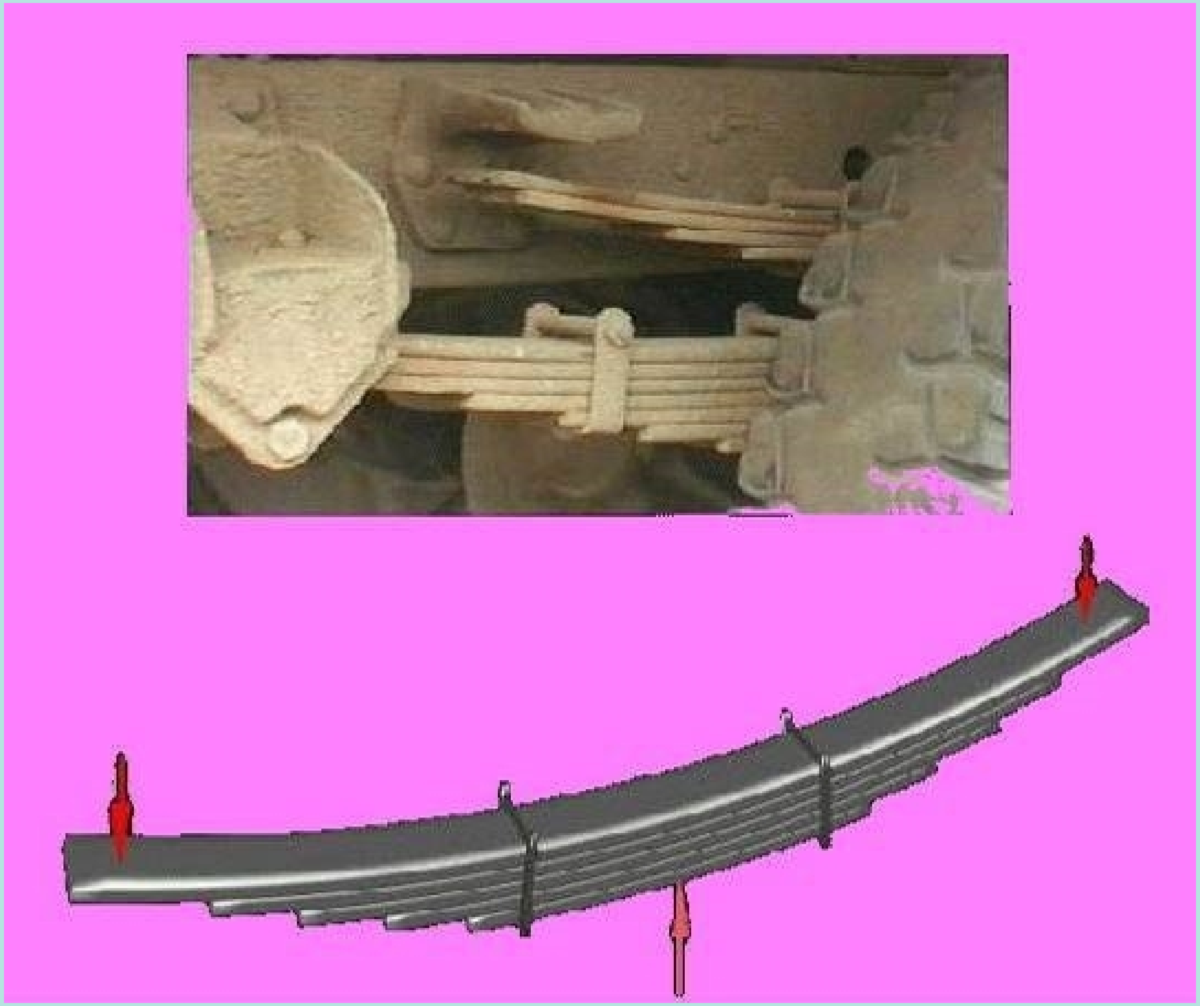
# 第十二章　弯曲变形

# § 12–1 概　述

实例1：

# 实例2：



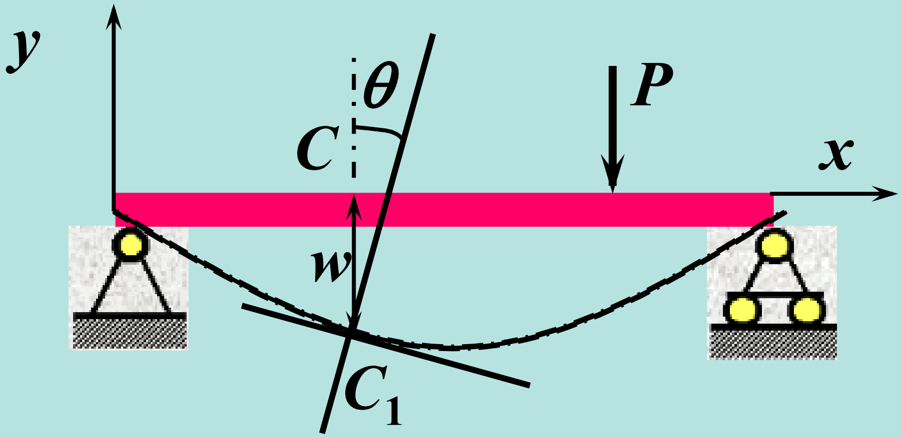
# 实例3：

# 弯曲变形

## 一、度量梁变形的两个基本位移量

1. 挠度：横截面形心沿垂直于轴线方向的线位移。用 $w$ 表示。

与 $y$ 同向为正，反之为负。




2. 转角：横截面绕其中性轴转动的角度。用 $\theta$ 表示，逆时针转动为正，反之为负。

## 二、挠曲线：变形后，轴线变为光滑曲线，该曲线称为挠曲线。

其方程为： $w=f(x)$

## 三、转角与挠曲线的关系：

小变形

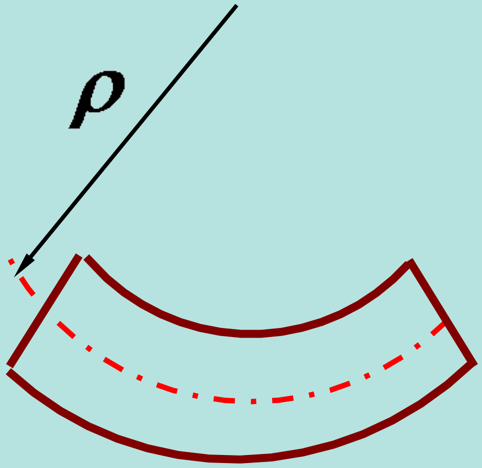
$$\mathrm{tg}\theta=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \theta=f'(x) \qquad (1)$$

