习题

2.1 什么是线性系统 ?其最重要的特性是什么 ?下列用微分方程表示的系统中，X_o表示系统输出，X表示系统输入，哪些是线性系统?

(1) $x_o \; 2x_o x_o \; 2x_o \; 2x_i$　　(2) $x_o \; 2x_o \; 2tx_o \; 2x_i$

(3) $x_o \; 2x_o \; 2x_o \; 2x_i$　　(4) $x_o \; 2x_o x_o \; 2tx_o \; 2x_i$

解：凡是能用线性微分方程描述的系统就是线性系统。线性系统的 一个最重要特性就是它满足叠加原理。该题中（ 2）和（3）是线性系 统。

2.2 图（题 2.2）中三同分别表示了三个机械系统。求出它们各自的 微分方程，图中 x_i 表示输入位移， x_o 表示输出位移，假设输出端无 负载效应。

图（题 2.2)

解：（1）对图（a）所示系统，由牛顿定律有

$$c_1(x_i \; x_o) c_2 \; x_o \; mx_o$$

$$mx_o (c_i\ C_2) x_o \qquad CX_{i\ i}$$

(2) 对图(b) 所示系统，弓 I 入一中间变量X,并由牛顿定律有

$$(X_i\ x)k_i\ c(x\ X_o) \qquad (1)$$

$$C(x\ X_o)\ k_2\ X_o$$

消除中间变量有

$$c\ (k_i\ \ k_2)X_o \quad k_i k_2 X_o \quad ck_i X_i$$

(3) 对图(c) 所示系统，由牛顿定律有

$$C\ (X_i\ \ X_o) \quad k_i (X_i\ \ X_o) \quad k_2 X_o$$

$$c X_o \quad (k_i\ k_2) X_o\ cx_i \qquad k_i X_i$$

2.3 求出图(题 2.3)所示电系统的微分方程。

图(题 2.3)

解: (1) 对图(a) 所示系统，设 i_1 为流过 R 的电流，i 为总电流贝 y 有

$$u_o\ Ri_2$$

$$1$$

$$U_i U_o R_i i_i$$

$$U_i U_o — \frac{1}{C_1}(i ijdt$$

消除中间变量，并化简有

$$CR_u(1 \quad \frac{R}{R_2} \quad \frac{C}{C_2}R) \quad U_o \quad \frac{1}{CR_2} U_o$$

$$CR_2 U \quad (\frac{R}{R_1} \quad \frac{1}{CR_2}) U_i$$

⑵对图(b) 所示系统，设 i 为电流，则有

$$U_i \quad U_o \quad Ri \quad \frac{1}{C_i} idt$$

$$U_o \quad \frac{1}{C_2} id_t \quad Ri_2$$

消除中间变量，并化简有

$$(R_1 \; R_2) \; U_o \quad \frac{1}{C_2})U_o \; RU_2 \; TTU_i$$

2.4 求图他 2.4)所示机械系统的微分方程。图中 M为输入转矩，C_m为 圆周阻尼，J 为转动惯量。

解：设系统输入为 M (即)，输出（即），分别对圆盘和质块进行动力学分析，列写动力学方程如下：

$$M \; J \; C_m \; Rk(R \; X) \quad k(R \; X) \; mX \; cX$$

消除中间变量 x，即可得到系统动力学方程

$$mJ^{(4)} \; (mC_m \; cJ) \qquad (R^2km \; C_mc \; KJ) \; k \quad (c \; R^2 \; C_m)$$
$$mM \; cM \; KM$$

2.5 输出 y(t) 与输入 x(t) 的关系为 y(t) 二 2x(t)+0.5 $x^3(t)$ 。

(1) 求当工作点为 $x_o=0$，$x_o=1$，$x_o=2$ 时相应的稳态时输出值；

2) 在这些工作点处作小偏差线性化模型，并以对工作的偏差来定 义 x 和 y ，写出新的线性化模型。

解：(1) 将 $X_o=0$，$X_o=1$，$X_o=2$ 分别代入 $y(t)=2x(t)+0.5x^3(t)$ 中，即当工作点为 $x_o=0$，$x_o=1$，$x_o=2$ 时相应的稳态输出值分别为 $y_o=0$，$y_o=2.5$， y。8。

