专题09 分组分解法重难点专练（解析版）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．观察等式 $2+2^2=2^3-2$；$2+2^2+2^3=2^4-2$；$2+2^2+2^3+2^4=2^5-2$…已知按一定规律排列的一组数：2^{100}、2^{101}、2^{102}、…、2^{199}、2^{200}．若 $2^{100}=m$，用含 m 的式子表示这组数的和是（　　）

A．$2m^2-2m$　　B．$2m^2-2m-2$　　C．$2m^2+m$　　D．$2m^2-m$

【答案】D

【分析】

根据已知条件和 $2^{100}=m$，逆用同底数幂的乘法变形，结合所给规律即可用含 m 的式子表示这组数据的和．

【详解】

解：∵$2^{100}=m$，

∴$2^{100}+2^{101}+2^{102}+\ldots+2^{199}+2^{200}$

$=2^{100}+2^{100}\times2^1+2^{100}\times2^2+\ldots+2^{100}\times2^{99}+2^{100}\times2^{100}$

$=m+2m+2^2m+\ldots+2^{99}m+2^{100}m$

$=m(1+2+2^2+\ldots+2^{99}+2^{100})$

$=m(1+2^{100}-2+2^{100})$

$=m(2m-1)$

$=2m^2-m$．

故选：D．

【点睛】

本题考查了规律型-数字的变化类、同底数幂的乘法、因式分解的应用，解决本题的关键是观察数字的变化寻找规律．

2．多项式 $x^2-4xy-2y+x+4y^2$ 分解因式后有一个因式是 $x-2y$，另一个因式是（　　）

A．$x+2y+1$　　B．$x+2y-1$　　C．$x-2y+1$　　D．$x-2y-1$

【答案】C

【分析】

首先将原式重新分组，进而利用完全平方公式以及提取公因式法分解因式得出答案．

【详解】

解：$x^2-4xy-2y+x+4y^2$

$=(x^2-4xy+4y^2)+(x-2y)$

$=(x-2y)^2+(x-2y)$

$=(x-2y)(x-2y+1)$.

故选：C.

【点睛】

此题考察多项式的因式分解，项数多需用分组分解法，在分组后得到两项中含有公因式（x-2y），将其当成整体提出，进而得到答案.

3．若$(b-c)^2=4(1-b)(c-1)$，则$b+c$的值是（　　）

A．-1　　　B．0　　　C．1　　　D．2

【答案】D

【分析】

先将等式的右边展开并移项到左边,然后再根据完全平方公式可以分解因式，即可得到$b+c$的值.

【详解】

解：∵$(b-c)^2=4(1-b)(c-1)$，

∴$b^2-2bc+c^2=4c-4-4bc+4b$，

∴$(b^2+2bc+c^2)-4(b+c)+4=0$，

∴$(b+c)^2-4(b+c)+4=0$，

∴$(b+c-2)^2=0$，

∴$b+c=2$，

故选：D.

【点睛】

本题考查因式分解的应用，掌握运用完全平方公式进行因式分解是解答本题的关键.

二、填空题

4．二次三项式$-4y^2+8xy-x^2$在实数范围内分解因式的结果是______.

【答案】$-(2y-2x+\sqrt{3}x)(2y-2x-\sqrt{3}x)$

【分析】

先提出负号$-\left(4y^2-8xy+x^2\right)$，把括号内多项式分两组$4y^2-8xy$两项一组，$x^2$单独一组，把两项一组配方$4y^2-8xy+4x^2-4x^2=4(y-x)^2-4x^2$，把$-4x^2$与$x^2$合并得$-3x^2$，括号内变为

$-\left[4\left(y^2-2xy+x^2\right)-4x^2+x^2\right]=-\left[4\left(y-x\right)^2-3x^2\right]$，再因式分解即可．

【详解】

$-4y^2+8xy-x^2$，

$=-\left(4y^2-8xy+x^2\right)$，

$=-\left[4\left(y^2-2xy+x^2-x^2\right)+x^2\right]$，

$=-\left[4\left(y-x\right)^2-3x^2\right]$，

$=-\left[2\left(y-x\right)+\sqrt{3}x\right]\left[2\left(y-x\right)-\sqrt{3}x\right]$