## §12-2 挠曲线的近似微分方程

### 1. 挠曲线的近似微分方程

推导弯曲正应力时，得到：

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z}$$




忽略剪力对变形的影响

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI_z}$$

# 弯曲变形

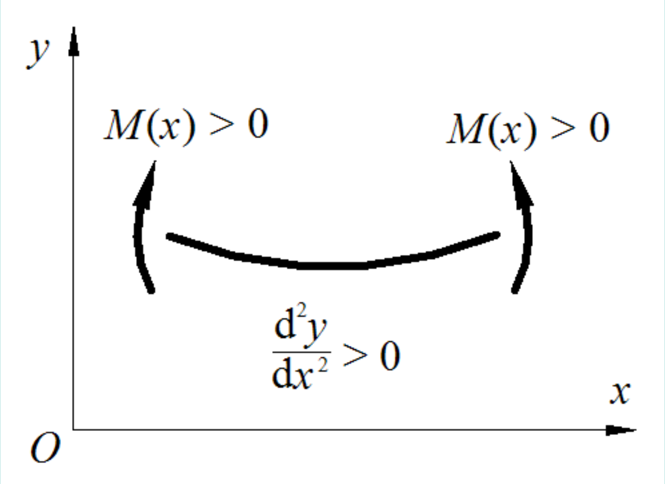
由数学知识可知(P179)：

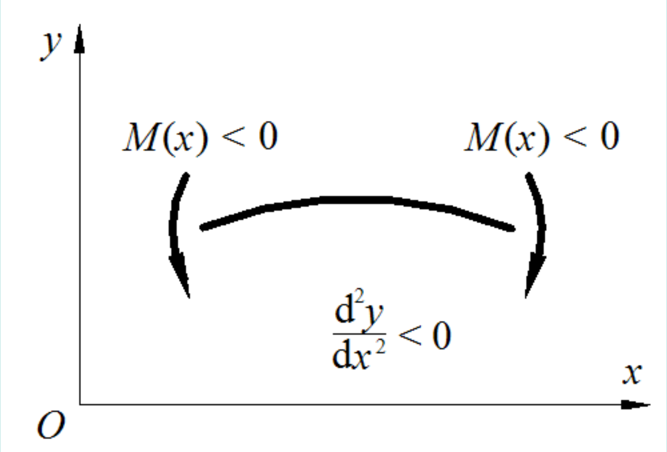
$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\sqrt{[1+(\frac{dw}{dx})^2]^3}}$$

略去高阶小量，得

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{d^2w}{dx^2}$$

所以 $$\pm\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI_z}$$



由弯矩的正负号规定可得，弯矩的符号与挠曲线的二阶导数符号一致，所以挠曲线的近似微分方程为：

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI_z}$$

由上式进行积分，就可以求出梁横截面的转角和挠度。

# §12.3 积分法求弯曲变形

挠曲线的近似微分方程为：

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI_z} \quad \Rightarrow \quad EI_z\frac{d^2w}{dx^2}=M(x)$$

积分一次得**转角方程**为：

$$EI_z\frac{dw}{dx}=EI_z\theta=\int M(x)dx+C$$

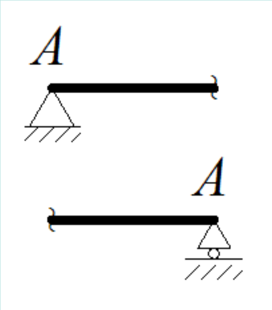
再积分一次得**挠度方程**为：

$$EI_z w=\iint M(x)dxdx+Cx+D$$

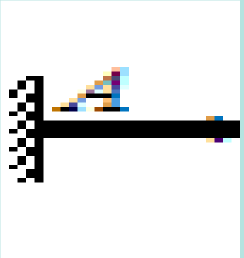
# 弯曲变形

积分常数*C*、*D* 由梁的位移边界条件和光滑连续条件确定。

## 位移边界条件



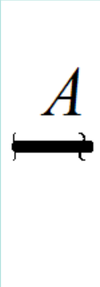

$$w_A = 0$$




$$w_A = 0$$

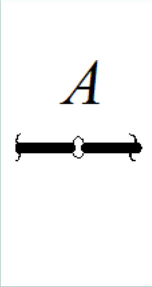
$$\theta_A = 0$$

## 光滑连续条件




$$w_{AL} = w_{AR}$$

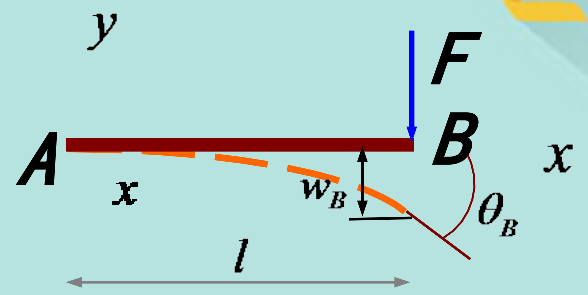
$$\theta_{AL} = \theta_{AR}$$




$$w_{AL} = w_{AR}$$


目录

**例1** 求梁的转角方程和挠度方程，并求最大转角和最大挠度，梁的$EI$已知。




**解** 1）由梁的整体平衡分析可得：

$$F_{Ax}=0,\ F_{Ay}=F(\ \ ),\ M_A=Fl(\ \ )$$

2）写出$x$截面的弯矩方程

$$M(x)=-F(l-x)=F(x-l)$$

3）列挠曲线近似微分方程并积分

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=M(x)=F(x-l)$$

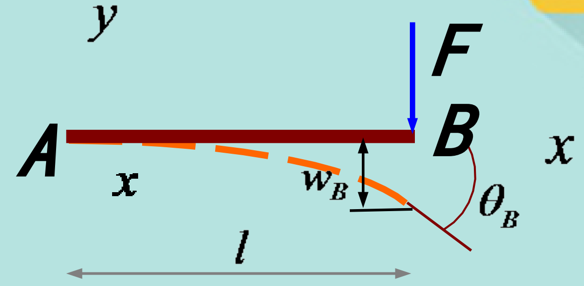
积分一次
$$EI\frac{dw}{dx}=EI\theta=\frac{1}{2}F(x-l)^2+C$$