（2）根据非线性系统线性化的方法有，在工作点 （xoy）附近，将

2.6 已知滑阀节流口流量方程式为 CWX_v 弦 2，式中. Q 为通过

节流阀流口的流量；P 为节流阀流口的前后油压差；X_v 为节流阀的位

移量；c 为疏量系数；w为节流口面积梯度； 为油密度。试以 Q与

P 为变量（即将 Q作为 P 的函数）将节流阀流量方程线性化。

解：利用小偏差线性化的概念，将函数 Q=F（X_v，P）在预定工作

点 F（x_{vo}，p_o）处按泰勒级数展开为

$$Q \quad F(x_{vo}, P_o) \quad (\frac{\quad}{X_v})(X_{vo}, P_o) ? \; X_v \quad (\quad)(X_{vo}, \; p_o) ? P$$

消除高阶项，有

非线性函数展开成泰勒级数，并略去高阶项得

$$y_o \quad y \quad 2x_o \quad 0.5 \; x \; (2 \quad 1.5x)^2|_{x \; X_o} ? X_x$$

$$y(2 \quad 1.5X^2)|_x : X_o ?$$

若令 X X，y 有 $y \quad (2 \quad 1.5x_o) X$

当工作点为 X_o 0 时，$y \quad (2 \quad 1.5x_0) X \quad 2x$

当工作点为 X_o 1 时，$y \quad (2 \quad 1.5x_o) X \quad 3.5x$

当工作点为 X_o 2 时，$y \quad (2 \quad 1.5x_0) X \quad 8x$

$Q \quad F(x_{vo}, P_o)$ ($\overline{X_v}$)$(X_{vo},\quad P_o)$? X_v (——) (X_{vo} , P_o) ?P

Q F(X_v , P) F(X_{vo} , P_o)

F (X_{vo} , P_o) (上 v。, P o)? X v (齐 v。, P o)? P F(X vo , P。)

(上 X_v)(X_{vo}, P_o)? X v (p) (X_{vo}, P_o)? P

若令 K一（旦）1（X_{vo}, P_o），K_2（上 P （x_{vo}, P_o），
X_v

$Q\ K_1 ?\ X_v\ K_2 ?\ P$

将上式改写为增量方程的形式

$Q\ K_1 ?\ x_v\ K_2 ?\ P$

2.7 已知系统的动力学方程如下,试写出它们的传递函数

Y (s)/R(s) 。

y(t) 15y(t) 50y(t) 500 y(t) r(t) 2r(t)

5y(t) 25y(t) 0.5 r(t)

y(t) 25y(t) 0.5 r(t)

y(t) 3y(t) 6y(t) 4 y(t)dt 4r(t)

解：根据传递函数的定义，求系统的传递函数，只需将其动力学 方程两边

分别在零初始条件下进行拉式变换，然后求 Y（s）/R（s）。

（1）

$$s^3Y(s) \quad 15s^2Y(s) \quad 50sY(s)\ 500Y(s)\ s^2R(s)\ 2sR(s)$$

$$Y(s)/R(s) = \frac{s^2\ 2s}{2}$$

$$5s^2Y(s)\ 25sY(s)\ 0.5sR(s)$$

$$Y(s)/R(s) \quad \frac{0.5s}{5s^2\ 25s}$$

$$s^2Y(S)\ 25SY(s)\ 0.5R(s)$$

$$Y(S)/R(s) \quad \frac{0.5}{W}$$

$$s^2Y(s)\ 3sY(S)\ 6Y(s) \quad 4\frac{-}{s}Y(s)\ 4Y(s)$$

$$Y(s)/R(s) \quad \frac{4s}{s^{\wedge}ls4^{\wedge}}$$

2.8 如图(题 2.8)为汽车或摩托车悬浮系统简化的物理模型，试以位移 x 为输入量，位移 y 为输出量，求系统的传递函数 Y(s)/X(s) 。

HE

mi

2.9 试分析当反馈环节 H(s)=1, 前向通道传递函数 G(s) 分别为惯性环节、微分环节、积分环节时，输入、输出的闭环传递函数。

解：由于惯性环节、微分环节、积分环节的传递函数分别为

G( )
s
—，G(s) Ts ，G(s) —, 而闭环传递函数为 Ts 1 s

G(s)

GB(s)

1 G(s)?H(s) '则

(1) 当反馈环节 H(s)=1, 前向通道传递函数 G(s) 为惯性环节时，

G(s) Ts 1

GB(s)

1 G(s)?H (s) K Ts 1 K

1

Ts 1

⑵当反馈环节 H(s)=1, 前向通道传递函数 G(s) 为微分环节时，

$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)} = \frac{Ts}{1+Ts}$$

当反馈环节 H(s)=1, 前向通道传递函数 G(s) 为积分环节时，

$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)}$$

2. 10 证明图(题 2. 10)与图　　(题 2. 3(a)所示系统是相似系统

(即证明两系统的传递函数具有相同形式)