$=-\left(2y-2x+\sqrt{3}x\right)\left(2y-2x-\sqrt{3}x\right)$．

故答案为：$-\left(2y-2x+\sqrt{3}x\right)\left(2y-2x-\sqrt{3}x\right)$

【点睛】

本题考查在实数范围内因式分解问题，掌握两数和与差完全平方公式与平方差公式，会灵活运用公式解决问题，特别是三项式因式分解，一般要考虑用两数和与差完全平方公式，而且先配方，在因式分解是解题关键．

5．分解因式：$a^2-2ab+b^2-4=$_______________．

【答案】$(a-b+2)(a-b-2)$

【分析】

首先将前三项分组进而利用完全平方公式和平方差公式分解因式得出即可．

【详解】

解：$a^2-2ab+b^2-4$

$=(a-b)^2-4$

$=(a-b+2)(a-b-2)$

故答案为：$(a-b+2)(a-b-2)$．

【点睛】

本题考查了分组分解法分解因式，分组分解法一般是针对四项或四项以上多项式的因式分解，分组目的是分组后能出现公因式或能应用公式．

6．方程组$\begin{cases}x^2-y^2=3\\x-y=1\end{cases}$**的解为**________．

【答案】 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

【分析】

先求出 $x+y=3$，再利用加减消元法进行求解 x,y 即可．

【详解】

解：$\begin{cases}x^2-y^2=3①\\x-y=1②\end{cases}$

由①得：$(x-y)(x+y)=3$ ③

将②代入③得：$x+y=3$ ④

②+④得：$2x=4$，则 $x=2$

将 $x=2$ 代入④得，$y=1$

所以 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

故答案为 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

【点睛】

此题考查了解二元一次方程组，利用了消元的思想，消元的方法有：代入消元法与加减消元法．

7．因式分解：$x^2-y^2+1-2x=$_______.

【答案】（$x+y-1$）（$x-y-1$）．

【分析】

当被分解的式子是四项时，应考虑运用分组分解法进行分解．本题中有 x 的二次项，x 的一次项，有常数项．所以要考虑后三项 x^2-2x+1 为一组．

【详解】

原式=（x^2-2x+1）$-y^2$=（$x-1$）$^2-y^2$=（$x+y-1$）（$x-y-1$）．

故答案为：（$x+y-1$）（$x-y-1$）．

【点睛】

本题考查了分组分解法分解因式，难点是采用两两分组还是三一分组．比如本题有 x 的二次项，x 的一次项，有常数项，所以首要考虑的就是三一分组．

8．如果$x^2+2x=3$，那么$x^4+7x^3+8x^2-13x+15=$______．

【答案】18

【分析】

运用因式分解将 $x^4+7x^3+8x^2-13x+15$ 转化为 x^2（x^2+2x）$+5X^3+8x^2-13x+15$，将 x^2+2x 做为整体代入上式，这样就降低了 x 的次数，并进一步转化为 5x（x^2+2x）$+x^2-13x+15$，再将 x^2+2x 做为整体代入 5x（x^2+2x）$+x^2-13x+15$ 式，此时原式转化为 $x^2+2x+15$，又出现 x^2+2x，再代入求解即可．

【详解】

解：∵$x^2+2x=3$

∴$x^4+7x^3+8x^2-13x+15=x^2$（x^2+2x）$+5x^3+8x^2-13x+15$

$=x^2\times3+5x^3+8x^2-13x+15$

$=5x^3+11x^2-13x+15$

$=5x$（x^2+2x）$+x^2-13x+15$

$=15x+x^2-13x+15$

$=x^2+2x+15$

=3+15

=18

故答案为 18.

.

【点睛】

本题考查因式分解．本题解决的关键是将 x^2+2x 整体逐级代入 $x^4+7x^3+8x^2-13x+15$ 变化后的式子，降低了 x 的次数，使问题最终得以解决．

9．已知(2019－a)(2017－a)＝1000，请猜想$(2019－a)^2＋(2017－a)^2$＝______

【答案】2004

【分析】

根据已知，将$(2019－a)^2＋(2017－a)^2$进行配方，配方后，将已知代入便可求解.

【详解】

解: $(2019－a)^2＋(2017－a)^2$

$=\left[(2019-a)-(2017-a)\right]^2+2(2019-a)(2017-a)$

$=2^2+2\times1000$

=2004

【点睛】

本题考查公式的灵活运用，将求得适当配方，便可找到答案了，熟悉公式的应用是解题关键.