再积分一次
$$EIw=\frac{1}{6}F(x-l)^3+Cx+D$$

4）由位移边界条件确定积分常数

$$\begin{cases} x=0, & \theta_A=0 \\ x=0, & w_A=0 \end{cases}$$

代入求解 $C=-\dfrac{1}{2}Fl^2,\quad D=\dfrac{1}{6}Fl^3$




5）确定转角方程和挠度方程

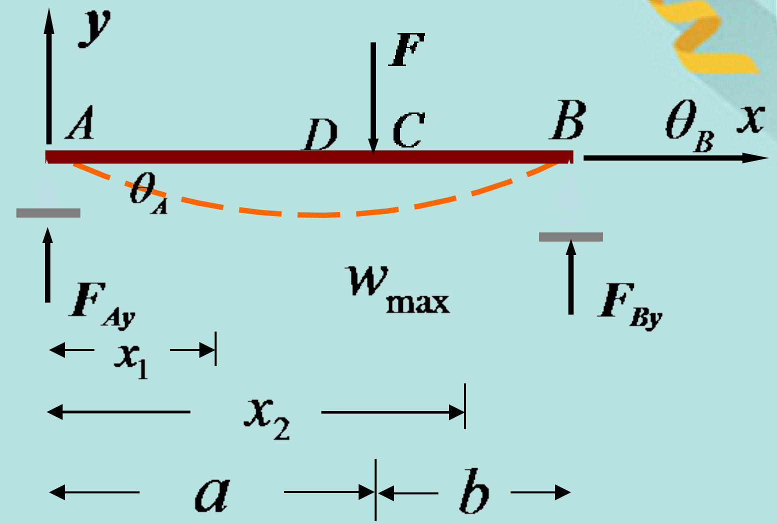
$$EI\theta=\frac{1}{2}F(x-l)^2-\frac{1}{2}Fl^2$$

$$EIw=\frac{1}{6}F(x-l)^3-\frac{1}{2}Fl^2x+\frac{1}{6}Fl^3$$

6）确定最大转角和最大挠度

$$x=l,\quad \theta_{\max}=\left|\theta_B\right|=\frac{Fl^2}{2EI},\quad w_{\max}=\left|y_B\right|=\frac{Fl^3}{3EI}$$

**例2** 求梁的转角方程和挠度方程，并求最大转角和最大挠度，梁的$EI$已知，$l=a+b$，$a>b$。




**解** 1）由梁整体平衡分析得：

$$F_{Ax}=0, F_{Ay}=\frac{Fb}{l}, F_{By}=\frac{Fa}{l}$$

2）弯矩方程

*AC* 段：

$$M(x_1)=F_{Ay}x_1=\frac{Fb}{l}x_1, 0\le x_1\le a$$

*CB* 段：

$$M(x_2)=F_{Ay}x_2-F(x_2-a)=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a), \quad a\le x_2\le l$$