解：对题 2.4(a) 系统，可列出相应的方程。

$$U_o = R_2 \quad \frac{1}{C_2}\int i\,dt$$

$$U_i = U_o + R_i i_i$$

$u_i \; u_o - \quad (i \; i_i)dt \; (3)$

C

对以上三式分别作 Lap Ice 别换，并注意到初始条件为零，即

$I(0)\; I(0)\; 0$

$I_i(0)\;\; I_2(0)\;\; 0$

则

$P_o(s)\; R\;\; I(s)\;\; \frac{I(s)}{CT}\;\; (R_2\;\; \frac{1}{Ci}$ 严 $\quad (4)$

$<U_i(s)\; U_o(S)\;\; R_i I_i(s) \quad (5)$

$U_i(s)\; U_o(S)\;\; \frac{I(s)}{C_i s}\;\; \frac{I(s)}{C_i s} \quad (6)$

(5) $\frac{丄}{C_i s}$, 得 $\quad C_i S\;\; U_i(s)\;\; U_0(s)$

(6) $R_i\;\; R_i U_i(s)\;\; U_0(s)\;\; \frac{'}{C_i s}\;\; \frac{、}{C_i s} \quad (8)$

(8)，$\left(\frac{1}{C_i s} R_i\right) U_i(s)\;\; U_0(s)\;\; \frac{R_i I(s)}{C_i s}$

$U_i(s)\; U_o(s)$ 豆 $\frac{}{C_i s}\;\; \frac{C_i s \;「\;，-、\; R_i}{1\; R_i C_i S \qquad 1\; R_i C_i}\; I(s)$

$U_i(s)\; U_o(s)\;\; \frac{R_i}{1\; R_i C_i}\; I(s) \quad (9)$

将(4)式中的 $U_o(s)$ 代入(9)式

$(R$ $_2$ rl id 1 (5)

1 R_i

$(R$ $_2CS$ 诗” (5)

再用(4)式与上式相比以消去 $I(_s)$，即得电系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{(R_2 + \frac{1}{C_2 S})I(s)}{(R_2 + \frac{1}{\quad} R_i)I(s)}$$

$_2S\ (1\ R\ _iC_is)$

$$R_2 \frac{R_2 \frac{1}{C_2S}}{\frac{1}{C_2S\ (1} \quad \frac{R}{R_1C_1S)}}$$

而本题中，引入中间变量 X,依动力学知识有

$$'(X_i-X_o)k_2\ (X_i\ \ X)C_2\ (X_o\text{-}x)C_i$$

$$(X_i\ \ X_o)C_i\ k_i X$$

对上二式分别进行拉式变换有

$$k_2 X_i \quad X_o(s)\ sC_2\ X_i(s)\ \text{-}X_o(s)\ X_o(s) \quad X(s) \quad so$$

$$X(s) \quad \frac{c_i s x_o(s)}{k_i\ \ c_i s}$$

x

消除 $X(s)$ 有

k_2

$C2$ —

$\frac{X_o(s)}{}$ $k_2\ C_2S$

S

$G(s)\ X_i(s)$ s $k_i c_i$ s

$k_2\ C_2$ s $k\ C$

$k_i\ C_1S\quad C_2\quad s$

1 弧

k_1

比较两系统的传递函数有

$k_i \quad C_2 \quad R_2 C_1 R_1$

故这两个系统为相似系统。

2.11 一齿轮系如图(题 2.11)所示。图中，Z、Z、Z 和 Z 分别为各齿轮齿数；j_1、j_2、和 j_3 表示各种传动轴上的转动惯量，$_2$和 $_3$ 为各轴的角位移；M_m 是电动机输出转矩。试列写折算到电 动轴上的齿轮系的运动方程。

求图(题 2. 12)所示两系统的传递函数。

图(题 2. 12)

解：(1) 由图(a) 中系统，可得动力学方程为

$$x_i(t)\ x_o(t)\ k\ mx_o(t)\ cx_o(t)$$

作 Lap Ice 别换，得

$$X_i(s)\ X_o(s)\ k\ ms^2 X_o(s)\ csX_o(s)$$ 则有 $G(s)$

$X_o(s)/X_i(s)\ k/(ms^2\ cs\ k)$

(2) 由图(b) 中系统，设 i 为电网络的电流，可得方程为

$$u_i \quad Ri \quad L\frac{di}{dt} \quad \frac{—}{C} \quad idt$$