10．若 a, b, c 满足$a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=2$, $a^3+b^3+c^3=3$**，则** $a^4+b^4+c^4=$________

【答案】$4\frac{1}{6}$

【分析】

关键整式的乘法法则运算，并整体代入变形即可.

【详解】

因为$a+b+c=1$,

所以$(a+b+c)^2=1$ ，即$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=1$

因为$a^2+b^2+c^2=2$

所以$ab+ac+bc=-\frac{1}{2}$

因为$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=2$

所以$a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)=2$

因为$a+b+c=1, a^3+b^3+c^3=3$

所以$3+ab(1-c)+bc(1-a)+ac(1-b)=2$

即$3+(ab+ba+ac)-3abc=2$

$$3-\frac{1}{2}-3abc=2$$

$$abc=\frac{1}{6}$$

因为$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)=3$

即$a^4+b^4+c^4+ab(a^2+b^2)+ac(a^2+c^2)+bc(b^2+c^2)=3$

$$a^4+b^4+c^4+ab(2-c^2)+ac(2-b^2)+bc(2-a^2)=3$$

$$a^4+b^4+c^4+2(ab+bc+ac)-abc(a+b+c)=3$$

$a^4+b^4+c^4-1-\frac{1}{6}=3$

$a^4+b^4+c^4=4\frac{1}{6}$

故答案为：$4\frac{1}{6}$

【点睛】

本题考查的是整式的乘法，熟练掌握乘法法则并会对算式进行变形是关键.

11．在实数范围内因式分解：$9x^2y^2-6xy-7=$__________.

【答案】$9\left(xy-\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\right)\left(xy-\frac{1-2\sqrt{2}}{3}\right)$

【分析】

将原多项式提取 9，然后拆项分组为$9\left(x^2y^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}-\frac{8}{9}\right)$，利用完全平方公式将前一组分解后，再利用平方差公式继续在实数范围内分解.

【详解】

解：$9x^2y^2-6xy-7$

$=9\left(x^2y^2-\frac{2}{3}xy-\frac{7}{9}\right)$

$=9\left(x^2y^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{7}{9}\right)$

$=9\left[\left(xy-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{8}{9}\right]$

$=9\left(xy-\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(xy-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=9\left(xy-\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\right)\left(xy-\frac{1-2\sqrt{2}}{3}\right)$

故答案为：$9\left(xy-\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\right)\left(xy-\frac{1-2\sqrt{2}}{3}\right)$

【点睛】

本题考查在实数范围内因式分解，利用分组分解法将原多项式“三一”分组后采用公式法因式分解，注意在实数范围内因式分解是指系数可以是根式.

12．如果关于 x 的二次三项式 x^2-4x+m 在实数范围内不能因式分解，那么 m 的值可以是_________．（填出符合条件的一个值）

【答案】5

【分析】

根据前两项，此多项式如用十字相乘方法分解，m 应是 3 或-5；若用完全平方公式分解，m 应是 4，若用提公因式法分解，m 的值应是 0，排除 3、-5、4、0 的数即可.

【详解】

当 m=5 时，原式为 x^2-4x+5，不能因式分解，

故答案为：5.

【点睛】

此题考查多项式的因式分解方法，熟记每种分解的因式的特点及所用因式分解的方法，掌握技巧才能熟练运用解题.

13．工人师傅按照“最优化处理”打包多个同一款式长方体纸盒，其“最优化处理”是指：每相邻的两个纸盒必须以完全一样的面对接，最后打包成一个表面积最小的长方体，已知长方体纸盒的长 xcm、宽 ycm、高 zcm 都为整数，且 $x>y>z>1$，$x+z=2y$，$x+y+z+xy+xz+yz+xyz=439$，若将六个此款式纸盒按“最优化处理”打包，其表面积为_____cm^2．

【答案】956

【分析】

根据 $x+y+z+xy+xz+yz+xyz=439$ 可得（$x+1$）（$y+1$）（$z+1$）$=440$，再根据题意可得（$x+1$）+（$z+1$）$=2$（$y+1$），进一步得到 $x+1=11$，$y+1=8$，$z+1=5$，解方程求得 x，y，z，再根据最优化处理时，最大的表面被重叠，依此可求表面积.

