专题 04　椭圆

椭圆的定义

1．（2022 秋·江苏·徐州高二校考期中）若方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a+6}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，则实数$a$的取值范围（　）

A．$(3,+\infty)$　　　　B．$(-\infty,-2)$

C．$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$　　　　D．$(-6,-2)\cup(3,+\infty)$

【答案】D

【详解】由题意，方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a+6}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，所以，

解得$a>3$或$-6<a<-2$，即实数a的取值范围$(-6,-2)\cup(3,+\infty)$.

故选：D.

2．（2023 春·云南昆明·高二期中校考）已知方程$\frac{x^2}{5+2m}-\frac{y^2}{2m-1}=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆，则实数$m$的取值范围是（　）

A．$\left(-\frac{5}{2},-1\right)$　　　　B．

C．$\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$　　　　D．$\left(-\frac{5}{2},+\infty\right)$

【答案】A

【详解】解：方程$\frac{x^2}{5+2m}-\frac{y^2}{2m-1}=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆，

则$-(2m-1)>5+2m>0$，解得$-\frac{5}{2}<m<-1$，故实数m的取值范围是$\left(-\frac{5}{2},-1\right)$.

故选：A.

3．（2022 秋·江苏淮安·高二校联考期中）若动点$P(x,y)$满足方程

$\sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=4\sqrt{2}$，则动点$P$的轨迹方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　　　B．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{y^2}{8}+\frac{x^2}{4}=1$　　　　D．$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

【答案】C

专题 04　椭圆

椭圆的定义

1．（2022 秋·江苏·徐州高二校考期中）若方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a+6}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，则实数$a$的取值范围（　　）

A．$(3,+\infty)$　　B．$(-\infty,-2)$

C．$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$　　D．$(-6,-2)\cup(3,+\infty)$

【答案】D

【详解】由题意，方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a+6}=1$表示焦点在$x$轴上的椭圆，所以，

解得$a>3$或$-6<a<-2$，即实数a的取值范围$(-6,-2)\cup(3,+\infty)$．

故选：D.

2．（2023 春·云南昆明·高二期中校考）已知方程$\frac{x^2}{5+2m}-\frac{y^2}{2m-1}=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆，则实数$m$的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{5}{2},-1\right)$　　B．

C．$\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D．$\left(-\frac{5}{2},+\infty\right)$

【答案】A

【详解】解：方程$\frac{x^2}{5+2m}-\frac{y^2}{2m-1}=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆，

则$-(2m-1)>5+2m>0$，解得$-\frac{5}{2}<m<-1$，故实数m的取值范围是$\left(-\frac{5}{2},-1\right)$.

故选：A.

3．（2022 秋·江苏淮安·高二校联考期中）若动点$P(x,y)$满足方程

$\sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=4\sqrt{2}$，则动点$P$的轨迹方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　B．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{y^2}{8}+\frac{x^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

【答案】C

【详解】由题意得：$P\left(x,y\right)$到$A\left(0,-2\right)$与$B\left(0,2\right)$的距离之和为$4\sqrt{2}$，且$4\sqrt{2}>4$，

故动点P的轨迹方程是以$A\left(0,-2\right)$与$B\left(0,2\right)$为焦点的椭圆方程，故$2a=4\sqrt{2}$，$c=2$，

所以$a=2\sqrt{2}$，$b^2=a^2-c^2=8-4=4$，所以椭圆方程为$\frac{y^2}{8}+\frac{x^2}{4}=1$.

故选：C

4．（2022秋·江苏连云港·高二统考期中）已知动点M到两个定点$A\left(-2,0\right),B\left(2,0\right)$的距离之和为6，则动点$M$轨迹方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{9}+y^2=1$　　B．$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{5}=1$

C．$\frac{y^2}{9}+x^2=1$　　D．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

【答案】D

【详解】根据椭圆的定义知动点M轨迹为以A，B为焦点的椭圆，$2a=6$，$a=3$，$c=2$，

即动点M轨迹方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

故选：D.

5．（2022秋·辽宁沈阳·高二校联考期中）椭圆M的左、右焦点分别为$F_1\left(-3,0\right)$，$F_2\left(3,0\right)$，过点F_1的直线交椭圆M于点A，B.若$\triangle ABF_2$的周长为20，则该椭圆的标准方程为（　　）

A．　　B．　　C．$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{91}=1$　　D．$\frac{x^2}{91}+\frac{y^2}{100}=1$

【答案】B

【详解】因为$\triangle ABF_2$的周长为20，由椭圆定义可知：4a＝20，即a＝5，

又因为c＝3，所以$b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16$，

所以该椭圆的标准方程为.

