot k=-\dfrac{b^2}{a^2}$，此种方法为点差法。

特别提醒：

若 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上不垂直于 x 轴的两点， P 是 AB 的中点， O 为椭圆的中心，则直线 AB 与 OP 的斜率之积为定值 $-\frac{b^2}{a^2}$

2、同理，双曲线用点差法，式子可以整理成：$1=\frac{a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)} \Rightarrow 1=k\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_0}{x_0}$

3、设直线和曲线的两个交点 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，代入抛物线方程，得 $y_1^{\ 2}=2px_1$； $y_2^{\ 2}=2px_2$；

将两式相减，可得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2)$；整理得：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}$

提升·必考题型归纳

题型【一】、椭圆中的中点弦问题

例 1、（2021·全国·高二单元测试）椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 中，以点 $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 为中点的弦所在直线的斜率为

（　　）

A. $-\frac{1}{4}$　　B. -4　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -2

【答案】C

【详解】设弦的两端点为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$，

代入椭圆得 $\begin{cases}\frac{x_1^{\ 2}}{8}+\frac{y_1^{\ 2}}{2}=1\\ \frac{x_2^{\ 2}}{8}+\frac{y_2^{\ 2}}{2}=1\end{cases}$，

两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{8}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}=0$，

即 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{8}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}$，

即 $\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$， 又 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=1$

即 $\frac{2}{4}=-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，

∴弦所在的直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$，

故选：C.

例 2、（2022·全国·高三专题练习）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交椭圆于 A,B 两点，若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，则椭圆 E 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　B．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$　　C．$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　D．$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

【答案】D

【详解】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$，

则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，

两式相减得：$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，

$\therefore k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2}{-2}=\frac{b^2}{a^2}$，

又 $k_{AB}=\frac{0+1}{3-1}=\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，

联立 $\begin{cases}c=3\\ \frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$，得 $\begin{cases}a^2=18\\ b^2=9\end{cases}$.

$\therefore$椭圆方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

故选：D.

例 3、（2022 • 广东 • 清远市博爱学校高二阶段练习）已知椭圆 M 的短轴长为 $2\sqrt{3}$，焦点坐标分别为 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$.

(1) 求椭圆 M 的标准方程.

(2) 斜率为 k 的直线与椭圆 M 交于 A、B 两点，若线段 AB 的中点为 P，O 为坐标原点，且直线 OP 的斜率 k_{OP} 存在，试判断 k 与 k_{OP} 的乘积是否为定值，若是请求出，若不是请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) $kk_{OP}=-\frac{3}{7}$.

(1)由题可设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则 $2b=2\sqrt{3},c=2$，

$\therefore b=\sqrt{3},a=\sqrt{7}$,

$\therefore$椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $\frac{x_1^{\ 2}}{7}+\frac{y_1^{\ 2}}{3}=1$，$\frac{x_2^{\ 2}}{7}+\frac{y_2^{\ 2}}{3}=1$，$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，

两式相减得 $\frac{x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}}{7}+\frac{y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{3}=0$，

$\therefore \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{3}{7}$，

而弦 AB 的中点 $P(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$，则有 $k_{OP}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，

所以 $kk_{OP}=-\frac{3}{7}$，即 k 与 kOP 的乘积为定值 $-\frac{3}{7}$.

例 4、（2023 上·河南南阳·高二统考阶段练习）已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(1)求过点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 且被 P 点平分的弦所在直线的方程；

(2)过点 $M(2,1)$ 引椭圆的割线，求截得的弦的中点的轨迹方程.

【答案】(1) $2x+4y-3=0$

(2) $\frac{(x-1)^2}{\frac{3}{2}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}=1,x\in\left[1-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{4}{3}\right)$

【分析】（1）用"点差法"求出直线的斜率，利用点斜式求出直线方程，从而可得结论；

（2）设过点 $M(2,1)$ 的直线与椭圆截得的弦的中点 $P(x,y)$，交点为 $C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，利用点差法分析求解.

【详解】（1）因为 $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2<1$，

所以 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的内部，则所求弦必然存在，

设这条弦与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 交于点 $A(x_1y_1),B(x_2y_2)$，

由中点坐标公式知 $x_1+x_2=1,y_1+y_2=1$，

把 $A(x_1y_1),B(x_2y_2)$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1\\ \frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1\end{cases}$，

作差整理得 $(x_1-x_2)+2(y_1-y_2)=0$，可得 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，

所以这条弦所在的直线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $2x+4y-3=0$.

（2）由题意可知：过点 $M(2,1)$ 引椭圆的割线的斜率存在且不为 0，

设割线方程为 $y=k(x-2)+1$，

联立方程 $\begin{cases}y=k(x-2)+1\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+4k(1-2k)x+8k^2-8k=0$，

则 $\Delta=16k^2(1-2k)^2-4(1+2k^2)(8k^2-8k)>0$，解得 $0<k<2$，

设过点 $M(2,1)$ 的直线与椭圆截得的弦的中点 $N(x,y)$，交点为 $C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，

根据椭圆性质可知 $x=0,x_1\neq x_2$，则 $x=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{2k(2k-1)}{1+2k^2}=2\left(1-\frac{k+1}{2k^2+1}\right)$，

令 $t=k+1\in(1,3)$，则 $k=t-1$，

可得 $x=2\left[1-\frac{t}{2(t-1)^2+1}\right]=2\left[1-\frac{1}{2\left(t+\frac{\frac{3}{2}}{t}\right)-4}\right]$，

因为 $f(t)=t+\frac{\frac{3}{2}}{t}$ 在 $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},3\right)$ 上单调递增，

且 $f(1)=\frac{5}{2},f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\sqrt{6},f(3)=\frac{7}{2}$，可知 $f(t)\in\left[\sqrt{6},\frac{7}{2}\right)$，

则 $2\left(t+\frac{\frac{3}{2}}{t}\right)-4\in\left[2\sqrt{6}-4,3\right)$，所以 $x=2\left[1-\frac{1}{2\left(t+\frac{\frac{3}{2}}{t}\right)-4}\right]\in\left[1-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{4}{3}\right)$，