【详解】

$\because x+y+z+xy+xz+yz+xyz=439$，

$\therefore x+y+z+xy+xz+yz+xyz+1=440$，

$\therefore$（$x+1$）（$y+1$）（$z+1$）$=440$，

$\because x+z=2y$，

$\therefore$（$x+1$）+（$z+1$）$=2$（$y+1$），

$\because z+1\geq 3$，$y+1\geq 4$，$x+1\geq 5$，

其中 $5+11=2\times 8$，

$\therefore x+1=11$，$y+1=8$，$z+1=5$，

解得 $x=10$，$y=7$，$z=4$，

最优化处理时，最大的表面被重叠，

表面积为（7×10×2+4×7×12+4×10×12＝956（cm^2）．

故答案为：956．

【点睛】

本题考查因式分解的应用，解答的关键是认真分析已知，利用因式分解对方程变形，根据已知要求解决实际问题．

14．阅读下面材料：

一个含有多个字母的式子中，如果任意交换两个字母的位置，式子的值都不变，这样的式子就叫做对称式．例如：a+b+c，abc，a^2+b^2，…

含有两个字母 a，b 的对称式的基本对称式是 a+b 和 ab，像 a^2+b^2，（a+2）（b+2）等对称式都可以用 a+b，ab 表示，例如：$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$．请根据以上材料解决下列问题：

（1）式子①$a^2b^2$②$a^2-b^2$③$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$中，属于对称式的是_______（填序号）；

（2）已知（x+a）（x+b）＝x^2+mx+n．

①若 $m=-2, n=\frac{1}{2}$，**求对称式** $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ **的值；**

②**若 n＝－4，直接写出对称式** $\frac{a^4+1}{a^2}+\frac{b^4+1}{b^2}$ **的最小值．**

【答案】（1）①③；（2）①$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=6$；②$\frac{a^4+1}{a^2}+\frac{b^4+1}{b^2}$的最小值为$\frac{17}{2}$．

【分析】

（1）根据对称式的定义进行判断；

（2）①先得到 a+b＝－2，ab＝$\frac{1}{2}$，再变形得到$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$，然后利用整体代入的方法计算；

②根据分式的性质变形得到$\frac{a^4+1}{a^2}+\frac{b^4+1}{b^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b^2}$，再利用完全平方公式变形得到$(a+b)^2-2ab+\frac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2}$，所以原式=$\frac{17}{16}m^2+\frac{17}{2}$，然后根据非负数的性

质可确定$\dfrac{a^4+1}{a^2}+\dfrac{b^4+1}{b^2}$的最小值.

【详解】

解：（1）式子①a²b²②a² - b²③$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$中，属于对称式的是 ①③.

故答案为①③；

（2）∵x²+（a+b）x+ab＝x²+mx+n

∴a+b＝m，ab＝n.

①a+b＝ - 2，ab＝$\dfrac{1}{2}$，

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\dfrac{(-2)^2-2\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}}$＝6；

②$\dfrac{a^4+1}{a^2}+\dfrac{b^4+1}{b^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}+b^2+\dfrac{1}{b^2}$

＝（a+b）² - 2ab+$\dfrac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2}$

＝m²+8+$\dfrac{m^2+8}{16}$

＝$\dfrac{17}{16}$m²+$\dfrac{17}{2}$，

∵$\dfrac{17}{16}$m²≥0，

∴$\dfrac{a^4+1}{a^2}+\dfrac{b^4+1}{b^2}$的最小值为$\dfrac{17}{2}$.

【点睛】

本题主要考查完全平方公式，关键是根据题目所给的定义及完全平方公式进行求解即可.

15．若一个自然数 t 能写成 $t=x^2-y^2$（x，y 均为正整数，且 $x\neq y$），则称 t 为“万象数”，x，y 为 t 的一个万象分解，在 t 的所有万象分解中，若$\dfrac{x-y}{x+y}$最小，则称 x，y 为 t 的绝对万象分解，此时 F（t）＝$\dfrac{x}{y}$．例如：32＝9² - 7²＝6² - 2²，因为$\dfrac{9-7}{9+7}=\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{6-2}{6+2}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2}$．所以 9 和 7 为 32 的绝对万象分解，则 F（32）＝$\dfrac{9}{7}$．若一个四位正整数，

它的千位数字与个位数字相同，百位数字与十位数字相同，但四个数字不全相同，则称这个四位数为“博雅数”．例如 2112，4554 均为“博雅数”．若一个四位正整数 m 是“万象数”且能被 13 整除，“博雅数”n 的前两位数字组成的两位数与后两位数字组成的两位数恰好是 m 的一个万象分解，则所有满足条件的数 m 中 F（m）的最大值为______.