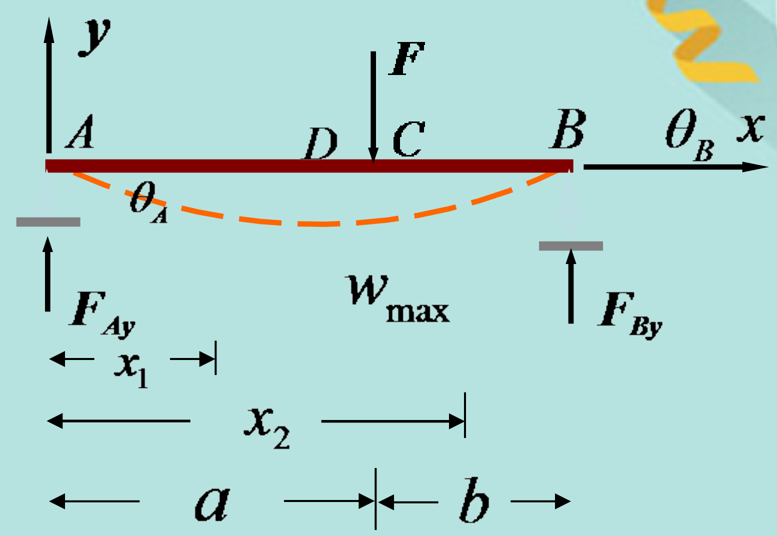
## 3）列挠曲线近似微分方程并积分

**AC 段：** $0 \le x_1 \le a$

$$EI\frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = M(x_1) = \frac{Fb}{l}x_1$$

$$EI\frac{dw_1}{dx_1} = EI\theta(x_1) = \frac{Fb}{2l}x_1^2 + C_1$$

$$EIw_1 = \frac{Fb}{6l}x_1^3 + C_1 x_1 + D_1$$




**CB 段：** $a \le x_2 \le l$

$$EI\frac{d^2 w_2}{dx_2^2} = M(x_2) = \frac{Fb}{l}x_2 - F(x_2 - a)$$

$$EI\frac{dw_2}{dx_2} = EI\theta(x_2) = \frac{Fb}{2l}x_2^2 - \frac{F}{2}(x_2 - a)^2 + C_2$$

$$EIw_2 = \frac{Fb}{6l}x_2^3 - \frac{F}{6}(x_2 - a)^3 + C_2 x_2 + D_2$$

4）由边界条件确定积分常数

位移边界条件

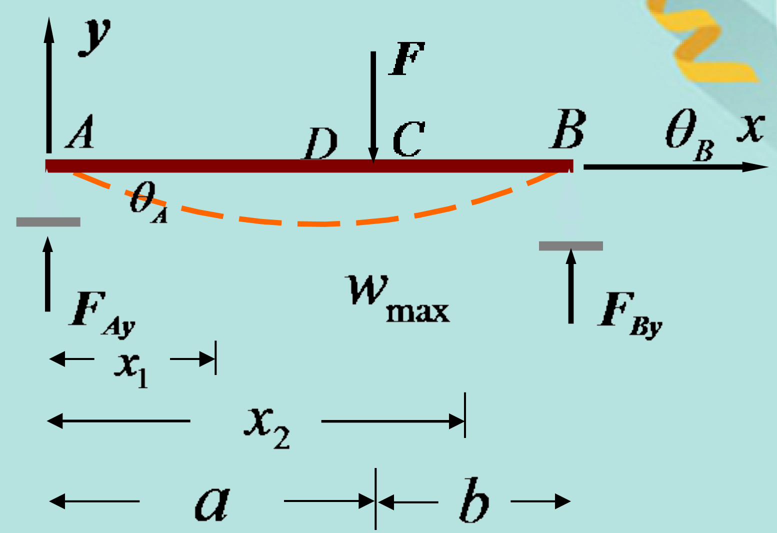
$$\begin{cases} x_1 = 0, & w_1(0) = 0 \\ x_2 = l, & w_2(l) = 0 \end{cases}$$

光滑连续条件

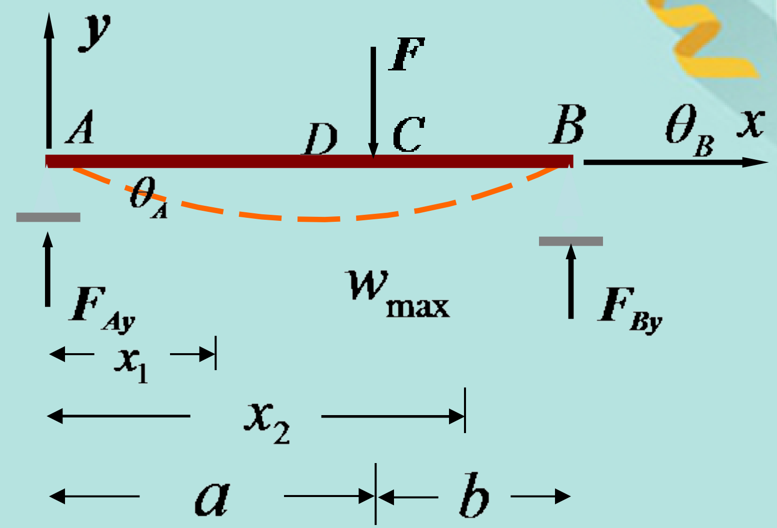
$$\begin{cases} x_1 = x_2 = a, & \theta_1(a) = \theta_2(a) \\ x_1 = x_2 = a, & w_1(a) = w_2(a) \end{cases}$$