故选：B.

6．（2021秋·广东深圳·高二深圳市南山区华侨城中学校考期中）已知$\vee ABC$，$B\left(-3,0\right)$，$C\left(3,0\right)$，$\vee ABC$的周长为14，则A点的轨迹方程（　　）

A．　　B．

C．　　D．

【答案】C

【详解】因为$\triangle ABC$中，$B(-3,0)$，$C(3,0)$，$\triangle ABC$的周长为14，

所以，

所以A点的轨迹是以B，C为焦点的椭圆，

且$a=4,c=3,b=\sqrt{7}$，

所以点A的轨迹方程为，

故选：C

7．（2019秋·吉林四平·高二四平市第一高级中学校考期中）若P为椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$上的任意一点，$F$是椭圆的一个焦点，则$|PF|$的最大值是（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【答案】D

【详解】$\because \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$，$\therefore a^2=9$，$b^2=5 \Rightarrow c^2=4$，

即$a=3,c=2$.

所以$|PF|$的最大值为$a+c=3+2=5$.

故选：D

8．（2023·云南曲靖·宣威市第七中学高二校考期中）已知椭圆的右焦点为F,A是椭圆上一点，点$M(0,4)$，则$\triangle AMF$的周长最大值为（　　）

A．14　　B．16　　C．18　　D．20

【答案】C

【详解】如图所示设椭圆的左焦点为F'，则$F(3,0),F'(-3,0)$

$|MF|=\sqrt{3^2+4^2}=5=|MF'|$，

则$|AF|+|AF'|=8$，

$\because |AM|-|AF'|\le|MF'|$，

$\therefore \triangle APF$的周长，当且仅当三点M，F'，A共线时取等号.

$\therefore \triangle APF$的周长最大值等于18.

故选：C.

9．（2023·高二期中校考）椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$上任一点$P$到点$Q\left(1,0\right)$的距离的最小值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　　　B．$\frac{\sqrt{15}}{2}$　　　　C．2　　　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{3}$

【答案】B

【详解】设点P的坐标为，其中$m\in[-3,3]$，

由$\frac{m^2}{9}+\frac{n^2}{5}=1$，可得，

又由$\left|PQ\right|=\sqrt{(m-1)^2+n^2}=\sqrt{(m-1)^2+5-\frac{5}{9}m^2}=\sqrt{\frac{4}{9}m^2-2m+6}=\sqrt{\frac{4}{9}\left(m-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{4}}$，

当$m=\frac{9}{4}$时，$\left|PQ\right|$取得最小值，最小值为$\left|PQ\right|_{\min}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

故选：B.

10．（2022秋·江苏徐州·高二统考期中）椭圆$\frac{x^2}{m^2+4}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$的焦点为$F_1$、$F_2$，上顶点为$\mathrm{A}$，若$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，则实数$m$的值为（　　）

A．2　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．$2\sqrt{3}$　　　　D．4

【答案】C

【详解】由$\frac{x^2}{m^2+4}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$，得$a^2=m^2+4,b^2=m^2$，则$c^2=4$，

因为椭圆$\frac{x^2}{m^2+4}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$的焦点为$F_1$、$F_2$，上顶点为$\mathrm{A}$，　$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，

所以$\triangledown F_1AF_2$为等边三角形，所以$\left|AF_1\right|=\left|F_1F_2\right|$，

所以，所以$a=2c$，

所以$a^2=4c^2$，所以$m^2+4=16$，解得$m=2\sqrt{3}$，

故选：C

11．（2022秋·山东青岛·高二统考期中）已知椭圆C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为椭圆上的一个动点，若$\angle F_1PF_2=60°$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为（　　）

A．$9\sqrt{3}$　　　　B．$3\sqrt{3}$　　　　C．$\frac{25\sqrt{3}}{3}$　　　　D．$\sqrt{3}$

【答案】B

【详解】由$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，得$a^2=25,b^2=9$，$c^2=a^2-b^2=25-9=16$，即$a=5,b=3,c=4$，

由椭圆的定义可知，，

在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理得，可得

，解得$|PF_1|\cdot|PF_2|=12$.