【答案】$\frac{69}{48}$

【分析】

设 n 的个位数字是 a，十位数字是 b，由“博雅数”和万象分解的定义，可以得到 $m=99(a+b)(a-b)$，再由 a 与 b 的取值范围，m 同时能被 13 整除，可以确定 m 的所有取值可能为 1287，3861，6435；再将这三个数进行万象分解，确定 $F(m)$.

【详解】

设 n 的个位数字是 a，十位数字是 b，

∵n 是“博雅数”，

∵n 的前两位数字组成的两位数与后两位数字组成的两位数恰好是 m 的一个万象分解，

∴$m=(10a+b)^2-(10b-a)^2=99(a+b)(a-b)$，

∵m 能被 13 整除，

∴$(a+b)(a-b)$ 是 13 的倍数，

∵$1\le a\le 9$，$0\le b\le 9$，

∴$a+b=13$，

∴$a=6$，$b=7$；$a=7$，$b=6$；$a=5$，$b=8$；$a=8$，$b=5$；$a=9$，$b=4$；$a=4$，$b=9$；

∴m 的值所有情况为：

$1287=99\times 13\times 1=76^2-67^2=36^2-3^2$；

$3861=99\times 13\times 3=85^2-58^2=75^2-42^2=69^2-48^2$；

$6435=99\times 13\times 5=94^2-49^2=102^2-63^2=114^2-33^2=362^2-353^2$；

∵$F(1287)=\frac{76}{67}$；$F(3861)=\frac{69}{48}$；$F(6435)=\frac{362}{353}$；

∴$F(m)$ 的最大值为 $\frac{69}{48}$.

故答案为：$\frac{69}{48}$.

【点睛】

本题考查因式分解的应用；能够通过定义，结合数整除的性质，借助因式分解准确找到符合条件的三个数的所有万象分解是解题的关键.

16．若 a-b=1，则 a^2-b^2-2b 的值为____________.

【答案】1

【分析】

先局部因式分解，然后再将 a-b=1 代入，最后在进行计算即可.

【详解】

解：$a^{2}-b^{2}-2b$

=（a+b）（a-b）-2b

=a+b-2b

=a-b

=1

【点睛】

本题考查了因式分解的应用，弄清题意、并根据灵活进行局部因式分解是解答本题的关键.

三、解答题

17．先分解因式，再求值：$1-a^{2}-b^{2}+ab^{2}$，其中 $a=\frac{1}{99}$，$b=1$．

【答案】 $(1-a)(1+a-b^{2})$，$\frac{98}{9801}$.

【分析】

先利用分组分解法、公式法、提公因式法进行因式分解，再将 a、b 的值代入求值即可得.

【详解】

原式 $=(1-a^{2})-(b^{2}-ab^{2})$，

$=(1+a)(1-a)-b^{2}(1-a)$，

$=(1-a)(1+a-b^{2})$，

当 $a=\frac{1}{99}$，$b=1$ 时，原式 $=\left(1-\frac{1}{99}\right)\times\left(1+\frac{1}{99}-1^{2}\right)$，

$=\frac{98}{99}\times\frac{1}{99}$，

$=\frac{98}{9801}$.

【点睛】

本题考查了利用分组分解法、公式法、提公因式法进行因式分解，因式分解的主要方法包括：提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法等，熟练掌握各方法是解题关键.

18．已知 $x^2+xy-2y^2=7$，且 x，y 都是正整数，试求 x，y 的值．

【答案】x=3，y=2．

【分析】

运用十字相乘法对等式的左边进行因式分解，再根据 x，y 的值均是正整数进行讨论即可得出答案．

【详解】

$\because x^2+xy-2y^2=(x+2y)(x-y)$，且 x，y 都是正整数

$\therefore x+2y$ 是正整数，$x-y$ 是整数，

又$\because x^2+xy-2y^2=7$，7 是正整数，

$\therefore x+2y$，$x-y$ 均是正整数，

又∵7=7×1，

$\therefore \begin{cases} x+2y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=7 \end{cases}$，

解 $\begin{cases} x+2y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$，

解 $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=7 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$（不符合题意，舍去）