代入求解，得

$$\begin{cases} C_1 = C_2 = -\dfrac{1}{6}Fbl + \dfrac{Fb^3}{6l} \\ D_1 = D_2 = 0 \end{cases}$$



5）确定转角方程和挠度方程




**AC 段：** $0 \le x_1 \le a$

$$EI\theta_1 = \frac{Fb}{2l}x_1^2 - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

$$EIw_1 = \frac{Fb}{6l}x_1^3 - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)x_1$$

**CB 段：** $a \le x_2 \le l$

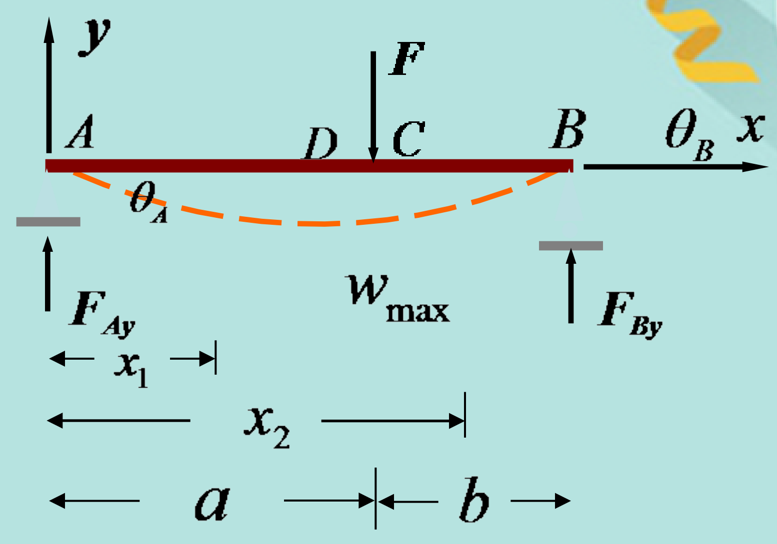
$$EI\theta_2 = \frac{Fb}{2l}x_2^2 - \frac{F}{2}(x_2 - a)^2 - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

$$EIw_2 = \frac{Fb}{6l}x_2^3 - \frac{F}{6}(x_2 - a)^3 - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)x_2$$

6）确定最大转角和最大挠度

令 $\frac{d\theta}{dx}=0$ 得，

$$x=l,\theta_{\max}=\theta_B=\frac{Fab}{6EIl}(l+a)(\circlearrowleft)$$




令 $\frac{dw}{dx}=0$ 得，

$$x=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}},\quad w_{\max}=-\frac{Fb\sqrt{(l^2-b^2)^3}}{9\sqrt{3}EIl}(\Downarrow)$$

# 讨　　论

积分法求变形有什么优缺点？

- P270作业：12-3（c）

## §12-4　叠加法求弯曲变形

**一、载荷叠加：** 多个载荷同时作用于结构而引起的变形等于每个载荷单独作用于结构而引起的变形的代数和。

前提：小变形，线弹性．使梁的挠度、转角均与载荷成线形关系。

$$\theta(P_1,P_2\cdots\cdots P_n)=\theta_1(P_1)+\theta_2(P_2)+\cdots\cdots+\theta_n(P_n)$$

$$f(P_{,1}\,P_2\cdots\cdots P_n)=f_1(P_1)+f_2(P_2)+\cdots\cdots+f_n(P_n)$$

**二、结构形式叠加（逐段刚化法）：**