所以$\triangle PF_1F_2$的面积为$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

故选：B.

12．（2021秋·北京·高二北京一七一中校考期中）已知椭圆C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$M$在椭圆$C$上，当$\Delta MF_1F_2$的面积最大时，$\Delta MF_1F_2$内切圆半径为（　）

A．3　　B．2　　C．$\frac{5}{3}$　　D．$\frac{4}{3}$

【答案】D

【详解】解析：因为椭圆为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，所以$a$=5，$b$=3，$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$；

当ΔMF_1F_2的面积最大时，点M在椭圆C的短轴顶点，不妨设点M为椭圆C的上顶点，

点O为坐标原点，ΔMF_1F_2内切圆半径为r，则$|MF_1|=|MF_2|=a=5$，$|F_1F_2|=2c=8$，

$|OM|=b=3$，

$S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}(|MF_1|+|MF_2|+|F_1F_2|)\cdot r=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|OM|$，所以$r=\frac{4}{3}$，

故选:D.

椭圆的标准方程

1．（2022秋·天津·高二天津市宁河区芦台第一中学校联考期中）已知$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$是椭圆C的焦点，过F_2且垂直于x轴的直线交椭圆C于A，B两点，且$|AB|=6$，则椭圆C的方程为（　）

A．$\frac{x^2}{5}+y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$

C．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　D．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

【答案】C

【详解】由题意设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则$a^2-b^2=c^2=4$，

当$x=2$时，$y^2=b^2\left(1-\frac{4}{a^2}\right)$，则$|y|=b\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}$，

因为$|AB|=6$，所以$b\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}=3$，得$b\sqrt{\frac{a^2-4}{a^2}}=\frac{b^2}{a}=3$，所以$b^2=3a$，

所以$a^2-b^2=4$，所以$a^2-3a-4=0$，解得$a=4$或$a=-1$（舍去），

所以$b^2=12$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，

故选：C

2．（2022秋·山西太原·高二统考期中）已知椭圆C的一个焦点为$(1,0)$，且过点，则椭圆C的标准方程为（　）

A．$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

C．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　D．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

【答案】B

【详解】根据题意，椭圆的焦点在x轴上，故设其方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，显然$c=1$，$b=\sqrt{3}$，

则$a^2=b^2+c^2=4$，故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

故选：B.

3．（2022秋·北京东城·高二汇文中学校考期中）已知椭圆C的焦点为$F_1(0,-1)$，$F_2(0,1)$.过点F_1的直线与C交于A，B两点.若$\triangle ABF_2$的周长为8，则椭圆C的标准方程为（　）

A．1　　B．

C．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

【答案】C

【详解】由题设，椭圆焦点在y轴上，若所求椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$，

因为$\triangle ABF_2$的周长为8，则$4a=8$，故$a=2$，而$c=1$，则$b^2=3$，

所以椭圆方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

故选：C

椭圆的性质

1．（2021春·云南昭通·高二校考期中）若椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{m+12}=1$的离心率为$\frac{1}{2}$，则$m$的值等于（　）

A．-3　　B．$\frac{1}{4}$　　C．-3或4　　D．$\frac{1}{4}$或4

【答案】C

【详解】当$m+12>12$，即$m>0$时，焦点在y轴，可得$c=\sqrt{m+12-12}=\sqrt{m}$，

因为椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$，即$e=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+12}}=\frac{1}{2}$，解得$m=4$；

当$m+12<12$时，即$m<0$时，可得$c=\sqrt{12-12-m}=\sqrt{-m}$，

因为椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$，即$e=\frac{\sqrt{-m}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，解得$m=-3$.

故选：C.

2．（2021春·云南昭通·高二校考期中）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点，且$C$的离心率为$\frac{1}{2}$，则$C$的方程是（　）

A．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$

C．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　　D．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

【答案】A

【详解】由题可知,，解得,

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

故选：A.