所以 x=3，y=2．

【点睛】

本题考查了因式分解的应用，熟练掌握十字相乘法分解因式并确定出关于 x、y 的方程组是解题的关键．

19． $ac-bc-a^2+2ab-b^2$

【答案】$(a-b)(c-a+b)$

【分析】

首先把一二项分为一组、三四五项分为一组，然后再利用公式法和提公因式法分解．

【详解】

解：原式$=(ac-bc)-(a^2-2ab+b^2)$

$=c(a-b)-(a-b)^2$

$=(a-b)(c-a+b)$

【点睛】

本题考查因式分解，综合利用分组分解、公式法和提公因式法分解是解题关键．

20． x^2-2x-b^2-2b

【答案】 $(x+b)(x-b-2)$．

【分析】

综合利用分组分解法、公式法、提公因式法进行因式分解即可得．

【详解】

原式$=(x^2-b^2)-(2x+2b)$，

$=(x+b)(x-b)-2(x+b)$，

$=(x+b)(x-b-2)$．

【点睛】

本题考查了综合利用分组分解法、公式法、提公因式法进行因式分解，因式分解的主要方法包括：提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法等，熟练掌握各方法是解题关键．

21．因式分解： x^2-y^2+2y-1

【答案】 $(x+y-1)(x-y+1)$

【分析】

将x^2-y^2+2y-1分组为$x^2-(y^2-2y+1)$，然后利用完全平方公式及平方差公式进行分解即可．

【详解】

x^2-y^2+2y-1

$=x^2-(y^2-2y+1)$

$=x^2-(y-1)^2$

$=(x+y-1)(x-y+1)$．

【点睛】

本题考查了利用分组分解法分解因式，涉及了完全平方公式、平方差公式，正确进行分组是解题的关键．

22． $x^2+4y-1-4y^2$

【答案】$(x+1-2y)(x-1+2y)$

【分析】

观察原式特点，先给原式后三项添括号，利用完全平方公式化为$x^2-(1-2y)^2$，再利用平方差公式分解因式即可解答.

【详解】

解：原式$=x^2-(1-4y+4y^2)$

$=x^2-(1-2y)^2$

$=(x+1-2y)(x-1+2y)$.

【点睛】

本题考查了分组分解法、公式法分解因式，熟记完全平方公式和平方差公式，能正确的将多项式分组是解答的关键.

23．当$x=-2$时，多项式x^3+4x^2-4x+k的值为0，求k的值，并将该多项式进行因式分解.

【答案】-16，$(x+4)(x+2)(x-2)$.

【分析】

先将x的值代入，解关于k的一元一次方程求出k的值，再综合利用分组分解法、提公因式法、公式法进行因式分解即可得.

【详解】

当$x=-2$时，多项式x^3+4x^2-4x+k的值为0，

即$(-2)^3+4\times(-2)^2-4\times(-2)+k=0$，

解得$k=-16$；

则原多项式为$x^3+4x^2-4x-16$，

因式分解得：原式$=(x^3+4x^2)-(4x+16)$，

$=x^2(x+4)-4(x+4)$，

$=(x+4)(x^2-4)$，

$=(x+4)(x+2)(x-2)$.

【点睛】

本题考查了综合利用分组分解法、提公因式法、公式法进行因式分解，解一元一次方程，熟练掌握因式分解的各方法是解题关键.

24．完全平方公式是初中数学的重要公式之一：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，完全平方公式既可以用来进行整式计算又可以用来进行分解因式，

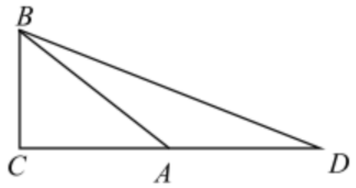
发现：$3+2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

应用：

(1)写出一个能用上面方法进行因式分解的式子，并进行因式分解；

(2)若 $a+b\sqrt{2}=\left(n\sqrt{2}+m\right)^2$，请用 m，n 表示 a、b；

拓展：如图在直角三角形 ABC 中，BC=1，$AC=\sqrt{3},\angle C=90^{\circ}$，延长 CA 至 D，使 AD=AB，求 BD 的长（参考上面提供的方法把结果进行化简）



【答案】（1）见解析；（2）a=m²+2n²，b=2mn；拓展：BD=（$\sqrt{6}+\sqrt{2}$）.

【分析】

（1）依照样例进行解答即可；

（2）把等式右边按照完全平方公式进行计算，然后再根据无理数相等的性质进行解答即可；

拓展：先根据勾股定理求得 AB 长，继而利用勾股定理求出 BD^2，再结合上面的方法进行因式分解求得 BD 长即可.

【详解】

（1）$4+2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1^2=(\sqrt{3}+1)^2$；

（2）$(n\sqrt{2}+m)^2=m^2+2mn\sqrt{2}+2n^2=m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$，

又 $a+b\sqrt{2}=\left(n\sqrt{2}+m\right)^2$，

所以 $a=m^2+2n^2$，$b=2mn$；

拓展：由勾股定理得 $AC^2+BC^2=AB^2$，BC=1，$AC=\sqrt{3}$，

所以 $AB^2=1^2+(\sqrt{3})^2=1+3=4$，

∴AB=2，

又 AB=AD，

所以 AD=2，CD=2+$\sqrt{3}$，

$BD^2=BC^2+CD^2=1^2+(2+\sqrt{3})^2=1+4+4\sqrt{3}+3=8+4\sqrt{3}$；

$8+4\sqrt{3}=6+4\sqrt{3}+2=(\sqrt{6})^2+4\sqrt{3}+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$，

所以 $BD^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$，

所以 $BD=\pm(\sqrt{6}+\sqrt{2})$，

因为 BD 为三角形的一边，

所以$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$不合题意舍去，

所以 $BD=(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

【点睛】

本题考查了完全平方公式，因式分解的应用，勾股定理等知识，弄清题意，灵活运用相关知识是解题的关键.

25．因式分解：$9-4x^2+4xy-y^2$

【答案】$(3-2x+y)(3+2x-y)$

【分析】

先把后三项作为一组，运用完全平方公式分解，再运用平方差公式分解.

【详解】

解：

$$9-4x^2+4xy-y^2=9-\left(4x^2-4xy+y^2\right)=9-(2x-y)^2=(3-2x+y)(3+2x-y)$$

.

【点睛】

本题考查了多项式的因式分解，属于常考题型，正确分组、掌握解答的方法是解题关键.

26．用平方差公式进行因式分解在数的运算中有着广泛的应用，比如，数的整除性探究中的应用.

例：2008^3-2008 **能被 2009 整除吗？**

解:

$$2008^3-2008=2008\left(2008^2-1\right)=2008(2008+1)(2008-1)=2008\times2009\times2007$$

∵ 2008^3-2008 中有因数 **2009**，

∴ 2008^3-2008 一定能被 **2009** 整除．

请你试一试：已知数字$\left(2^{48}-1\right)$恰能被两个在 60 和 70 之间的整数整除，求出这两个数．

【答案】63 和 65．

【分析】

根据题目中的运算规律进行因式分解，即可求出答案．

【详解】

解：$2^{48}-1=(2^{24}+1)(2^{24}-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{6}+1)(2^{6}-1)$；

$=63\times65\times\left(2^{12}+1\right)\left(2^{24}+1\right)$；

$\therefore 2^{48}-1$ 可被 63 与 65 整除，

即所求在 60 和 70 之间的两个整数是 63 和 65．

【点睛】

本题考查了因式分解的应用，以及平方差公式的运用，解题的关键是熟练掌握因式分解的方法进行解题．

27．因式分解：x^2-y^2-2x+1

【答案】$(x-1+y)(x-1-y)$

【分析】

当被分解的式子是四项时，应考虑运用分组分解法进行分解．本题中有 x 的二次项，x 的一次项，有常数项．所以要考虑后三项 x^2-2x+1 为一组．

【详解】

解：x^2-y^2-2x+1，

$=-y^2+（x^2-2x+1）$，

$=-y^2+（x-1）^2$，

$=（x+y-1）（x-y-1）$．

【点睛】

本题考查了分组分解法分解因式，难点是采用两两分组还是三一分组．比如本题有 x 的二次项，x 的一次项，有常数项，所以首要考虑的就是三一分组．

28．分解因式： $a^4+4b^2c^2-a^2b^2-4a^2c^2$．

【答案】 $(a+b)(a-b)(a-2c)(a+2c)$

【分析】

先分组提公因式、然后再用平方差公式因式分解即可．

【详解】

解：原式$=(a^4-a^2b^2)-(4a^2c^2-4b^2c^2)$

$=a^2(a^2-b^2)-4c^2(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2-4c^2)$