3．（2022秋·甘肃酒泉·高二敦煌中学校考期中）设椭圆C_1的离心率为$\frac{5}{13}$，焦点在x轴上且长轴长为26．若曲线C_2上的点到椭圆C_1的两个焦点的距离的差的绝对值等于8，则曲线C_2的标准方程为（　）

A．$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$　　B．$\frac{x^2}{13^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$　　C．$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$　　D．$\frac{x^2}{13^2}-\frac{y^2}{12^2}=1$

【答案】A

【详解】椭圆C_1的离心率为$e=\frac{c_1}{a_1}=\frac{5}{13}$，$2a_1=26$，$a_1=13$，故$c_1=5$，

故椭圆C_1的两个焦点为$F_1\left(-5,0\right)$，$F_2\left(5,0\right)$，

曲线C_2上的点到两个焦点的距离的差的绝对值等于 8，$8<\left|F_1F_2\right|=10$，

故曲线C_2为焦点在x轴上的双曲线，

$2a_2=8$，$a_2=4$，$c_2=c_1=5$，$b_2=\sqrt{5^2-4^2}=3$，故双曲线方程为$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$.

故选：A

4．（2022 秋·河南郑州·高二郑州外国语学校校考期中）已知圆锥曲线$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$的离心率$e$为方程$3x^2-10x+3=0$的根，则满足条件的$m$有（　　）个不同的值

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

【答案】C

【详解】由$3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)=0$，则$x=\frac{1}{3}$或$x=3$，

当$e=\frac{1}{3}$时，曲线为椭圆，

当椭圆的焦点在x轴上时,$0<m<4$，则$\frac{4-m}{4}=\frac{1}{9}$，可得$m=\frac{32}{9}$符合；

当椭圆的焦点在y轴上时，$m>4$，则$\frac{m-4}{m}=\frac{1}{9}$，可得$m=\frac{9}{2}$符合；

当$e=3$时，曲线为双曲线，则$m<0$，故$\frac{4-m}{4}=9$，可得$m=-32$符合.

综上，m有 3 个不同的值.

故选：C

5．（2020 秋·北京·高二校考期中）若椭圆$x^2+\frac{y^2}{k}=1$的离心率是$\frac{1}{2}$，则实数k的值为（　　）

A．3 或$\frac{1}{3}$　　　B．$\frac{4}{3}$或$\frac{3}{4}$

C．2 或$\frac{1}{2}$　　　D．$\frac{2}{3}$或$\frac{3}{2}$

【答案】B

【详解】当焦点在x轴上时，由$x^2+\frac{y^2}{k}=1$，得$a^2=1,b^2=k$，则$c^2=a^2-b^2=1-k$，

因为离心率是$\frac{1}{2}$，

所以，解得$k=\frac{3}{4}$，

当焦点在y轴上时，由$x^2+\frac{y^2}{k}=1$，得$a^2=k,b^2=1$，则$c^2=a^2-b^2=k-1$，

因为离心率是$\frac{1}{2}$，

所以$\frac{c^2}{a^2}=\frac{k-1}{k}=\frac{1}{4}$，解得$k=\frac{4}{3}$，

综上，$k=\frac{3}{4}$或$k=\frac{4}{3}$，

故选：B

6．（2023春·北京·高二101中学校考期中）已知A，B，C是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的三个点，直线$AB$经过原点$O$，直线$AC$经过椭圆的右焦点$F$，若$BF\perp AC$，且$|BF|=3|CF|$，则椭圆的离心率是（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{7}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{11}}{5}$

【答案】C

【详解】设椭圆左焦点为$F_1\left(-c,0\right)$，连接AF_1,BF_1,CF_1，

设$|CF|=m,(m>0)$，结合椭圆对称性得$|AF_1|=|BF|=3m$，

由椭圆定义得，则$|AC|=2a-2m$．

因为$|OF|=|OF_1|,|OA|=|OB|$，则四边形AF_1BF为平行四边形，

则$AF_1 // BF$，而$BF\perp AC$，故$AF_1\perp AC$，

则$|AF_1|^2+|AC|^2=|CF_1|^2$，即$9m^2+\left(2a-2m\right)^2=\left(2a-m\right)^2$，

整理得$m=\frac{a}{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle FAF_1$中，$|AF_1|^2+|AF|^2=|FF_1|^2$，即，

即$a^2+\left(2a-a\right)^2=\left(2c\right)^2,\therefore a^2=2c^2$，故$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：C

7．（2022秋·北京海淀·高二清华附中校考期中）已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$O$为坐标原点，若以$F_1F_2$为直径的圆与椭圆$E$在第一象限交于点$P$，且$\triangle OPF_2$是等边三角形，则椭圆$E$的离心率为（　）