$=(a+b)(a-b)(a-2c)(a+2c)$．

【点睛】

本题主要考查了因式分解，掌握分组提公因式和运用平方差公式因式分解是解答本题的关键．

29．分解因式： $5x^2+6y-15x-2xy$．

【答案】 $(x-3)(5x-2y)$

【分析】

先分组，再利用提公因式法分解因式．

【详解】

$5x^2+6y-15x-2xy$

$=(5x^2-15x)+(6y-2xy)$

$=5x(x-3)+2y(3-x)$

$=(x-3)(5x-2y)$．

【点睛】

此题考查分解因式：分组分解法、提公因式法、公式法（平方差公式、完全平方公式）、因式分解法，根据每个多项式的特点选用适合的分解方法是解题的关键．

30．因式分解： $x^3+3x^2y-4x-12y$．

【答案】$(x+3y)(x+2)(x-2)$

【分析】

原式第一、三项结合，二、四项结合，提取公因式后再提取公因式，利用平方差公式分解即可．

【详解】

解：原式$=x^3-4x+3x^2y-12y$

$=x(x^2-4)+3y(x^2-4)$

$=(x+3y)(x^2-4)$

$=(x+3y)(x+2)(x-2)$．

【点睛】

本题考查了因式分解：分组分解法：对于多于三项以上的多项式的因式分解，先进行适当分组，再把每组因式分解，然后利用提公因式法或公式法进行分解．

31．分解因式： x^4-5x+4

【答案】$(x-1)\left(x^3+x^2+x-4\right)$

【分析】

先将多项式减去x^2再加上x^2，然后利用分组分解法、平方差公式、十字相乘法和提取公因式法因式分解即可．

【详解】

解：x^4-5x+4

$=x^4-x^2+x^2-5x+4$

$=x^2\left(x^2-1\right)+\left(x-1\right)\left(x-4\right)$

$=x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)+\left(x-1\right)\left(x-4\right)$

$=\left(x-1\right)\left[x^2\left(x+1\right)+\left(x-4\right)\right]$

$=\left(x-1\right)\left(x^3+x^2+x-4\right)$．

【点睛】

此题考查的是因式分解，掌握利用添项法、分组分解法、平方差公式、十字相乘法和提取公因式法因式分解是解题关键．

32．分解因式：$\left(m^{2}-1\right)\left(n^{2}-1\right)+4mn$．

【答案】$(mn+m-n+1)(mn-m+n+1)$

【分析】

首先去括号，再重新分组为 $m^2n^2+2mn+1$ 与（n^2+m^2-2mn），再利用公式法分解因式即可．

【详解】

解：原式$=m^2n^2-m^2-n^2+1+2mn+2mn$

$=(m^2n^2+2mn+1)-(m^2-2mn+n^2)$

$=(mn+1)^2-(m-n)^2$

$=(mn+m-n+1)(mn-m+n+1)$．

【点睛】

此题考查了分组分解法分解因式以及二次三项式的分解因式，本题没有公因式可提取，又不能直接应用公式，因而考虑用拆项法制造分组分解的条件.拆项法是因式分解中一种技巧性较强的方法，它通常是把多项式中的某一项拆成几项，再分组分解，

33．证明：当 m，n 都是大于 1 的整数时，$m^{4}+4n^{4}$ 是合数．

【答案】见解析

【分析】

先把原式进行因式分解，再证明各式均大于 1 即可．

【详解】

证明：根据合数的定义可知，只要把 n^4+4m^4 化为两个因式积的形式即可，

$m^4+4n^4=m^4+(2n^2)^2+4m^2n^2-4m^2n^2$，

$=(2n^2+m^2)^2-4n^2m^2$，

$=(2n^2+m^2-2nm)(2n^2+m^2+2nm)$，

而 $m^2+2mn+2n^2>m^2-2mn+2n^2$，

$m^2-2mn+2n^2=(n-m)^2+n^2\geq n^2>1$，

$\therefore 2n^2+m^2-2nm$、$2n^2+m^2+2nm$ 均为大于 1 的整数，

故 n^4+4m^4 是合数．

【点睛】

本题考查了因式分解的应用，熟知质数和合数的概念是解答此题的关键．质数的定义，即在一个大于 1 的自然数中，除了 1 和此整数自身外，没法被其他自然数整除的数叫质数．